МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1999

УДК 531.38

© 1999 г. Г.В. МОЗАЛЕВСКАЯ, Е.И. ХАРЛАМОВА

СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ДВУХ СОЧЛЕНЕННЫХ ТЕЛ

Уже в динамике одного твердого тела исследование стационарных движений полагали наиболее важной задачей [1, с. 217], ей посвящены многочисленные публикации. И обобщение ее – задача о стационарных движениях тела на подвесе – привлекла внимание многих авторов, сформировавших "интереснейший раздел механики" [2, с. 385]. "Не последнее значение для успеха исследования имеет при этом хорошо продуманный выбор основных, расчетных и промежуточных систем координат и искомых переменных" [2, с. 435][1].

Известно, что равномерные вращения движущегося по инерции тела возможны лишь вокруг главных центральных осей. А у тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, оси возможных равномерных вращений образуют конус, и за исключением оси, несущей центр масс, любой другой образующей этого конуса сопоставлено определенное значение угловой скорости.

Принципиальное отличие от приведенных имеет результат, полученный в настоящей работе. Оказалось, что присоединение к телу S другого тела S^* сферическим шарниром в неподвижной точке O и упругими звеньями доставляет возможность любой оси тела S быть осью равномерного вращения с определенными для нее угловыми скоростями (этот эффект подобен автобалансировке [5, с. 172–180]).

1. Кинематические уравнения. Неизменно связанные с телами S и S^* базисы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3$ составлены из ортонормированных векторов[2] $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_j = \delta_{ij}$, $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijl}\mathbf{e}_l$, $\mathbf{k}_i \times \mathbf{k}_j = \varepsilon_{ijl}\mathbf{k}_l$. Полагаем точку O неподвижной, тогда движение тел определяют угловые скорости, относимые к своим базисам $\omega = \omega_i\mathbf{e}_i$, $\Omega = \Omega_i\mathbf{k}_i$, так что $\dot{\mathbf{e}}_i = \varepsilon_{ilj}\omega_j\mathbf{e}_l$, $\dot{\mathbf{k}}_i = \varepsilon_{ilj}\Omega_j\mathbf{k}_l$. Взаимные положения тел задают направляющие косинусы $\alpha_{ij} = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{e}_j$, $\alpha_{il}\alpha_{jl} = \delta_{ij}$, $\varepsilon_{ijs}\alpha_{ls} = \varepsilon_{spl}\alpha_{si}\alpha_{pj}$, дифференцирование которых по времени приводит к кинематическим уравнениям

$$\dot{\alpha}_{ij} = \varepsilon_{jls}\omega_s\alpha_{il} + \varepsilon_{ils}\Omega_s\alpha_{lj} \tag{1.1}$$

Удовлетворяя соотношения, связывающие девять направляющих косинусов, вво-

[1] А.Ю. Ишлинский о задачах динамики твердого тела: "Попытка решения таких задач, исходя из прямого развития второго метода Лагранжа, как правило, приводит к громоздким малообозримым дифференциальным уравнениям с большим числом членов, механическое толкование которых совсем не просто" [2, с. 434]. Да и Ж.Л. Лагранж в динамике твердого тела не следовал своему методу, а предпочел иной путь "более прямой и приводящий к формулам более изящным и более удобным для вычислений" [3, с. 256]. Он обратился к переменным Эйлера – компонентам угловой скорости тела и направляющим косинусам неизменно связанных с телом осей по отношению к неподвижным осям. Но последние в общем случае требуют девяти дифференциальных кинематических уравнений с шестью конечными соотношениями. Для параметров Родрига – Гамильтона достаточно четырех кинематических уравнений с одним конечным соотношением [4, с. 120].

[2] Буквенный индекс принимает значения 1,2,3, и по этому индексу выполняется суммирование, если он входит дважды в одночленное выражение. Использованы символ Кронекера δ_{ij} и символ Леви – Чивита $\varepsilon_{ijl} = {}^1/_2\,(i-j)(j-l)(l-i)$.

дим четыре переменные λ_0, λ_i (параметры Родрига – Гамильтона)[3]:

$$\alpha_{11}(\lambda) = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 \ (123)$$

$$\alpha_{12}(\lambda) = 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3), \ \ \alpha_{13}(\lambda) = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) \ (123) \tag{1.2}$$

$$4\lambda_0^2 = 1 + \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}, \ \ 4\lambda_0\lambda_1 = \alpha_{23} - \alpha_{32} \ (123)$$

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \tag{1.3}$$

$$2\dot\lambda_0 = (\omega_1 - \Omega_1)\lambda_1 + (\omega_2 - \Omega_2)\lambda_2 + (\omega_3 - \Omega_3)\lambda_3$$

$$2\dot\lambda_1 = -(\omega_1 - \Omega_1)\lambda_0 + (\omega_3 + \Omega_3)\lambda_2 - (\omega_2 + \Omega_2)\lambda_3 \ (123) \tag{1.4}$$

Замечание. Очевидное утверждение, что при равенстве угловых скоростей ω и Ω, т.е. при

$$\Omega_j = \omega_i \alpha_{ji} \tag{1.5}$$

тела сохраняют взаимное положение, формально следует и из (1.1), (1.5) $\dot\alpha_{ij} = (\varepsilon_{jls}\alpha_{il} + \varepsilon_{ilp}\alpha_{ps}\alpha_{lj})\omega_s \equiv 0 \Rightarrow \alpha_{ij}(t) \equiv \alpha_{ij}(0)$, а получаемые из (1.5), (1.2) значения

$$\Omega_1 = (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)\omega_1 + 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)\omega_2 + 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)\omega_3 \ (123) \tag{1.6}$$

обращают в нуль правые стороны уравнений (1.4), сохраняя тем самым значения величин λ_0, λ_i, приданные им в начальный момент.

2. Динамические уравнения. Упругое звено стремится совместить направления $\mathbf{b} = b_i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{b}^* = b_i^*\mathbf{k}_i$, фиксированные соответственно в S и в S^* и создает приложенный к телу S в точке O момент

$$c\mathbf{b} \times \mathbf{b}^* = \varepsilon_{ijs} c b_j b_l^* \alpha_{ls} \mathbf{e}_i \tag{2.1}$$

(c – жесткость звена). Таких звеньев может быть несколько, и момент $\Lambda_S^{S^*} = \Lambda_i \mathbf{e}_i$ – сумма моментов вида (2.1). Вводя тензор $c_{jl} = \sum c^{(n)} b_j^n b_l^{*(n)}$ (n – номер звена), получим $\Lambda_i = \varepsilon_{ijs} c_{jl} \alpha_{ls}(\lambda)$, так что

$$\Lambda_1 = (c_{23} - c_{32})(\lambda_0^2 - \lambda_1^2) + (c_{23} + c_{32})(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) + 2(c_{22} - c_{33})\lambda_2\lambda_3 +$$

$$+2(c_{22} + c_{33})\lambda_0\lambda_1 - 2(c_{21}\lambda_2 + c_{31}\lambda_3)\lambda_0 + 2(c_{21}\lambda_3 - c_{31}\lambda_2)\lambda_1 \ (123)$$

Момент $\Lambda_{S^*}^S = \Lambda_i^* \mathbf{k}_i = \sum c^{(n)} \mathbf{b}^{*(n)} \times \mathbf{b}^{(n)}$ характеризует действие тела S на S^* : $\Lambda_i^* = \varepsilon_{ijs} c_{lj} \alpha_{sl}(\lambda)$, тогда

$$\Lambda_1^* = (c_{32} - c_{23})(\lambda_0^2 - \lambda_1^2) + (c_{23} + c_{32})(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) + 2(c_{22} - c_{33})\lambda_2\lambda_3 -$$

$$-2(c_{22} + c_{33})\lambda_0\lambda_1 + 2(c_{12}\lambda_2 + c_{13}\lambda_3)\lambda_0 + 2(c_{12}\lambda_3 - c_{13}\lambda_2)\lambda_1 \ (123)$$

В предположении, что обеспечивающие неподвижность точки O связи идеальны, и с этой точкой совмещены центры масс тел S и S^*, записываем уравнения изменения

[3] Символ (123) означает, что из каждого записанного соотношения при циклической перестановке индексов следует еще два.

моментов количеств движения этих тел $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\omega} = A_{ij}\omega_j\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\Omega} = B_{ij}\Omega_j\mathbf{k}_i$ относительно точки O:

$$A_{1i}\dot{\omega}_i + (A_{3i}\omega_2 - A_{2i}\omega_3)\omega_i = \Lambda_1 \quad (123) \tag{2.2}$$

$$B_{1i}\dot{\Omega}_i + (B_{3i}\Omega_2 - B_{2i}\Omega_3)\Omega_i = \Lambda_1^* \quad (123) \tag{2.3}$$

Здесь A_{ij}, B_{ij} – компоненты тензоров инерции **A, B** тел S и S^* в точке O.

Десять дифференциальных уравнений (1.4), (2.4), (2.5) определяют зависимость от времени десяти переменных $\lambda_0, \lambda_i, \omega_i, \Omega_i$. Порядок этой системы может быть понижен до седьмого использованием конечного соотношения (1.3) и интегралов сохранения механической энергии

$$A_{ij}\omega_i\omega_j + B_{ij}\Omega_i\Omega_j - 2c_{ij}\alpha_{ji}(\lambda) = \text{const}$$

и постоянства модуля момента количества движения системы

$$A_{ij}A_{il}\omega_j\omega_l + B_{ij}B_{il}\Omega_j\Omega_l + 2A_{is}B_{jp}\omega_s\Omega_p\alpha_{ji}(\lambda) = \text{const}$$

3. Равномерные вращения. Оставшийся произвол в выборе базисов устраним, совместив $\mathbf{e}_i$ с главными осями тензора $\mathbf{A}$: $A_{23} = A_{31} = A_{12} = 0$. В обозначениях главных моментов инерции оставим один индекс. Полагаем также, что тензор c_{ij} шаровой и обозначим $c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_0/4$. Тогда $\Lambda_i = -\Lambda_i^* = c_0\lambda_0\lambda_i$.

Ищем условия существования равномерных вращений тела S. Вектор $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{n}$ неизменен в теле S (а, значит, и в пространстве), постоянны и величина ω угловой скорости и компоненты n_i единичного вектора $\mathbf{n}: n_1^2 + n_2^2 + n_3^3 = 1$. Как отмечено в замечании п. 1, при этом постоянны и $\lambda_0, \lambda_i, \Omega_i$. Уравнения (2.2) запишем так

$$\lambda_1 = (A_3 - A_2)\omega^2 n_2 n_3 / (c_0\lambda_0) \tag{3.1}$$

отметив, что

$$n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + n_3\lambda_3 = 0 \tag{3.2}$$

из (1.6), (1.3) получим

$$\Omega_i = [(2\lambda_0^2 - 1)n_i + 2\lambda_0\varepsilon_{ijk}n_j\lambda_k]\omega \tag{3.3}$$

Величины (3.1) подставим в (1.3):

$$2\lambda_0^2 = 1 \pm \sqrt{1 - 4\omega^4 K^2(n)/c_0^2} \tag{3.4}$$

$$K^2(n) = \sum_{(123)} (A_2 - A_3)^2 n_2^2 n_3^2$$

Обратимся к уравнениям (2.3):

$$(B_{3i}\Omega_2 - B_{2i}\Omega_3)\Omega_i = -c_0\lambda_0\lambda_1 \quad (123) \tag{3.5}$$

Получаемое из (3.5) соотношение $\Omega_i\lambda_i = 0$ вследствие (3.2), (3.3) удовлетворено тождественно. В другое соотношение $B_{ij}\Omega_j\lambda_i = 0$ последовательно вносим величины

(3.3), (3.1), (3.4) и находим

$$\omega^4 = \tfrac{1}{4} c_0^2 L^2(n)[N^2(n) + L^2(n)K^2(n)] \tag{3.6}$$

$$L(n) = \sum_{(123)} n_1\{(A_3 - A_2)B_{11}n_2n_3 + [(A_2 - A_1)n_2^2 + (A_1 - A_3)n_3^2]B_{23}\}$$

$$N(n) = \sum_{(123)} n_1\{(A_1 - A_3)(A_2 - A_1)(B_{33} - B_{22})n_1^2 n_2 n_3 +$$

$$+[(A_2 + A_3 - 2A_1)(A_3 - A_2)n_2^2 n_3^2 + (A_1 - A_3)^2 n_3^2 n_1^2 - (A_2 - A_1)^2 n_1^2 n_2^2]B_{23}\}$$

Из (3.4), (3.6) заключаем, что каждому фиксированному в теле S направлению $\mathbf{n} = n_i\mathbf{e}_i$ сопоставлены четыре действительных значения

$$\lambda_0 = \pm(\tfrac{1}{2}[1 \pm 1/\sqrt{(1 + K^2(n)L^2(n)/N^2(n))}])^{1/2}$$

которые вместе с отвечающими им значениями (3.1) величин λ_i определяют четыре возможных положения тела $S*$ относительно S. В каждом из таких положений эта система тел может вращаться равномерно с угловой скоростью $\omega(n)$, определяемой из (3.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применения. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 351. с.
2. *Ишлинский А.Ю.* Механика: идеи, задачи, приложения. М.: Наука, 1985. 624 с.
3. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. Т. II. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1950. 440 с.
4. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
5. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351 с.

Донецк

Поступила в редакцию 2.10.1997