МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1999

УДК 624.072.2

 Л.С. РЫБАКОВ

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ПЛОСКОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ РЕШЕТКИ

Представлен линейный дискретно-континуальный упругий анализ плоской решетки, образованной из двух взаимно ортогональных семейств прямых параллельных пространственно деформируемых стержней, упругие оси которых принадлежат одной плоскости. Внутри каждого семейства стержни одинаковые и однородные. Одна из главных осей их поперечных сечений принадлежит плоскости решетки. Стержни жестко связаны между собой в местах пересечения их упругих линий – узлах решетки.

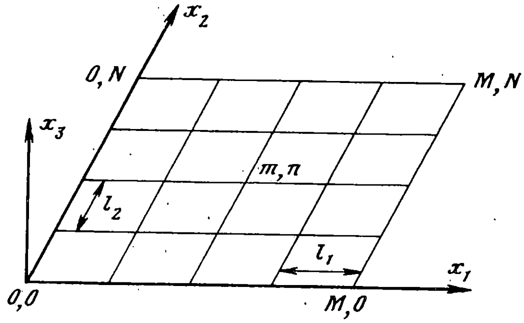
Показано, что при сделанных предположениях задача о пространственном деформировании решетки распадается на две независимые, сходные в математическом отношении проблемы. Одна из них связана с деформированием решетки в своей плоскости, а другая – с ее поперечным изгибом. С помощью метода склейки в версии, изложенной в [1, 2], каждая проблема сведена к соответствующей строгой дискретной теории, полная замкнутая система определяющих уравнений в частных разностях которой в терминах обобщенных узловых смещений, полных деформаций и начальных внутренних сил стержней представлена геометрическими и физическими соотношениями, уравнениями равновесия узлов и уравнениями совместности полных деформаций стержней. В рамках построенных теорий даны альтернативные постановки задач в обобщенных узловых смещениях и в обобщенных начальных внутренних силах стержней. Последняя постановка проиллюстрирована примерами. Представленные теории являются дискретными аналогами плоского напряженного состояния и теории изгиба пластин, вытекающих из моментной теории упругости.

1. Исходные положения. Рассмотрим плоскую решетку, образованную из двух взаимно ортогональных семейств пространственно деформируемых прямых параллельных стержней, упругие оси которых расположены в одной плоскости (фиг. 1). Стержни взаимодействуют между собой в точках пересечения их упругих линий – узлах решетки.

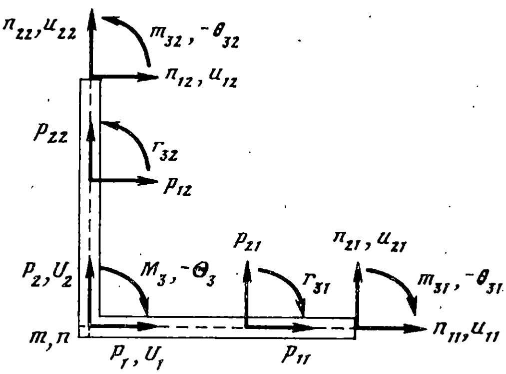
В общем случае внешние воздействия на решетку слагаются из погонных сил и моментов стержней и сосредоточенных в узлах сил и моментов.

Отнесем решетку к прямоугольной декартовой системе отсчета $x_1x_2x_3$, сориентировав ее так, чтобы оси x_1, x_2 были параллельны упругим линиям стержней разных семейств. Стержни, простирающиеся вдоль оси x_α, будем называть α-стержнями (здесь и далее $\alpha = 1,2$).

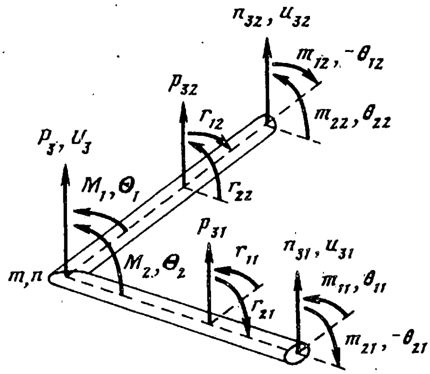
Дискретная двухмерность решетки требует для нумерации образующих ее элементов (узлов и соединяющих их стержней) два целочисленных параметра, которые для переменных величин, связанных с конкретным элементом решетки, выступают в роли дискретных аргументов. Обозначим эти параметры символами m, n, и будем полагать, что они отсчитываются в направлении осей x_1, x_2 соответственно. Тогда если для узлов принять $m = 0, 1, 2, ..., M$; $n = 0, 1, 2, ..., N$, где M, N – заданные положительные целые числа, то для α-стержней $m = 0, 1, 2, ..., M + \alpha - 2$, $n = 0, 1, 2, ..., N - \alpha + 1$. В дальнейшем предполагается, что все рассуждения и соотношения,



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

приводимые для текущего элемента решетки, справедливы для соответствующей области изменения параметров m, n.

Ниже используются линейные разностные операторы $\Delta_\alpha^\pm$ и $\nabla_\alpha^\pm$, смысл которых на примере отвлеченной функции $\psi[m, n]$ дискретных аргументов m, n поясняют равенства

$$\Delta_1^\pm\psi[m, n] = \pm\psi[m \pm 1, n] \mp \psi[m, n], \quad \Delta_2^\pm\psi[m, n] = \pm\psi[m, n \pm 1] \mp \psi[m, n]$$

$$\nabla_1^\pm\psi[m, n] = \psi[m \pm 1, n], \quad \nabla_2^\pm\psi[m, n] = \psi[m, n \pm 1]$$

Нетрудно видеть, что эти операторы перестановочны, причем

$$\nabla_\alpha^\pm = 1 \pm \Delta_\alpha^\pm, \quad \nabla_\alpha^+\nabla_\alpha^- = 1, \quad \Delta_\alpha^\pm = \Delta_\alpha^\mp\nabla_\alpha^\pm \tag{1.1}$$

Введенные операторы позволяют записывать все формулы и уравнения в переменных с несмещенными текущими значениями дискретных аргументов без явного указания этих аргументов при символах переменных, а также формировать из них операторы частных разностей более высокого порядка. Так, например, для операторов частных разностей второго порядка имеем

$$\begin{aligned} &\Delta_1^2\psi = \Delta_1^2\psi[m, n] = \psi[m+1, n] - 2\psi[m, n] + \psi[m-1, n] \\ &\Delta_2^2\psi = \Delta_2^2\psi[m, n] = \psi[m, n+1] - 2\psi[m, n] + \psi[m, n-1] \\ &\Delta_\alpha^2 = \Delta_\alpha^+\Delta_\alpha^- = \Delta_\alpha^+ - \Delta_\alpha^- = \nabla_\alpha^+ - 2 + \nabla_\alpha^- \end{aligned} \tag{1.2}$$

Условимся также, что если в определяющих соотношениях встретится переменная величина со значениями m, n, указывающими явно или неявно (обнаруживается после раскрытия предшествующего разностного оператора) на несуществующий элемент решетки, то значение этой переменной равно нулю.

Основное внимание сосредоточим на регулярных (дискретно ортотропных и однородных) решетках, в которых стержни, принадлежащие одному семейству, однородны, одинаковы и расположены с постоянным шагом. В таком случае геометрические и упругие характеристики решетки целиком определяются длинами α-стержней l_α и жесткостями $g_{0\alpha}$, $g_{\alpha\alpha}$ и $g_{3\alpha}$ их упругих линий соответственно на растяжение – сжатие, кручение и изгиб в плоскостях $x_\alpha x_3$, $x_1 x_2$.

При построении теории решетки воспользуемся методом "склейки" в версии, изложенной в [1, 2]. По этой версии решетку следует расчленить на изолированные элементы и провести их анализ (упругий – для стержней, статический – для узлов) с учетом действующих на них внешних сил (моментов) и сил (моментов) взаимодействия, а также геометрических условий сопряжения с соседними элементами.

Пусть $x \in [0, 1]$ – отнесенная к l_α локальная координата, отсчитываемая вдоль упругой линии текущего, с номером (m, n), α-стержня. Введем для произвольной точки этой линии (поперечного сечения α-стержня) следующие обозначения ($k = 1, 2, 3$): $u_{k\alpha}(x)$ – отнесенное к l_α смещение вдоль оси x_k; $\theta_{k\alpha}(x)$ – угол поворота сечения вокруг оси x_k; $n_{k\alpha}(x)$ и $m_{k\alpha}(x)$ – внутренние силы и моменты, а $p_{k\alpha}(x)$ и $r_{k\alpha}(x)$ – погонные внешние силы и моменты, действующие соответственно вдоль и вокруг оси x_k. Аналогичные декартовые компоненты узловых безразмерных смещений, поворотов, сосредоточенных внешних сил и моментов обозначим символами U_k(U_α отнесены к l_α, U_3 – к l_1), Θ_k, P_k и M_k соответственно. Смысл названных величин, включая принятое для них правило знаков, поясняют фиг. 2, 3. Подчеркнем также, что введенные переменные являются функциями дискретных аргументов m, n, так что следовало бы, например, писать $u_{k\alpha}(x; m, n)$, $U_\alpha[m, n]$. Однако, как было условлено выше, эти аргументы при написании функций явно не указываются.

Ограничимся детальным изучением только таких решеток, в которых главные центральные оси поперечных сечений α-стержней параллельны осям $x_{3-\alpha}$, x_3. В таком случае общая задача о пространственном напряженно-деформированном состоянии решетки распадается на две независимые задачи. Одна из них связана с деформированием решетки в своей плоскости, а другая – с деформированием решетки из этой плоскости. Приступая к раздельному изучению этих задач, условимся называть их соответственно теорией плоского деформирования и теорией изгиба (поперечного) решетки.

2. Теория плоского деформирования решетки. Деформирование изолированных α-стержней в плоскости решетки описывается уравнениями

$$\begin{gathered} n'_{\alpha\alpha}(x)+l_\alpha p_{\alpha\alpha}(x)=0, \quad n_{\alpha\alpha}(x)=g_{0\alpha}u'_{\alpha\alpha}(x) \\ n'_{3-\alpha,\alpha}(x)+l_\alpha p_{3-\alpha,\alpha}(x)=0, \quad m_{3\alpha}(x)=-g_{3\alpha}l_\alpha^{-1}u''_{3-\alpha,\alpha}(x) \\ n_{3-\alpha,\alpha}(x)=l_\alpha^{-1}m'_{3\alpha}(x)+r_{3\alpha}(x), \quad \theta_{3\alpha}(x)=u'_{3-\alpha,\alpha}(x) \end{gathered} \tag{2.1}$$

общее решение которых с учетом геометрических условий сопряжения начал стержней со смежными узлами

$$u_{\alpha\alpha}(0)=U_\alpha, \quad u_{3-\alpha,\alpha}(0)=\lambda^{2\alpha-3}U_{3-\alpha}, \quad \theta_{3\alpha}(0)=-(-1)^\alpha\Theta_3, \quad \lambda=l_1l_2^{-1} \tag{2.2}$$

записывается следующим образом (всюду суммирование по повторяющемуся индексу отсутствует):

$$u_{\alpha\alpha}(x)=U_\alpha+g_{0\alpha}^{-1}\;N_{\alpha\alpha}x+u^*_{\alpha\alpha}(x),\quad n_{\alpha\alpha}(x)=N_{\alpha\alpha}+n^*_{\alpha\alpha}(x)$$

$$u_{3-\alpha,\alpha}(x)=\lambda^{2\alpha-3}U_{3-\alpha}-(-1)^\alpha\Theta_3x-\tfrac{1}{6}x^2l_\alpha g_{3\alpha}^{-1}(3M_{3\alpha}+l_\alpha N_{3-\alpha,\alpha}x)+u^*_{3-\alpha,\alpha}(x)$$

$$\theta_{3\alpha}(x)=-(-1)^\alpha\Theta_3-\tfrac{1}{2}xl_\alpha g_{3\alpha}^{-1}(2M_{3\alpha}+l_\alpha N_{3-\alpha,\alpha}x)+\theta^*_{3\alpha}(x)$$

$$m_{3\alpha}(x)=M_{3\alpha}+l_\alpha N_{3-\alpha,\alpha}x+m^*_{3\alpha}(x),\quad M_{3\alpha}=m_{3\alpha}(0)$$

$$n_{3-\alpha,\alpha}(x)=N_{3-\alpha,\alpha}+n^*_{3-\alpha,\alpha}(x),\quad N_{\alpha\beta}=n_{\alpha\beta}(0) \tag{2.3}$$

$$u^*_{\alpha\alpha}(x)=-l_\alpha g_{0\alpha}^{-1}\int\limits_0^x(x-\tau)p_{\alpha\alpha}(\tau)d\tau,\quad n^*_{\alpha\alpha}(x)=g_{0\alpha}u^{*\prime}_{\alpha\alpha}(x)$$

$$u^*_{3-\alpha,\alpha}(x)=\tfrac{1}{6}l_\alpha^2g_{3\alpha}^{-1}\int\limits_0^x(x-\tau)^3[l_\alpha p_{3-\alpha,\alpha}(\tau)+r'_{3\alpha}(\tau)]d\tau,\quad \theta^*_{3\alpha}(x)=u^{*\prime}_{3-\alpha,\alpha}(x)$$

$$m^*_{3\alpha}(x)=-g_{3\alpha}l_\alpha^{-1}u^{*\prime\prime}_{3-\alpha,\alpha}(x),\quad n^*_{3-\alpha,\alpha}(x)=-g_{3\alpha}l_\alpha^{-2}u^{*\prime\prime\prime}_{3-\alpha,\alpha}(x)+r_{3\alpha}(x)$$

Подставляя первые три формулы (2.3) в геометрические условия сопряжения концов α-стержней с примыкающими к ним узлами решетки

$$u_{\alpha\alpha}(1)=\nabla^+_\alpha U_\alpha,\quad u_{3-\alpha,\alpha}(1)=\lambda^{2\alpha-3}\nabla^+_\alpha U_{3-\alpha},\quad \theta_{3\alpha}(1)=-(-1)^\alpha\nabla^+_\alpha\Theta_3 \tag{2.4}$$

и вводя обозначения

$$H_{3\alpha}=M_{3\alpha}+l_\alpha N_{3-\alpha,\alpha},\quad \Theta^*_{3\alpha}=\theta^*_{3\alpha}(1),\quad U^*_{\alpha\beta}=u^*_{\alpha\beta}(1)\;(\alpha,\;\beta=1,2) \tag{2.5}$$

приходим к взаимно обратным соотношениям

$$E_{\alpha\alpha}=g_{0\alpha}^{-1}N_{\alpha\alpha}+U^*_{\alpha\alpha},\quad E_{3-\alpha,\alpha}=-l_\alpha g_{3\alpha}^{-1}(\tfrac{1}{2}H_{3\alpha}-\tfrac{1}{3}l_\alpha N_{3-\alpha,\alpha})+U^*_{3-\alpha,\alpha} \tag{2.6}$$

$$K_{3\alpha}=(-1)^\alpha[l_\alpha g_{3\alpha}^{-1}(H_{3\alpha}-\tfrac{1}{2}l_\alpha N_{3-\alpha,\alpha})-\Theta^*_{3\alpha}]$$

$$N_{\alpha\alpha}=g_{0\alpha}(E_{\alpha\alpha}-U^*_{\alpha\alpha})$$

$$N_{3-\alpha,\alpha}=6g_{3\alpha}l_\alpha^{-2}[2E_{3-\alpha,\alpha}+(-1)^\alpha K_{3\alpha}-2U^*_{3-\alpha,\alpha}+\Theta^*_{3\alpha}] \tag{2.7}$$

$$H_{3\alpha}=2g_{3\alpha}l_\alpha^{-1}[3E_{3-\alpha,\alpha}+2(-1)^\alpha K_{3\alpha}-3U^*_{3-\alpha,\alpha}+2\Theta^*_{3\alpha}]$$

в которых выделены полные деформации α – стержня (см. (1.1)):

$$E_{\alpha\alpha}=\Delta^+_\alpha U_\alpha,\quad E_{3-\alpha,\alpha}=\lambda^{2\alpha-3}\Delta^+_\alpha U_{3-\alpha}+(-1)^\alpha\Theta_3,\quad K_{3\alpha}=\Delta^+_\alpha\Theta_3 \tag{2.8}$$

($E_{\alpha\alpha}$ – полное удлинение α-стержня, а $E_{3-\alpha,\alpha}$ и $K_{3\alpha}$ – взаимное поперечное смещение и взаимный поворот его начала и конца в плоскости решетки).

Уравнения равновесия сил в проекциях на оси x_α и моментов относительно оси x_3, действующих на текущий изолированный узел решетки

$$n_{\alpha\alpha}(0)-\nabla^-_\alpha n_{\alpha\alpha}(1)+n_{\alpha,3-\alpha}(0)-\nabla^-_{3-\alpha}n_{\alpha,3-\alpha}(1)+P_\alpha=0$$

$$m_{31}(0)-\nabla^-_1m_{31}(1)-m_{32}(0)+\nabla^-_2m_{32}(1)+M_3=0$$

с помощью соответствующих формул (1.1), (2.3), (2.5) преобразуются к виду

$$\Delta_\alpha^- N_{\alpha\alpha} + \Delta_{3-\alpha}^- N_{\alpha,3-\alpha} + P_\alpha^* = 0$$

$$\Delta_1^- H_{31} - l_1 N_{21} - \Delta_2^- H_{32} + l_2 N_{12} + M_3^* = 0 \tag{2.9}$$

где введены обусловленные внешними воздействиями величины

$$P_\alpha^* = P_\alpha - \nabla_\alpha^- n_{\alpha\alpha}^*(1) - \nabla_{3-\alpha}^- n_{\alpha,3-\alpha}^*(1), \quad M_3^* = M_3 - \nabla_1^- m_{31}^*(1) + \nabla_2^- m_{32}^*(1) \tag{2.10}$$

Заметим, что уравнения (2.9), относящиеся к граничным свободным узлам решетки ($m = 0, M$ и (или) $n = 0, N$), представляют статические граничные условия. Если же на эти узлы наложены внешние связи, предписывающие им смещения U_α^* и повороты Θ_3^*, то упомянутые уравнения следует заменить геометрическими граничными условиями

$$U_\alpha = U_\alpha^*, \quad \Theta_3 = \Theta_3^* \quad (m=0, \ M \text{ и (или) } n=0, \ N) \tag{2.11}$$

Итак, деформирование решетки в своей плоскости описано с точностью до $3(MN + M + N)$ узловых смещений U_α и поворотов Θ_3 (без двух смещений и одного поворота решетки в своей плоскости как жесткого целого) и $6MN + 3(M + N)$ начальных усилий $N_{\alpha\beta}$ и моментов $M_{3\alpha}$ (или $H_{3\alpha}$). Общее число искомых равно $9MN + 6(M + N)$. Для отыскания всех этих величин предназначены уравнения (2.6) (или (2.7)), (2.8), (2.9), которые в изучаемой теории играют роль соответственно физических, геометрических и статических зависимостей. Однако они не образуют полной совокупности определяющих соотношений теории.

В самом деле, число статических искомых превосходит число $3(MN + M + N)$ независимых уравнений равновесия в этих неизвестных на $3MN$ (в силу предполагаемого глобального равновесия свободной решетки общее число уравнений равновесия сокращено на 3). Это означает, что рассматриваемая задача $3MN$ раз статически неопределима, и должно существовать такое же количество уравнений совместности деформаций. Последние без труда устанавливаются путем исключения смещений U_α и поворотов Θ_3 из геометрических соотношений (2.8) и имеют вид

$$\lambda^{3-2\alpha}\Delta_{3-\alpha}^+ E_{\alpha\alpha} = \Delta_\alpha^+ E_{\alpha,3-\alpha} + (-1)^\alpha K_{3\alpha}, \quad \Delta_2^+ K_{31} = \Delta_1^+ K_{32} \tag{2.12}$$

$$(m=0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ M-1, \ n=0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ N-1)$$

Таким образом, в теории плоского деформирования решетки полную замкнутую систему определяющих соотношений образуют уравнения (2.6) (или (2.7)), (2.8), (2.9), (2.12). В них без труда усматривается дискретная аналогия с соответствующими уравнениями плоской задачи моментной теории упругости [3].

Обратимся к альтернативным постановкам задач теории плоского деформирования решетки.

Примем сначала за основные (определяемые в первую очередь) неизвестные узловые смещения U_α и повороты Θ_3. Исключая из уравнений (2.7) с помощью зависимостей (2.8) полные деформации α-стержней и подставляя полученный результат в уравнения (2.9) (см. (1.2)), приходим к системе разрешающих уравнений в частных разностях

$$(g_\alpha\Delta_\alpha^2 + 12\lambda^{3-2\alpha}\Delta_{3-\alpha}^2)U_\alpha - 6(-1)^\alpha(\Delta_{3-\alpha}^+ + \Delta_{3-\alpha}^-)\Theta_3 + F_\alpha = 0$$

$$6\lambda g(\Delta_2^+ + \Delta_2^-)U_1 - 6\lambda^{-1}(\Delta_1^+ + \Delta_1^-)U_2 + 2[\Delta_1^2 + 6 + g(\Delta_2^2 + 6)]\Theta_3 + G_3 = 0$$

$$(m=1, \ 2, \ \ldots, \ M-1; \ n=1, \ 2, \ \ldots, \ N-1)$$

$$g_\alpha = g_{0\alpha} l_{3-\alpha}^2 g_{3,3-\alpha}^{-1}, \quad g = \lambda g_{32} g_{31}^{-1}$$

$$F_\alpha = l_{3-\alpha}^2 g_{3,3-\alpha}^{-1} P_\alpha^* - g_\alpha \Delta_\alpha^- U_{\alpha\alpha}^* - 6\Delta_{3-\alpha}^- (2U_{\alpha,3-\alpha}^* - \Theta_{3,3-\alpha}^*)$$

$$G_3 = l_1 g_{31}^{-1} M_3^* + 6(1+\nabla_1^-) U_{21}^* - 2(1+2\nabla_1^-)\Theta_{31}^* - g[6(1+\nabla_2^-) U_{12}^* - 2(1+2\nabla_2^-)\Theta_{32}^*]$$

Произволы общего решения этой системы исключаются либо с помощью геометрических граничных условий, представленных выше равенствами (2.11), либо посредством статических граничных условий. Последние выводятся по только что указанной схеме из уравнений равновесия (2.9) граничных узлов ($m = 0, M$ и (или) $n = 0, N$), в которых предварительно следует опустить все величины, относящиеся к несуществующим элементам решетки.

Выберем теперь за основные неизвестные начальные усилия $N_{\alpha\beta}$ и моменты $H_{3\alpha}$. Для нахождения этих величин служат, прежде всего, уравнениями равновесия узлов (2.9). Пусть $N_{\alpha\beta}^*$, $H_{3\alpha}^*$ – какое-либо их частное решение. Чтобы найти его, достаточно воспользоваться одной из основных систем метода сил или эвристическими соображениями. Тогда, как нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, общее решение уравнений равновесия (2.9) представимо через три силовые функции $\varphi_k[m, n]$ ($k = 1, 2, 3$) в следующем виде:

$$N_{\alpha\alpha} = l_{3-\alpha}^{-1} \Delta_{3-\alpha}^- \varphi_\alpha + N_{\alpha\alpha}^*, \quad N_{\alpha,3-\alpha} = -l_{3-\alpha}^{-1} \Delta_\alpha^- \varphi_\alpha + N_{\alpha,3-\alpha}^*$$

$$H_{3\alpha} = \Delta_{3-\alpha}^- \varphi_3 + \varphi_\alpha + H_{3\alpha}^* \tag{2.13}$$

Эти функции являются дискретными аналогами функций напряжения и находятся из системы уравнений в частных разностях

$$(\tfrac{1}{3}\Delta_\alpha^2 + \varkappa_\alpha \Delta_{3-\alpha}^2 - g^{3-2\alpha})\varphi_\alpha + \tfrac{1}{2}(\Delta_\alpha^+ - g^{3-2\alpha}\Delta_{3-\alpha}^-)\varphi_{3-\alpha} + (\tfrac{1}{2}\Delta_\alpha^2 - g^{3-2\alpha}\Delta_{3-\alpha}^-)\varphi_3 = N_\alpha$$

$$(\tfrac{1}{2}\Delta_1^2 + g\Delta_2^+)\varphi_1 + (\tfrac{1}{2}g\Delta_2^2 + \Delta_1^+)\varphi_2 + (\Delta_1^2 + g\Delta_2^2)\varphi_3 = H_3$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots, M-1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1) \tag{2.14}$$

в которую переходят уравнения совместности деформаций (2.12) после исключения из них с помощью соотношений (2.6) полных деформаций (2.8) и подстановки вместо усилий $N_{\alpha\beta}$ и моментов $H_{3\alpha}$ соответствующих выражений (2.13). В системе (2.14):

$$N_\alpha = g_{3,3-\alpha} l_{3-\alpha}^{-1} [\Delta_\alpha^+ E_{\alpha,3-\alpha}^* - \lambda^{3-2\alpha} \Delta_{3-\alpha}^+ E_{\alpha\alpha}^* + (-1)^\alpha K_{3\alpha}^*]$$

$$H_3 = g_{32} l_2^{-1} (\Delta_2^+ K_{31}^* - \Delta_1^+ K_{32}^*), \quad \varkappa_\alpha = \lambda^{3-2\alpha} g_\alpha^{-1} \tag{2.15}$$

где под величинами $E_{\alpha\beta}^*$, $K_{3\alpha}^*$ понимаются правые части формул (2.6) для сходных с ними по обозначению деформаций после замены в них $N_{\alpha\beta}, H_{3\alpha}$ на $N_{\alpha\beta}^*$, $H_{3\alpha}^*$ соответственно.

Заметим, что анализ статических граничных условий с помощью представлений (2.13) показывает, что силовые функции должны удовлетворять равенствам

$$\varphi_k = 0 \;\; (m = -1, \; M \text{ и (или) } n = -1, \; N; \; k = 1, 2, 3) \tag{2.16}$$

играющим роль краевых условий для системы (2.14) и свидетельствующим о том, что ее порядок, как алгебраической системы линейных уравнений, совпадает с числом нетривиальных, вообще говоря, значений функций φ_k.

3. Теория изгиба решетки. Эта теория строится аналогичным образом. Так общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&m'_{\alpha\alpha}(x)+l_\alpha r_{\alpha\alpha}(x)=0, \quad m_{\alpha\alpha}(x)=g_{\alpha\alpha}l_\alpha^{-1}\theta'_{\alpha\alpha}(x)\\
&n'_{3\alpha}(x)+l_\alpha p_{3\alpha}(x)=0, \quad m_{3-\alpha,\alpha}(x)=-g_{3-\alpha,\alpha}l_\alpha^{-1}u''_{3\alpha}(x)\\
&n_{3\alpha}(x)=l_\alpha^{-1}m'_{3-\alpha,\alpha}(x)+r_{3-\alpha,\alpha}(x), \quad \theta_{3-\alpha,\alpha}(x)=u'_{3\alpha}(x)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

описывающих кручение и изгиб из плоскости решетки изолированных α-стержней, с учетом геометрических условий сопряжения их начал с соседними узлами решетки

$$\theta_{\alpha\alpha}(0)=\Theta_\alpha, \quad \theta_{3-\alpha,\alpha}(0)=\Theta_{3-\alpha}, \quad u_{3\alpha}(0)=\lambda^{\alpha-1}U_3 \tag{3.2}$$

дается формулами

$$\begin{aligned}
&\theta_{\alpha\alpha}(x)=\Theta_\alpha+l_\alpha g_{\alpha\alpha}^{-1}M_{\alpha\alpha}x+\overset{*}{\theta}_{\alpha\alpha}(x), \quad m_{\alpha\alpha}(x)=M_{\alpha\alpha}+\overset{*}{m}_{\alpha\alpha}(x)\\
&u_{3\alpha}(x)=\lambda^{\alpha-1}U_3+\Theta_{3-\alpha}x-\tfrac{1}{6}x^2l_\alpha g_{3-\alpha,\alpha}^{-1}(3M_{3-\alpha,\alpha}+l_\alpha N_{3\alpha}x)+\overset{*}{u}_{3\alpha}(x)\\
&\theta_{3-\alpha,\alpha}(x)=\Theta_{3-\alpha}-\tfrac{1}{2}xl_\alpha g_{3-\alpha,\alpha}^{-1}(2M_{3-\alpha,\alpha}+l_\alpha N_{3\alpha}x)+\overset{*}{\theta}_{3-\alpha,\alpha}(x)\\
&m_{3-\alpha,\alpha}(x)=M_{3-\alpha,\alpha}+l_\alpha N_{3\alpha}x+\overset{*}{m}_{3-\alpha,\alpha}(x), \quad n_{3\alpha}(x)=N_{3\alpha}+\overset{*}{n}_{3\alpha}(x)\\
&\overset{*}{\theta}_{\alpha\alpha}(x)=-l_\alpha^2g_{\alpha\alpha}^{-1}\int_0^x(x-\tau)r_{\alpha\alpha}(\tau)d\tau, \quad \overset{*}{m}_{\alpha\alpha}(x)=g_{\alpha\alpha}l_\alpha^{-1}\theta'_{\alpha\alpha}(x)\\
&\overset{*}{u}_{3\alpha}(x)=\tfrac{1}{6}l_\alpha^2g_{3-\alpha,\alpha}^{-1}\int_0^x(x-\tau)^3[l_\alpha p_{3\alpha}(\tau)+r'_{3-\alpha,\alpha}(\tau)]d\tau\\
&\overset{*}{\theta}_{3-\alpha,\alpha}(x)=\overset{*}{u}{}'_{3\alpha}(x), \quad \overset{*}{m}_{3-\alpha,\alpha}(x)=-g_{3-\alpha,\alpha}l_\alpha^{-1}\overset{*}{u}{}''_{3\alpha}(x)\\
&\overset{*}{n}_{3\alpha}(x)=-g_{3-\alpha,\alpha}l_\alpha^{-2}\overset{*}{u}{}'''_{3\alpha}(x)+r_{3-\alpha,\alpha}(x)\\
&M_{\alpha\beta}=m_{\alpha\beta}(0), \quad N_{3\alpha}=n_{3\alpha}(0)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

С их помощью из геометрических условий сопряжения концов α-стержней со смежными узлами решетки

$$\theta_{\alpha\alpha}(1)=\nabla_\alpha^+\Theta_\alpha, \quad \theta_{3-\alpha,\alpha}(1)=\nabla_\alpha^+\Theta_{3-\alpha}, \quad u_{3\alpha}(1)=\lambda^{\alpha-1}\nabla_\alpha^+U_3 \tag{3.4}$$

без труда устанавливаются физические соотношения в прямой и обратной форме

$$\begin{aligned}
&K_{\alpha\alpha}=l_\alpha g_{\alpha\alpha}^{-1}H_{\alpha\alpha}+\overset{*}{\Theta}_{\alpha\alpha}\\
&K_{3-\alpha,\alpha}=-l_\alpha g_{3-\alpha,\alpha}^{-1}(H_{3-\alpha,\alpha}-\tfrac{1}{2}l_\alpha N_{3\alpha})+\overset{*}{\Theta}_{3-\alpha,\alpha}\\
&E_{3\alpha}=-l_\alpha g_{3-\alpha,\alpha}^{-1}(\tfrac{1}{2}H_{3-\alpha,\alpha}-\tfrac{1}{3}l_\alpha N_{3\alpha})+\overset{*}{U}_{3\alpha}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
&H_{\alpha\alpha}=g_{\alpha\alpha}l_\alpha^{-1}(K_{\alpha\alpha}-\overset{*}{\Theta}_{\alpha\alpha})\\
&H_{3-\alpha,\alpha}=2g_{3-\alpha,\alpha}l_\alpha^{-1}(3E_{3\alpha}-2K_{3-\alpha,\alpha}-3\overset{*}{U}_{3\alpha}+2\overset{*}{\Theta}_{3-\alpha,\alpha})\\
&N_{3\alpha}=6g_{3-\alpha,\alpha}l_\alpha^{-2}(2E_{3\alpha}-K_{3-\alpha,\alpha}-2\overset{*}{U}_{3\alpha}+\overset{*}{\Theta}_{3-\alpha,\alpha})
\end{aligned} \tag{3.6}$$

В них выделены полные деформации α-стержня

$$K_{\alpha\alpha}=\Delta_\alpha^+\Theta_\alpha, \quad K_{3-\alpha,\alpha}=\Delta_\alpha^+\Theta_{3-\alpha}, \quad E_{3\alpha}=\lambda^{\alpha-1}\Delta_\alpha^+U_3-\Theta_{3-\alpha} \tag{3.7}$$

($K_{\alpha\alpha}$, $K_{3-\alpha,\alpha}$ – взаимные повороты относительно осей x_α, $x_{3-\alpha}$, а $E_{3\alpha}$ – взаимные поперечные смещения из плоскости решетки начала и конца α-стержня) и введены обозначения

$$H_{\alpha\alpha} = M_{\alpha\alpha}, \quad H_{3-\alpha,\alpha} = M_{3-\alpha,\alpha} + l_a N_{3\alpha}$$

$$\Theta^*_{\alpha\beta} = \theta^*_{\alpha\beta}(1), \quad U^*_{3\alpha} = u^*_{3\alpha}(1) \ (\alpha, \ \beta = 1, 2)$$

Уравнения равновесия моментов относительно осей x_α и сил в проекциях на ось x_3, действующих на текущий изолированный узел решетки, имеют вид

$$\Delta^-_\alpha H_{\alpha\alpha} - \Delta^-_{3-\alpha} H_{\alpha,3-\alpha} + l_{3-\alpha} N_{3,3-\alpha} + M^*_\alpha = 0$$

$$\Delta^-_1 N_{31} + \Delta^-_2 N_{32} + P^*_3 = 0 \tag{3.8}$$

где внешние силы представлены величинами

$$M^*_\alpha = M_\alpha - \nabla^-_\alpha m^*_{\alpha\alpha}(1) + \nabla^-_{3-\alpha} m^*_{a,3-\alpha}(1), \quad P^*_3 = P_3 - \nabla^-_1 n^*_{31}(1) - \nabla^-_2 n^*_{32}(1)$$

И здесь уравнения (3.8), относящиеся к граничным свободным узлам решетки ($m = 0, M$ и (или) $n = 0, N$), представляют статические граничные условия. В тех случаях, когда на эти узлы наложены внешние связи, предписывающие им повороты Θ^*_α и смещения U^*_3, то упомянутые уравнения следует заменить геометрическими граничными условиями

$$\Theta_\alpha = \Theta^*_\alpha, \quad U_3 = U^*_3 \ (m = 0, \ M \ \text{и (или)} \ n = 0, \ N) \tag{3.9}$$

Деформирование решетки из своей плоскости определено с точностью до $3(MN + M + N)$ узловых поворотов Θ_α и поперечных смещений U_3 (без поперечного смещения и поворотов решетки из ее плоскости как жесткого целого) и $6MN + 3(M + N)$ начальных усилий $N_{3\alpha}$ и моментов $M_{\alpha\beta}$ (или $H_{\alpha\beta}$). Для нахождения всех этих величин служат уравнения (3.5) (или (3.6)), (3.7), (3.8), которые, однако, еще не образуют полной системы определяющих соотношений изучаемой теории изгиба решетки. Объясняется это тем, что из-за превышения числом статических искомых числа $3(MN + M + N)$ независимых уравнений равновесия узлов (3.8) (без трех уравнений предполагаемого глобального равновесия свободной решетки) на $3MN$ рассматриваемая задача статически неопределима столько же раз. Недостающие уравнения совместности деформаций в нужном количестве, получаемые в результате исключения узловых поворотов Θ_α и смещений U_3 из геометрических соотношений (3.7), имеют вид

$$\Delta^+_{3-\alpha} K_{\alpha\alpha} = \Delta^+_\alpha K_{\alpha,3-\alpha}, \quad \lambda(\Delta^+_2 E_{31} + K_{22}) = \Delta^+_1 E_{32} + K_{11}$$

$$(m = 0, \ 1, \ 2, \ \dots, \ M-1, \ n = 0, \ 1, \ 2, \ \dots, \ N-1) \tag{3.10}$$

Вместе с уравнениями (3.5)–(3.8) они образуют уже полную замкнутую систему определяющих соотношений обсуждаемой теории, в рамках которых допустимы альтернативные постановки задач.

Так если за основные неизвестные принять величины Θ_α, U_3, то предназначенные для их отыскания разрешающие уравнения, выводимые путем подстановки выражений (3.7) в соотношения (3.6), а полученного результата в равенства (3.8), имеют вид

$$[\gamma_\alpha \Delta^2_\alpha - 2(\Delta^2_{3-\alpha} + 6)]\Theta_\alpha + 6\lambda^{2-\alpha}(\Delta^+_{3-\alpha} + \Delta^-_{3-\alpha})U_3 + G_\alpha = 0$$

$$-6\gamma(\Delta^+_2 + \Delta^-_2)\Theta_1 - 6(\Delta^+_1 + \Delta^-_1)\Theta_2 + 12(\Delta^2_1 + \lambda\gamma\Delta^2_2)U_3 + F_3 = 0$$

$$(m = 1, \ 2, \ \dots, \ M-1; \ n = 1, \ 2, \ \dots, \ N-1)$$

$$\gamma_\alpha = g_{\alpha\alpha} l_{3-\alpha} (g_{\alpha,3-\alpha} l_\alpha)^{-1}, \quad \gamma = \lambda^2 g_{12} g_{21}^{-1}$$

$$G_\alpha = l_{3-\alpha} g_{\alpha,3-\alpha}^{-1} M_\alpha^* - \gamma_\alpha \Delta_\alpha^- \Theta_{\alpha\alpha}^* - 6(1+\nabla_{3-\alpha}^-) U_{3,3-\alpha}^* + 2(1+2\nabla_{3-\alpha}^-)\Theta_{\alpha,3-\alpha}^*$$

$$F_3 = l_1^2 g_{21}^{-1} P_3^* - 6\Delta_1^-(2U_{31}^* - \Theta_{21}^*) - 6\gamma\Delta_2^-(2U_{32}^* - \Theta_{12}^*)$$

Статические граничные условия в искомых Θ_α, U_3 устанавливаются по той же схеме из уравнений равновесия (3.9) граничных узлов ($m = 0, M$ и (или) $n = 0, N$), в которых предварительно надлежит опустить величины, относящиеся к несуществующим элементам решетки. Что касается геометрических граничных условий, то они были представлены ранее равенствами (3.9).

Если же за основные неизвестные принять усилия $N_{3\alpha}$ и моменты $H_{\alpha\beta}$, то роль системы разрешающих уравнений будут играть уравнения равновесия (3.8) и уравнения совместности деформаций (3.10), выраженные через эти неизвестные путем подстановки в них зависимостей (3.5). Общее решение уравнений равновесия представимо через три силовые функции $\psi_k[m, n]$ в виде

$$\begin{aligned} &H_{\alpha\alpha} = \Delta_{3-\alpha}^- \psi_\alpha - (-\lambda)^{\alpha-1}\psi_3 + H_{\alpha\alpha}^* \\ &H_{\alpha,3-\alpha} = \Delta_\alpha^- \psi_\alpha + H_{\alpha,3-\alpha}^*, \quad l_\alpha N_{3\alpha} = (-\lambda)^{2-\alpha}\Delta_{3-\alpha}^- \psi_3 + l_\alpha N_{3\alpha}^* \end{aligned} \tag{3.11}$$

где $H_{\alpha\beta}^*$, $N_{3\alpha}^*$ – какое-то частное решение этих уравнений. Для нахождения последнего необходимо воспользоваться либо какой-нибудь основной системой метода сил, либо эвристическими соображениями. Подстановка формул (3.11) в уравнения совместности деформаций, выраженные через $H_{\alpha\beta}$ и $N_{3\alpha}$, приводит к системе уравнений в частных разностях

$$\begin{aligned} &(\Delta_\alpha^2 + \delta_\alpha \Delta_{3-\alpha}^2)\psi_\alpha - (-\lambda)^{\alpha-1}(\tfrac{1}{2}\Delta_\alpha^2 + \delta_\alpha \Delta_{3-\alpha}^+)\psi_3 = H_\alpha \\ &(\tfrac{1}{2}\Delta_1^2 - \delta_1\Delta_2^-)\psi_1 - \gamma(\tfrac{1}{2}\Delta_2^2 - \delta_2\Delta_1^-)\psi_2 + [\delta_1 + \lambda\gamma\delta_2 - \tfrac{1}{3}(\Delta_1^2 + \lambda\gamma\Delta_2^2)]\psi_3 = N_3 \\ &(m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M-1;\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1) \end{aligned} \tag{3.12}$$

служащей для отыскания силовых функций ψ_k, в которой

$$H_\alpha = g_{\alpha,3-\alpha} l_{3-\alpha}^{-1} (\Delta_\alpha^+ K_{\alpha,3-\alpha}^* - \Delta_{3-\alpha}^+ K_{\alpha\alpha}^*), \quad \delta_\alpha = \gamma_\alpha^{-1}$$

$$N_3 = g_{12} l_2^{-1} [\Delta_1^+ E_{32}^* + K_{11}^* - \lambda(\Delta_2^+ E_{31}^* + K_{22}^*)]$$

а $K_{\alpha\beta}^*$, $E_{3\alpha}^*$ – правые части формул (3.5) для сходных с ними по обозначению деформаций после замены в них $H_{\alpha\beta}, N_{3\alpha}$ на $H_{\alpha\beta}^*$, $N_{3\alpha}^*$ соответственно.

Анализ статических граничных условий с помощью формул (3.11) показывает, что для свободной решетки имеют место равенства

$$\psi_k = 0 \ \ (m = -1,\ M \text{ и (или) } n = -1,\ N;\ k = 1,\ 2,\ 3)$$

Для системы (3.12) они играют роль краевых условий и свидетельствуют о том, что ее порядок, как алгебраической системы линейных уравнений, совпадает с числом нетривиальных, вообще говоря, значений функций ψ_k.

4. Возможные обобщения теории. Изложенная выше теория допускает обобщения в различных направлениях. Остановимся на принципиальной стороне некоторых из них.

Первое обобщение свяжем с искусственным введением несовместимостей смещений и поворотов смежных элементов решетки в местах их сочленения. Пусть $d_{k\alpha}^{(s)}$ и $\vartheta_{k\alpha}^{(s)}$ ($s = 0, 1;\ k = 1, 2, 3$) – взаимные смещения и повороты соответственно вдоль и вокруг оси x_k начал ($s = 0$) и концов ($s = 1$) α-стержней с примыкающими к ним узлами решетки. Если геометрические условия сопряжения (2.2), (2.4), (3.2), (3.4) заменить равенствами

$$u_{\alpha\alpha}(0)=U_\alpha+d_{\alpha\alpha}^{(0)},\ u_{3-\alpha,\alpha}(0)=\lambda^{2\alpha-3}U_{3-\alpha}+d_{3-\alpha,\alpha}^{(0)},\ \theta_{3\alpha}(0)=-(-1)^\alpha\Theta_3+\vartheta_{3\alpha}^{(0)} \tag{4.1}$$

$$u_{\alpha\alpha}(1)=\nabla_\alpha^+U_\alpha-d_{\alpha\alpha}^{(1)},\ u_{3-\alpha,\alpha}(1)=\lambda^{2\alpha-3}\nabla_\alpha^+U_{3-\alpha}-d_{3-\alpha,\alpha}^{(1)},\ \theta_{3\alpha}(1)=-(-1)^\alpha\nabla_\alpha^+\Theta_3-\vartheta_{3\alpha}^{(1)}$$

$$\theta_{\alpha\alpha}(0)=\Theta_\alpha+\vartheta_{\alpha\alpha}^{(0)},\ \theta_{3-\alpha,\alpha}(0)=\Theta_{3-\alpha}+\vartheta_{3-\alpha,\alpha}^{(0)},\ u_{3\alpha}(0)=\lambda^{\alpha-1}U_3+d_{3\alpha}^{(0)} \tag{4.2}$$

$$\theta_{\alpha\alpha}(1)=\nabla_\alpha^+\Theta_\alpha-\vartheta_{\alpha\alpha}^{(1)},\ \theta_{3-\alpha,\alpha}(1)=\nabla_\alpha^+\Theta_{3-\alpha}-\vartheta_{3-\alpha,\alpha}^{(1)},\ u_{3\alpha}(1)=\lambda^{\alpha-1}\nabla_\alpha^+U_3-d_{3\alpha}^{(1)}$$

то претерпят изменения первые три формулы (2.3) и (3.3), где теперь вместо U_k и Θ_k следует ввести соответствующие правые части равенств (4.1) и (4.2) и измениться смысл величин $U_{k\alpha}^*$, $\Theta_{k\alpha}^*$, которые оказываются равными

$$U_{\alpha\alpha}^*=u_{\alpha\alpha}^*(1)+d_{\alpha\alpha},\ U_{3-\alpha,\alpha}^*=u_{3-\alpha,\alpha}^*(1)+d_{3-\alpha,\alpha}+\vartheta_{3\alpha}^{(0)},\ d_{k\alpha}=d_{k\alpha}^{(0)}+d_{k\alpha}^{(1)}$$

$$U_{3\alpha}^*=u_{3\alpha}^*(1)+d_{3\alpha}+\vartheta_{3-\alpha,\alpha}^{(0)},\ \Theta_{k\alpha}^*=\theta_{k\alpha}^*(1)+\vartheta_{k\alpha},\ \vartheta_{k\alpha}=\vartheta_{k\alpha}^{(0)}+\vartheta_{k\alpha}^{(1)}$$

Введение через них в определяющие соотношения несовместностей в явном виде дает возможность влиять непосредственно на характер взаимодействия элементов решетки и тем самым существенным образом расширить круг задач, которые могут быть изучены как в рамках построенных выше теорий, так и рассматриваемых ниже их обобщений. Если, например, потребовать, чтобы все несовместности, исключая величины $\vartheta_{3\alpha}^{(0)}$ и $\nabla_\alpha^-\vartheta_{3\alpha}^{(1)}$, отвечающие некоторым фиксированным значениям m, n, равнялись нулю вместе с $M_3, M_{3\alpha}$ и $\nabla_\alpha^- m_{3\alpha}$ (1) при тех же фиксированных m, n, то в итоге придем к задаче о решетке с шарнирным в ее плоскости соединением α-стержней в выделенном фиксированными значениями m, n узле. Очевидные рассуждения указывают на способ полного нарушения связей (повреждения) отдельных элементов решетки. Необходимо лишь следить за тем, чтобы вводимые повреждения и взаимные подвижности соседних элементов решетки в местах их сочленения не влекли за собой ее геометрическую изменяемость.

Не касаясь деталей, заметим, что путем соответствующей регламентации несовместностей можно учесть самые разнообразные эффекты. Среди них выделим упругий или иной разрывный в отношении обобщенных смещений характер взаимодействия элементов решетки, повреждения α-стержней, нагрев и (или) начальную напряженность или деформированность всех или отдельных α-стержней, а также сводящиеся к ним технологические несовершенства, и, наконец, несоосность и (или) некомпланарность упругих линий α-стержней. В последнем случае рассмотренные выше отдельно задачи о плоском деформировании и поперечном изгибе решетки окажутся связанными. Другой причиной связанности этих задач может явиться и допустимый отказ от принятого выше соглашения относительно ориентации главных центральных осей поперечных сечений α-стержней.

Следующее обобщение свяжем с распространением построенной теории на задачи динамики. Наиболее простой, хотя и приближенный, способ получения уравнений движения дает метод сосредоточенных масс. В соответствии с этим методом и принципом Даламбера в уравнения равновесия узлов (2.9), (3.8) следует ввести дополнительно инерционные члены вида $-M^*\ddot{U}_k$ и $-I_k^*\ddot{\Theta}_k$ (точки сверху указывают на дифференцирование по времени). Здесь M^* и I_k^* – приведенные к узлам массы и массовые моменты инерции относительно осей x_k, значения которых зависят от схемы дискретизации распределенных инерционных характеристик α-стержней и собственных масс узлов, если таковые имеются в наличии. Первые инерционные члены вносятся в силовые, а вторые – в моментные уравнения равновесия. Строгий учет инерционных свойств решетки требует поэлементного динамического анализа. Для этого, руководствуясь принципом Даламбера, нужно ввести учитываемые, уже как распределенные, инерционные силы изолированных α-стержней в уравнения их равновесия, содержащихся в системах (2.1), (3.1), и скорректировать соответствующим образом уравнения равновесия узлов (2.9), (3.8).

Отметим, наконец, что обобщение обсуждаемых теоретических результатов на случай дискретной геометрической и физической неоднородности решетки, когда величины l_α и $g_{k\alpha}$ являются функциями m, n, сводится, по существу, к учету некоммутативности перечисленных параметров и разностных операторов.

5. Некоторые аналитические результаты. Как было показано выше, анализ деформирования решетки приводит к дискретной краевой задаче, описываемой системой уравнений в частных разностях, при решении которой в большинстве случаев приходится рассчитывать на численные методы.

Проиллюстрируем возможность построения точных аналитических решений на примере задачи о плоском деформировании свободной решетки без внутренних узлов ($N = 1$), полагая, что она нагружена в своей плоскости произвольной самоуравновешенной системой внешних сил и моментов. Ограничимся при этом постановкой задачи во внутренних силовых факторах.

Нетрудно понять, что в этом случае $\varphi_k = \varphi_k[m] = \varphi_k[m,\ 0]$, так что дискретная краевая задача (2.14), (2.16) в частных разностях вырождается в обыкновенную краевую задачу

$$\left(\frac{1}{3}\Delta_1^2 - 2\varkappa_1 - g\right)\varphi_1[m] + \frac{\Delta_1^+ - g}{2}\varphi_2[m] + \frac{\Delta_1^2 - 2g}{2}\varphi_3[m] = n_1[m]$$

$$-\frac{\Delta_1^- + g}{g\varkappa_2}\left(\frac{1}{2}\varphi_1[m] + \varphi_3[m]\right) + \left(\Delta_1^2 - \frac{2g+3}{3g\varkappa_2}\right)\varphi_2[m] = \frac{n_2[m]}{\varkappa_2} \tag{5.1}$$

$$(\Delta_1^2 - 2g)\,(\tfrac{1}{2}\varphi_1[m] + \varphi_3[m]) + (\Delta_1^+ - g)\varphi_2[m] = h_3[m] \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M-1)$$

$$n_\alpha[m] = N_\alpha[m,\ 0],\quad h_3[m] = H_3[m,\ 0] \tag{5.2}$$

$$\varphi_k[-1] = \varphi_k[M] = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ 3)$$

решение которой, как можно показать [4], дается формулами

$$\varphi_1[m] = \varphi_1^*[m] - \frac{u_m^{(1)}}{u_M^{(1)}}\varphi_1^*[M],\quad \varphi_1^*[m] = 6\sum_{j=0}^{m-1} u_{m-j-1}^{(1)}(2n_1[j] - h_3[j])$$

$$\varphi_2[m] = \varphi_2^*[m] - \frac{\alpha[m,\ M]}{\alpha[M,\ M]}\varphi_2^*[M] + \frac{\alpha_1[m,\ M]}{\alpha[M,\ M]}\varphi_3^*[M] \tag{5.3}$$

$$\varphi_3[m] = -\frac{1}{2}\varphi_1[m] + \varphi_3^*[m] + \frac{\alpha_2[M,\ m]}{\alpha[M,\ M]}\varphi_2^*[M] - \frac{\alpha[M,\ m]}{\alpha[M,\ M]}\varphi_3^*[M]$$

$$\varphi_2^*[m] = \sum_{j=0}^{m-1}(\varkappa_2^{-1}\sigma_1[m-j-1]n_2[j] + \sigma^-[m-j-1]h_3[j])$$

$$\varphi_3^*[m] = \sum_{j=0}^{m-1}(-\varkappa_2^{-1}\sigma^+[m-j-1]n_2[j] + \sigma_2[m-j-1]h_3[j])$$

Здесь сумма, как обычно, считается равной нулю, если ее верхний предел меньше нижнего, и, кроме того, введены обозначения

$$\alpha[i,\ j] = \sigma_1[i]\sigma_2[j] + \sigma^+[j]\sigma^-[i],\quad \alpha_1[i,\ j] = \sigma_1[i]\sigma^-[j] - \sigma_1[j]\sigma^-[i]$$

$$\alpha_2[i,\ j] = \sigma_2[i]\sigma^+[j] - \sigma_2[j]\sigma^+[i]$$

$$\sigma_1[m]=(\Delta_1^2-2g)\sigma[m+1]=\sigma[m+2]-2(g+1)\sigma[m+1]+\sigma[m]$$

$$\sigma_2[m]=\left(\Delta_1^2-\frac{2g+3}{3g\varkappa_2}\right)\sigma[m+1]=\sigma[m+2]-\left(2+\frac{2g+3}{3g\varkappa_2}\right)\sigma[m+1]+\sigma[m]$$

$$\sigma^+[m]=(\Delta_1^+-g)\sigma[m+1]=\sigma[m+2]-(g+1)\sigma[m+1]$$

$$\sigma^-[m]=(g\varkappa_2)^{-1}(\Delta_1^-+g)\sigma[m+1]=(g\varkappa_2)^{-1}[(g+1)\sigma[m+1]-\sigma[m]]$$

$$\sigma[\pm m]=\pm\frac{u_{m-1}^{(2)}-u_{m-1}^{(3)}}{2(\eta_2-\eta_3)},\quad u_m^{(k)}=u_m(\eta_k)\ (k=1,\ 2,\ 3)$$

$$u_{-1}(\eta)=0,\quad u_0(\eta)=1,\quad u_{m+1}(\eta)=2\eta u_m(\eta)-u_{m-1}(\eta)$$

$$\sigma[0]=\sigma[\pm 1]=0,\quad \sigma[\pm 2]=\pm 1,\quad \sigma[\pm 3]=\pm 2(\eta_2+\eta_3)$$

$$\sigma[m+2]+\sigma[m-2]-\sigma[3](\sigma[m+1]+\sigma[m-1])+(2+4\eta_2\eta_3)\sigma[m]=0$$

$$\eta_1=12\varkappa_1+3g+1,\quad \eta_q=1+\frac{1}{2}\left(g-\frac{1}{6\varkappa_2}\right)+\frac{(-1)^q}{2}\left[\left(g-\frac{1}{6\varkappa_2}\right)^2-\frac{g+6}{3\varkappa_2}\right]^{1/2}$$

где $q=2, 3$, а $u_m(\eta)$ – многочлен Чебышева 2-го рода степени m. Начальные внутренние силовые факторы подсчитываются теперь по формулам (см. (2.13), (2.16); δ_{mn} – символ Кронекера):

$$\begin{aligned}
&N_{\alpha 1}[m,\ n]=-l_{3-\alpha}^{-1}(-1)^{n+\alpha}\varphi_\alpha[m]+N_{\alpha 1}^*[m,\ n]\\
&N_{\alpha 2}[m,\ 0]=l_{3-\alpha}^{-1}(-1)^{\alpha}\Delta_1^-\varphi_\alpha[m]+N_{\alpha 2}^*[m,\ 0]\\
&H_{31}[m,\ n]=(-1)^n\varphi_3[m]+\delta_{n0}\varphi_1[m]+H_{31}^*[m,\ n]\ (n=0,\ 1)\\
&H_{32}[m,\ 0]=\Delta_1^-\varphi_3[m]+\varphi_2[m]+H_{32}^*[m,\ n]
\end{aligned}\tag{5.4}$$

При $M=1$ рассматриваемая упругая система вырождается в прямоугольную раму, и, как показывают вычисления (см. (5.3) и далее), каждая силовая функция имеет только одно нетривиальное значение, а именно

$$\varphi_1[0]=3\frac{H_3[0,\ 0]-2N_1[0,\ 0]}{12\varkappa_1+3g+1},\quad \varphi_2[0]=3\frac{H_3[0,\ 0]-2gN_2[0,\ 0]}{12g\varkappa_2+3+g}$$

$$\varphi_3[0]=-\frac{1}{2}\left(\frac{H_3[0,\ 0]}{g+1}+\varphi_1[0]+\varphi_2[0]\right)\tag{5.5}$$

Этот результат без труда получается при $M=1$ и непосредственно из краевой задачи (5.1), (5.2). В частности, если внешние воздействия на раму представлены единичными узловыми силами ($P_1=p_{\alpha\beta}=r_{3\alpha}\equiv 0$, $P_2=\delta_{m0}(\delta_{n0}-\delta_{n1})$), сжимающими ее левый 2-стержень, то (см. (2.1), (2.5), (2.15), (5.1), (5.4), (5.5)):

$$U_{\alpha\beta}^*=\Theta_{3\alpha}^*=N_{11}^*=N_{3-\alpha,\alpha}^*=H_{3\alpha}^*=M_{3\alpha}^*\equiv 0,\quad N_{22}^*=-\delta_{m0}$$

$$E_{11}^*=E_{3-\alpha,\alpha}^*=K_{3\alpha}^*\equiv 0,\quad E_{22}^*=-g_{02}^{-1}\delta_{m0},\quad N_1[0,\ 0]=H_3[0,\ 0]=0,\quad N_2[0,\ 0]=-l_1\varkappa_2$$

$$\varphi_1[0,\ 0]=0,\quad \varphi_2[0,\ 0]=2l_1\eta,\quad \varphi_3[0,\ 0]=-l_1\eta,\quad \eta=3g\varkappa_2(12g\varkappa_2+3+g)^{-1}$$

$$N_{11}[0,\ n]=0,\quad N_{21}[0,\ n]=-2(-1)^n\eta,\quad M_{31}[0,\ n]=H_{31}[0,\ n]=(-1)^n l_1\eta\ (n=0,\ 1)$$

$$N_{22}[m,\ 0]=2(-1)^m\eta-\delta_{m0},\quad N_{12}[m,\ 0]=0,\quad M_{32}[m,\ 0]=H_{32}[m,\ 0]=l_1\eta\quad (m=0,\ 1)$$

$$n_{11}(x;\ 0,\ n)=0,\quad n_{21}(x;\ 0,\ n)=-2(-1)^n\eta,\quad m_{31}(x;\ 0,\ n)=(-1)^n l_1\eta(1-2x)\ (n=0,\ 1)$$

$$n_{22}(x;\ m,\ 0)=2(-1)^m\eta-\delta_{m0},\quad n_{12}(x;\ m,\ 0)=0,\quad m_{32}(x;\ m,\ 0)=l_1\eta\ (m=0,\ 1)$$

В случае бесконечной (в направлении оси x_1) решетки, используемой для оценки напряженного состояния элементов конечной решетки в окрестности локальной нагрузки, приложенной вдали от ее краев ($1 \ll m \ll M$), система уравнений (5.1) имеет место при $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Решение последней проще всего строится с помощью преобразования Лорана [5]. Пусть образы Лорана (z – комплексная переменная):

$$\varphi_k(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\varphi_k[m]z^m,\quad n_\alpha(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}n_\alpha[m]z^m,\quad h_3(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h_3[m]z^m$$

бесконечных последовательностей $\{\varphi_k[m]\}$, $\{n_\alpha[m]\}$, $\{h_3[m]\}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) регулярны, по крайней мере, на единичной окружности L. Для искомых функций это оправдывается построенным ниже решением, а для заданных – видом рассматриваемых нагрузок. Посредством обратного преобразования Лорана, например, ($i=\sqrt{-1}$):

$$\varphi_k[m]=\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi_k(\zeta)\zeta^{-m-1}d\zeta\ \ (m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots) \tag{5.6}$$

уравнения (5.1) преобразуются в систему

$$\left[\frac{\delta(\zeta)}{3}-2\varkappa_1-g\right]\varphi_1(\zeta)+\frac{1-(g+1)\zeta}{2\zeta}\varphi_2(\zeta)+\frac{\delta(\zeta)-2g}{2}\varphi_3(\zeta)=n_1(\zeta)$$

$$\frac{\zeta-g-1}{g\varkappa_2}\left[\frac{\varphi_1(\zeta)}{2}+\varphi_3(\zeta)\right]+\left[\delta(\zeta)-\frac{2g+3}{3g\varkappa_2}\right]\varphi_2(\zeta)=\frac{n_2(\zeta)}{\varkappa_2}$$

$$[\delta(\zeta)-2g]\left[\frac{\varphi_1(\zeta)}{2}+\varphi_3(\zeta)\right]+\frac{1-(g+1)\zeta}{\zeta}\varphi_2(\zeta)=h_3(\zeta),\quad \delta(\zeta)=\zeta-2+\zeta^{-1}$$

решение которой имеет вид

$$\varphi_1(\zeta)=\frac{\zeta f_1(\zeta)}{(\zeta-\mu_1)(\zeta-\mu_1^{-1})},\quad \varphi_2(\zeta)=\frac{\zeta^2 f_2(\zeta)}{(\zeta-\mu_2)(\zeta-\mu_2^{-1})(\zeta-\mu_3)(\zeta-\mu_3^{-1})}$$

$$\varphi_3(\zeta)=-\frac{1}{2}\varphi_1(\zeta)+\frac{\zeta^2 f_3(\zeta)}{(\zeta-\mu_2)(\zeta-\mu_2^{-1})(\zeta-\mu_3)(\zeta-\mu_3^{-1})}$$

$$\mu_k^{\pm 1}=\eta_k\pm(\eta_k^2-1)^{1/2},\quad f_1(\zeta)=12n_1(\zeta)-6h_3(\zeta)$$

$$f_2(\zeta)=\frac{\delta(\zeta)-2g}{\varkappa_2}n_2(\zeta)+\frac{g+1-\zeta}{g\varkappa_2}h_3(\zeta)$$

$$f_3(\zeta)=\frac{(g+1)\zeta-1}{\zeta\varkappa_2}n_2(\zeta)+\left[\delta(\zeta)-\frac{2g+3}{3g\varkappa_2}\right]h_3(\zeta)\ .$$

Возвращаясь к оригиналам (см. (5.6)), с помощью теоремы о вычетах находим

$$\varphi_1[m]=6\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Gamma_1[m-j](2n_1[j]-h_3[j])$$

$$\varphi_2[m]=\sum_{j=-\infty}^{\infty}(\varkappa_2^{-1}\Gamma_{23}^{(1)}[m-j]n_2[j]+\Gamma_{23}^{-}[m-j]h_3[j])$$

$$\varphi_3[m]=-\frac{1}{2}\varphi_1[m]+\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-\varkappa_2^{-1}\Gamma_{23}^{+}[m-j]n_2[j]+\Gamma_{23}^{(2)}[m-j]h_3[j])$$

$$\Gamma_k[\pm m]=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{d\zeta}{(\zeta-\mu_k)(\zeta-\mu_k^{-1})\zeta^m}=-\frac{\mu_k^{-|m|}}{\mu_k-\mu_k^{-1}},\quad |\mu_k|>1\ \ (k=1,\ 2,\ 3)$$

$$\Gamma_{23}[\pm m]=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{d\zeta}{(\zeta-\mu_2)(\zeta-\mu_2^{-1})(\zeta-\mu_3)(\zeta-\mu_3^{-1})\zeta^{m-1}}=\frac{\Gamma_2[m]-\Gamma_3[m]}{2(\eta_2-\eta_3)}$$

$$\Gamma_{23}^{(1)}[m]=(\Delta_1^2-2g)\Gamma_{23}[m],\quad \Gamma_{23}^{+}[m]=(\Delta_1^{+}-g)\Gamma_{23}[m]$$

$$\Gamma_{23}^{(2)}[m]=\left(\Delta_1^2-\frac{2g+3}{3g\varkappa_2}\right)\Gamma_{23}[m],\quad \Gamma_{23}^{-}[m]=\frac{\Delta_1^{-}+g}{g\varkappa_2}\Gamma_{23}[m]$$

Наконец, в случае полубесконечной решетки, позволяющей оценить напряженное состояние элементов конечной решетки в окрестности, например, ее левого края, система уравнений (5.1) имеет место при $m = 0, 1, 2, \ldots$. Решение подобных систем эффективно строится с помощью преобразования Тейлора – преобразования Лорана для полубесконечных последовательностей [1, 2]. Пусть образы Тейлора

$$\varphi_k^{+}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_k[m]z^m,\quad n_\alpha^{+}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}n_\alpha[m]z^m,\quad h_3^{+}(z)=\sum_{m=0}^{\infty}h_3[m]z^m$$

полубесконечных последовательностей $\{\varphi_k[m]\}$, $\{n_\alpha[m]\}$, $\{h_3[m]\}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ регулярны в $D_+ + L$, где D_+ – область, заключенная внутри единичной окружности L. И вновь для искомых функций это оправдывается построенным ниже решением, а для заданных – видом рассматриваемых нагрузок. Посредством обратного преобразования Тейлора, например,

$$\varphi_k[m]=\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi_k^{+}(\zeta)\zeta^{-m-1}d\zeta\ \ (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)\tag{5.7}$$

уравнения (5.1) преобразуются в систему краевых задач Римана–Гильберта

$$\left[\frac{\delta(\zeta)}{3}-2\varkappa_1-g\right]\varphi_1^{+}(\zeta)+\frac{1-(g+1)\zeta}{2\zeta}\varphi_2^{+}(\zeta)+\frac{\delta(\zeta)-2g}{2}\varphi_3^{+}(\zeta)=n_1^{+}(\zeta)+\rho_1^{-}(\zeta)$$

$$\frac{\zeta-g-1}{g\varkappa_2}\left[\frac{\varphi_1^{+}(\zeta)}{2}+\varphi_3^{+}(\zeta)\right]+\left[\delta(\zeta)-\frac{2g+3}{3g\varkappa_2}\right]\varphi_2^{+}(\zeta)=\frac{n_2^{+}(\zeta)}{\varkappa_2}+\rho_2^{-}(\zeta)$$

$$[\delta(\zeta)-2g]\left[\frac{\varphi_1^{+}(\zeta)}{2}+\varphi_3^{+}(\zeta)\right]+\frac{1-(g+1)\zeta}{\zeta}\varphi_2^{+}(\zeta)=h_3^{+}(\zeta)+\rho_3^{-}(\zeta)$$

которая распадается на три независимые задачи

$$(\zeta-\mu)\varphi_1^+(\zeta)=\zeta\frac{\varphi_1^-(\zeta)+f_1^+(\zeta)}{\zeta-\mu_1^{-1}},\quad (\zeta-\mu_2)(\zeta-\mu_3)\varphi_2^+(\zeta)=\frac{\zeta\varphi_2^-(\zeta)+\zeta^2 f_2^+(\zeta)}{(\zeta-\mu_2^{-1})(\zeta-\mu_3^{-1})}$$

$$(\zeta-\mu_2)(\zeta-\mu_3)\left[\frac{\varphi_1^+(\zeta)}{2}+\varphi_3^+(\zeta)\right]=\frac{\zeta\varphi_3^-(\zeta)+\zeta^2 f_3^+(\zeta)}{(\zeta-\mu_2^{-1})(\zeta-\mu_3^{-1})}\quad (\zeta\in L)$$

Здесь $\rho_k^-(z)$, как и образованные из них функции

$$\varphi_1^-(z)=12\rho_1^-(z)-6\rho_3^-(z)$$

$$\varphi_2^-(z)=z\left\{[\delta(z)-2g]\rho_2^-(z)-\frac{z-g-1}{g\varkappa_2}\rho_3^-(z)\right\}$$

$$\varphi_3^-(z)=[(g+1)z-1]\rho_2^-(z)+z\left[\delta(z)-\frac{2g+3}{3g\varkappa_2}\right]\rho_3^-(z)$$

аналитичны в области D_-, расположенной вне единичной окружности L, причем $\rho_k^-(\infty)=\varphi_k^-(\infty)=0$ $(k=1,\ 2,\ 3)$, а

$$f_1^+(z)=12n_1^+(z)-6h_3^+(z),\quad f_2^+(z)=\frac{\delta(z)-2g}{\varkappa_2}n_2^+(z)+\frac{g+1-z}{g\varkappa_2}h_3^+(z)$$

$$f_3^+(z)=\frac{(g+1)z-1}{z\varkappa_2}n_2^+(z)+\left[\delta(z)-\frac{2g+3}{3g\varkappa_2}\right]h_3^+(z)\quad (z\in D_+ + L)$$

Регулярные в $D_+ + L$ части решений независимых краевых задач имеют вид [5]:

$$\varphi_1^+(z)=\frac{zf_1^+(z)-\mu_1^{-1}f_1^+(\mu_1^{-1})}{(z-\mu_1)(z-\mu_1^{-1})},\quad \varphi_2^+(z)=\frac{F_2^+(z)}{(z-\mu_2)(z-\mu_3)}$$

$$\varphi_3^+(z)=-\frac{1}{2}\varphi_1^+(z)+\frac{F_3^+(z)}{(z-\mu_2)(z-\mu_3)}$$

$$F_q^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\zeta^2 f_q^+(\zeta)d\zeta}{(\zeta-\mu_2^{-1})(\zeta-\mu_3^{-1})(\zeta-z)}=$$

$$=\frac{z^2 f_q^+(z)}{(z-\mu_2^{-1})(z-\mu_3^{-1})}+\frac{\mu_2\mu_3}{\mu_2-\mu_3}\left[\frac{\mu_2^{-2}f_q^+(\mu_2^{-1})}{z-\mu_2^{-1}}-\frac{\mu_3^{-2}f_q^+(\mu_3^{-1})}{z-\mu_3^{-1}}\right]\quad (q=2,3)$$

Отсюда после возврата к оригиналам (см. (5.7)) имеем

$$\varphi_1[m]=6\sum_{j=0}^{\infty}\Gamma_1[m-j](2n_1[j]-h_3[j])-\mu_1^{-1}f_1^+(\mu_1^{-1})\Gamma_1[m+1]$$

$$\varphi_2[m]=\sum_{j=0}^{\infty}(\varkappa_2^{-1}\Gamma_{23}^{(1)}[m-j]n_2[j]+\Gamma_{23}^-[m-j]h_3[j])+F_2^{(1)}\Gamma_{23}[m+1]-F_2^{(2)}\Gamma_{23}[m+2]$$

$$\varphi_3[m]=-\frac{\varphi_1[m]}{2}+\sum_{j=0}^{\infty}(-\varkappa_2^{-1}\Gamma_{23}^+[m-j]n_2[j]+\Gamma_{23}^{(2)}[m-j]h_3[j])+$$

$$+F_3^{(1)}\Gamma_{23}[m+1]-F_3^{(2)}\Gamma_{23}[m+2]$$

$$F_q^{(1)}=\mu_2\mu_3\frac{\mu_2^{-2}f_q^+(\mu_2^{-1})-\mu_3^{-2}f_q^+(\mu_3^{-1})}{\mu_2-\mu_3},\quad F_q^{(2)}=\frac{\mu_2^{-1}f_q^+(\mu_2^{-1})-\mu_3^{-1}f_q^+(\mu_3^{-1})}{\mu_2-\mu_3}\quad (q=2,\ 3)$$

Внутренние силы в α-стержнях бесконечной и полубесконечной решеток по-прежнему находятся из формул (2.3), (5.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рыбаков Л.С.* О теории одной плоской регулярной упругой структуры ферменного типа // Изв. АН. МТТ. 1995. № 5. С. 171–179.
2. *Рыбаков Л.С.* Упругий анализ одной плоской регулярной стержневой структуры // Изв. АН. МТТ. 1996. № 1. С. 198–207.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. *Иванов В.А., Медведев В.С., Чемоданов Б.К., Ющенко А.С.* Математические основы теории автоматического регулирования / Под ред. Б.К. Чемоданова. Т. 2. М.: Высш. шк., 1977. 453 с.
5. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.12.1997