**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1999**

УДК 539.375

© 1999 г. **А.Г. БАГЛОЕВ, А.В. ШЕКОЯН**

АНТИПЛОСКАЯ АНИЗОТРОПНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕЩИНЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

Изучается поле напряжений для трещины, движущейся по произвольному закону в анизотропной среде в антиплоской задаче. Показано, что интегральное уравнение на границе вне трещины с точностью до постоянных множителей приводится к изотропной задаче. Приводятся коэффициенты интенсивности напряжений вблизи концов трещины.

Выберем плоскость x, y в качестве плоскости основного движения; ось x направлена по трещине, ось y – перпендикулярно вниз, ось z нормальна плоскости x, y; u – смещение по z. Связь напряжений и перемещения имеет вид [1]:

$$\frac{\tau_{xz}}{\rho} = a_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}^2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\tau_{yz}}{\rho} = a_{12}^2 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2^2 \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1}$$

Уравнение движения

$$\partial\tau_{xz} / \partial x + \partial\tau_{yz} / \partial y = \rho\partial^2 u / \partial t^2$$

с учетом (1) дает

$$a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2}$$

Граничные условия на трещине и ее продолжении в силу симметрии задачи имеют вид

$$y = 0, \quad \tau_{yz} = -p(x, t), \quad x_1(t) < x < x_2(t), \quad u = 0, \quad x < x_1; \quad x > x_2 \tag{3}$$

Начальные условия

$$u = 0, \quad \partial u / \partial t = 0, \quad t = 0 \tag{4}$$

Вначале, как и в [2], решаем задачу об импульсе с граничным условием

$$\tau_{yz}^{\circ}(x, t) = \delta(x)\delta(t), \quad y = 0 \tag{5}$$

Решение задачи (2)–(4) ищем в виде интегральных преобразований

$$u = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} u_1(\lambda, \rho) \exp[\rho(t - \lambda x - \beta y)] d\rho d\lambda \tag{6}$$

Подставляя (6) в (2), получим

$$a_2^2 \beta(\lambda) = -a_{12}^2 \lambda + (a_2^2 - a^2 \lambda^2)^{1/2}, \quad a^2 = a_2^2 a_1^2 - a_{12}^4 \tag{7}$$

Обозначая $u_{01}(\lambda)$ преобразования Лапласа и Фурье из (5) и (7), будем иметь

$$\delta(x)\delta(t) = -\frac{\rho}{4\pi^2 i}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\sigma-in}^{\sigma+in} u_{01} s\gamma\, a_2^2 \exp[s(t-\lambda x)]d\lambda ds \tag{8}$$

$$\gamma = a_2^{-2}(a_2^2 - a^2\lambda^2)^{1/2}$$

Отсюда получим

$$u_{01} = -i/(\gamma\rho a_2^2) \tag{9}$$

причем (6), записанное для индекса ноль, дает

$$u_0 = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\gamma\rho a_2^2)^{-1}\delta(t-\lambda x-\beta y)d\lambda \tag{10}$$

Заменяя контур интегрирования по λ на контур, проходящий через точки Смирнова – Соболева $t-\lambda x-\beta(\lambda)$, $y=0$ и точки, соответствующие сопряженному значению λ, получим

$$u_0 = i\{2\pi\rho a_2^2\gamma[x+\beta'(\lambda)y]\}^{-1} + \text{к.с.} \tag{11}$$

$$\lambda = \{iya_2^{-1}[t^2a^2a_2^{-2} - x_1^2 - y^2a^2a_2^{-4}]^{1/2} + tx_1\}\,(x_1^2 + y^2a^2a_2^{-4})^{-1} \tag{12}$$

Тогда для γ находим

$$\left(x+\frac{d\beta}{d\lambda}y\right)\gamma = x_1ty^{-1} - \lambda y^{-1}(x_1^2 + a^2a_2^{-4}y^2) = -ia_2^2(-x_1^2 +$$

$$+a^2t^2a_2^2 - a^2a_2^{-4}y^2)^{1/2}, \quad \gamma = (t-\lambda x_1)y^{-1}, \quad x_1 = x - a_{12}^2a^{-2}y \tag{13}$$

Окончательно из (11) получим

$$u_0 = -(\rho\pi a_2)^{-1}[a^2t^2a_2^{-2} - (x_1^2 + a^2a_2^{-4}y^2)]^{-1/2} \tag{14}$$

Решение, соответствующее граничному условию $y=0$, $\tau_{yz} = \tau_1(x, t)$, имеет вид свертки при $y=0$:

$$u = -(\pi\rho a_2)^{-1}\iint_S \tau_1(x',\ t')[a^2a_2^{-2}(t-t')^2 - (x-x')^2]^{-1/2}dx'dt' \tag{15}$$

где S – часть плоскости; попадающей во внутрь области $(t-t')^2a^2a_2^{-2} - (x-x')^2 \geqslant 0$. Полученная связь перемещения и напряжения τ_1 на границе области повторяет решение для изотропной среды [3] с точностью до постоянных. Обозначая $aa_2^{-1}t = t_0$, $aa_2^{-1}t' = t$, $x = x'$, $x = x_0$ и учитывая, что $(\rho a_2)^{-1}$ сокращается в интегральном уравнении, дающем связь $\tau(x, t)$ вне трещины и на ней, можно взять решение [3] в характеристических координатах справа от трещины

$$\xi = \tfrac{1}{2}(t-x), \quad \eta = \tfrac{1}{2}(t+x) \tag{16}$$

$$\tau_1(\xi_0,\ \eta_0) = \frac{1}{\pi}[\eta_0 - \eta_2(\xi_0)]^{-1/2}\int_{-\xi_0}^{\eta_2(\xi_0)} p_1(\xi_0,\ \eta)[\eta_2(\xi_0)-\eta]^{1/2}(\eta_0-\eta)^{-1}d\eta \tag{17}$$

где при интегрировании вдоль характеристики

$$t - x = t_2 - x_2 = \text{const}, \quad t_0 - x_0 = t_2 - x_2(t_2) \tag{18}$$

Как и в [3], можно перейти к физическим координатам. Поскольку

$$\eta_0 - \eta = \tfrac{1}{2}(x_0 - x), \quad \eta = \tfrac{1}{2}(x + t)$$

$$\eta_2(\xi_0) - \eta = 2^{1/2}[x_2(t_2) - x] \tag{19}$$

$$\eta - \eta_2(\xi_0) = 2^{1/2}[x_0 - x_2(t_2)]$$

и в верхнем пределе интегрирования $\eta = \eta_2(\xi_0)$ можно полагать $x = x_2(t_2)$. Тогда, как и в [3], для напряжений (17), получим

$$\tau_1(x_0,\ t_0) = \frac{1}{\pi}[x_0 - x_2(t_2)]^{-1/2} \int\limits_{x_0 - t_0}^{x_2(t_2)} p(x,\ t_0 - x_0 + x) \frac{[x_2(t_2) - x]^{1/2}}{x_0 - x} dx \tag{20}$$

Точно так же находится решение вблизи левого конца трещины $x_0 < x_1(t)$:

$$\tau(x_0,\ t_0) = -\pi^{-1}[x_1(t_1) - x_0]^{-1/2} \int\limits_{x_0 + t_0}^{x_1(t_1)} p(x,\ x_0 + t_0 - x) \frac{[x - x_1(t_1)]^{1/2}}{x - x_0} dx \tag{21}$$

$$t_1 + x_1(t_1) = t_0 + x_0$$

Вблизи концов трещины можно записать

$$x_0 \to x_2(t_0), \quad \tau(x_0,\ t_0) = K_2 \pi^{-1}[x_0 - x_2(t_0)]^{-1/2}$$

$$t_0 - t_2 = [x_0 - x_2(t_0)][1 - \dot{x}_2(t_0)]^{-1}$$

$$K_2 = [1 - \dot{x}_2(t_0)]^{1/2} \int\limits_{x_0(t_0) - t_0}^{x_2(t_0)} p(x,\ t_0 - x_2 + x) \frac{dx}{[x_2(t_0) - x]^{1/2}} \tag{22}$$

$$x_0 \to x_1(t_0), \quad \tau(x_0,\ t_0) = K_1 \pi^{-1}[x_1(t_0) - x_0]^{-1/2}$$

$$K_1 = [1 + \dot{x}_1(t_0)]^{1/2} \int\limits_{x_1(t_0)}^{x_1(t_0) + t_0} p(x,\ t_0 + x_1 - x)[x - x_1(t_0)]^{-1/2} dx \tag{23}$$

где точка обозначает дифференцирование по t.

Для определения закона движения трещины можно использовать энергетическое условие [4]. Для этого следует знать перемещения на трещине вблизи ее вершины. Они определяются известным способом [4, 5] и имеют вид $x_0 < x_2(t_0)$:

$$u = K_2(\pi\rho a)^{-1}[1 - \dot{x}_2^2(t_0)]^{-1/2}[x_2(t_0) - x_0]^{1/2} \tag{24}$$

Для определения условия раскрытия трещины следует использовать условие Ирвина [4], которое дает с учетом (22), (24):

$$\gamma' = (4\pi\rho a)^{-1} K_2^2 [1 - \dot{x}_2^2(t_0)]^{-1/2}$$

где γ' есть поверхностная энергия разрушения. Для постоянного напряжения на трещине $p = \text{const}$ получится уравнение для $\dot{x}_2(t_0)$ в виде

$$(\gamma')^{1/2} = t_0^{1/2} (\pi\rho a)^{-1/2} \{[1 - \dot{x}_2(t_0)][1 + \dot{x}_2(t_0)]^{-1}\}^{1/4}$$

Полученное уравнение справедливо при $(\gamma')^{1/2} < \sqrt{t_0} / \sqrt{\pi\rho a}$. При обратном неравенстве [4] край трещины не распространяется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А.* Приближенное решение антиплоской анизотропной задачи о распространении трещины // Механика. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1989. Вып. 7. С. 48–55.
2. *Сарайкин В.А., Слепян Л.И.* Плоская задача о динамике трещины в упругом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 54–73.
3. *Костров В.В.* Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 6. С. 1042–1049.
4. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Т. 2. М.: Мир, 1983. 880 с.
5. *Красильщикова Е.А.* Тонкое крыло в сжимаемом потоке. М.: Наука, 1978. 223 с.

Ереван

Поступила в редакцию
12.10.1996