

УДК 539.376

© 1999 г. К.М. ЗИНГЕРМАН, В.А. ЛЕВИН

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ  
ДВУХ НЕРАВНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОТВЕРСТИЙ  
В ТЕЛЕ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА.  
КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ**

Рассматривается задача о последовательном образовании двух эллиптических полостей в предварительно нагруженном теле из вязкоупругого несжимаемого материала при конечных деформациях. Постановка и решение задачи осуществляется на основе теории наложения больших деформаций. Механические свойства материала описываются в начальном состоянии интегральными соотношениями вида свертки по времени со слабосингулярным ядром. Исследуется влияние нелинейных эффектов, взаимного расположения отверстий и времени их образования на концентрацию напряжений.

**1. Постановка задачи.** Анализируется взаимовлияние двух последовательно образующихся эллиптических отверстий в предварительно нагруженном бесконечно протяженном теле из изотропного вязкоупругого несжимаемого материала, имеющего большие начальные деформации. Постановка задачи формулируется с помощью теории наложения больших деформаций в телах из упругого или вязкоупругого материала [1, 2].

Общая постановка задачи следующая [1, 2]. В начальный момент времени  $\tau_0 = 0$  в теле под воздействием внешних усилий возникают начальные плоские деформации, меняющиеся со временем вследствие вязкоупругих процессов, происходящих в материале тела. Далее в заранее заданный момент времени  $\tau_1$  в теле намечается замкнутый эллиптический контур (будущая граница первого отверстия) и точка вне его (будущий центр второго отверстия). Часть тела, ограниченная этим контуром, мысленно удаляется, а ее действие на оставшуюся часть тела заменяется (по принципу освобожденности от связей) силами, распределенными по этому контуру. Далее эти силы "мгновенно" (в смысле [3], без динамических эффектов) уменьшаются до нуля, вследствие чего в теле возникают дополнительные конечные (по крайней мере в окрестности образованной границы) деформации и соответствующие им напряжения, которые накладываются на начальные. Деформации в теле со временем продолжают изменяться вследствие вязкоупругих процессов. Изменяется и форма граничной поверхности.

Далее в заранее заданный момент времени  $\tau_2$  в теле намечается второй эллиптический контур, центр которого совпадает с намеченной точкой (вследствие деформации положение этой точки меняется). По схеме, аналогичной описанной выше, образуется второе отверстие. В теле возникают новые конечные дополнительные деформации и напряжения, которые накладываются на уже имеющиеся. Меняется и форма отверстий.

В соответствии с теорией наложения больших деформаций [1, 2] в теле различаем следующие состояния: начальное (недеформированное); первое промежуточное, в ко-

тором находится тело в момент времени  $\tau_1$  перед образованием первого отверстия; второе промежуточное, в котором находится тело в момент времени  $\tau_2$  перед образованием второго отверстия; текущее, в котором находится тело после образования второго отверстия ( $t \geq \tau_2$ ). Этим состояниям присваиваем номера 0, 1, 2, 3, соответственно.

В работе используются ранее апробированные при решении конкретных задач [4, 5] определяющие соотношения вида [6]:

$$\Sigma_{0,n}^0 = \bar{\mu}[I - (1/3)G_1 G_{0,n}^{-1}] - p_{0,n} G_{0,n}^{-1} \quad (1.1)$$

$$\bar{\mu}\varphi(t) = \mu_0 \left[ \varphi(t) - \int_0^t l(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau \right] \quad (1.2)$$

$$l(t) = A \exp(-\alpha t) t^{\beta-1} \quad (1.3)$$

Здесь  $\bar{\mu}$  – интегральный оператор;  $n$  – номер состояния;  $p_{0,n}$  – скалярный множитель;  $G_{0,n} = \Psi_{0,n} \cdot \Psi_{0,n}^T$  – тензор меры, характеризующий деформации при переходе тела из начального в  $n$ -ое состояние (при  $n=1$  тензор  $G_{0,1} = G$  представляет собой тензор меры деформаций Грина [7]);  $G_1 = G_{0,1} \cdot I$ ;  $\Sigma_{0,n}^0(t)$  – тензор обобщенных полных для  $n$ -го состояния напряжений, отнесенный к координатному базису начального состояния [1, 2], связанный с тензором истинных полных для  $n$ -го состояния напряжений  $\sigma_{0,n}$  следующим образом:

$$\sigma_{0,n} = \Psi_{0,n}^T \cdot \Sigma_{0,n}^0 \cdot \Psi_{0,n} \quad (1.4)$$

где  $\Psi_{k,n}$  – аффинор деформаций, описывающий переход из  $k$ -го в  $n$ -ое состояние.

Математическая постановка задачи в координатах  $k$ -го состояния для тела, находящегося в  $n$ -ом состоянии, имеет вид [1, 2]: уравнение равновесия

$$\begin{aligned} \nabla^{(k)} \cdot \Sigma_{0,n}^k - \Sigma_{0,n}^k \cdot \nabla^{(k)} \ln(1 + \Delta_{0,n}) + \Sigma_{0,n}^k \cdot \nabla^{(k)} \Psi_{k,n} \cdot \Psi_{k,n}^{-1} - \\ - [\nabla^{(k)} \cdot \Psi_{k,n}^{T-1} \cdot \Psi_{k,n}^T] \cdot \Sigma_{0,n}^k + \mathbf{F}_n^k \rho_k (1 + \Delta_{0,k}) = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

граничные условия

$$\mathbf{N}_j^{(k)} \cdot \Sigma_{0,n}^k \Big|_{\Gamma_j^{(k)}} = 0 \quad (1 \leq j \leq m_n) \quad (1.6)$$

$$\sigma|_{\infty} = \sigma_{\infty} \quad (1.7)$$

где  $\Gamma_j^{(k)}$  – контур  $j$ -го отверстия в теле в координатах  $k$ -го промежуточного состояния,  $\mathbf{N}_j^{(k)}$  – нормаль к  $\Gamma_j^{(k)}$ ,  $m_n$  – число отверстий в теле в  $n$ -ом состоянии ( $m_0 = m_1 = 0$ ,  $m_2 = 1$ ,  $m_3 = 2$ ); определяющие соотношения (1.1); зависимость между тензорами обобщенных напряжений в базисах различных состояний

$$\Sigma_{0,n}^k = \Psi_{0,k}^T \cdot \Sigma_{0,n}^0 \cdot \Psi_{0,k} \quad (1.8)$$

кинематические соотношения

$$\Psi_{0,n} = \Psi_{0,k} \cdot \Psi_{k,n} \quad (1.9)$$

$$\Psi_{k,k+1} = I + \nabla^{(k)} \mathbf{u}_{k+1}; \quad \Psi_{k-1,k} = (I - \nabla^{(k)} \mathbf{u}_k)^{-1} \quad (1.10)$$

где  $\mathbf{u}_k$  – вектор перемещений при переходе из  $(k-1)$ -го в  $k$ -ое состояние.

Формулировка и решение задачи осуществляется в координатах второго промежу-

точного состояния (т.е. при  $k = 2, n = 2, 3$ ), так как большинство граничных условий известно именно в этом состоянии. Задача рассматривается в плоской квазистатической постановке [3].

**2. Используемый метод решения полученных систем уравнений равновесия с граничными условиями.** Для решения полученных систем уравнений используется метод Синьборини [7, 8]. В качестве параметра используется величина  $q = \sigma_{\max}/\mu_0$ , где  $\sigma_{\max} = \max_{i,j} |\sigma_{ij}^\infty|$ ,  $\sigma_{ij}^\infty$  – начальные истинные напряжения на бесконечности. Решение задачи представляется в виде

$$\sigma_{0,n} = \sum_{i=0}^M \sigma_{0,n}^{(i)}, \quad \mathbf{u}_n = \sum_{i=0}^M \mathbf{u}_n^{(i)}, \quad p_{0,n} = \sum_{i=0}^M p_{0,n}^{(i)} \quad (2.1)$$

где  $\sigma_{0,n}^{(i)}$ ,  $\mathbf{u}_n^{(i)}$ ,  $p_{0,n}^{(i)}$  пропорциональны  $q^{i+1}$  ( $i = 0, \dots, M; n = 2, 3$ ). Для  $i$ -го приближения система уравнений имеет вид:

$$\nabla^{(2)} \cdot L[\mathbf{u}_n^{(i)}, p_{0,n}^{(i)}] = \mathbf{f}_n^{(i)}(x, y; t) \quad (2.2)$$

$$\nabla^{(2)} \cdot \mathbf{u}_n^{(i)} = h_n^{(i)}(x, y; t) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{N}_j^{(2)} \cdot L[\mathbf{u}_n^{(i)}, p_{0,n}^{(i)}] \Big|_{\Gamma_j^{(2)}} = \mathbf{Q}_{n,j}^{(i)}(x, y; t) \quad (1 \leq j \leq m_n) \quad (2.4)$$

$$L[\mathbf{u}_n^{(i)}, p_{0,n}^{(i)}] \Big|_\infty = \sigma_\infty^{(i)} \quad (2.5)$$

Здесь  $L[\mathbf{u}, p]$  – оператор, определенный следующим образом:

$$L[\mathbf{u}, p] = \bar{\mu} \left[ \nabla^{(2)} \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla^{(2)} - \frac{2}{3} (\nabla^{(2)} \cdot \mathbf{u}) I \right] - p I \quad (2.6)$$

где  $x, y$  – декартовы координаты;  $t$  – время;  $\mathbf{f}_n^{(i)}(x, y; t)$ ,  $h_n^{(i)}(x, y; t)$ ,  $\mathbf{Q}_{n,j}^{(i)}(x, y; t)$  – векторные функции,  $\sigma_\infty^{(i)}$  – тензоры, известные перед решением задачи для  $i$ -го приближения.

Для решения линеаризованной задачи (2.2)–(2.6) используется преобразование Лапласа [8, 9]. В изображениях эта задача будет иметь вид:

$$\nabla^{(2)} \cdot \tilde{L}[\mathbf{u}_n^{(i)}, \tilde{p}_{0,n}^{(i)}] = \tilde{\mathbf{f}}_n^{(i)}(x, y; s) \quad (2.7)$$

$$\nabla^{(2)} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_n^{(i)} = \tilde{h}_n^{(i)}(x, y; s) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{N}_j^{(2)} \cdot \tilde{L}[\tilde{\mathbf{u}}_n^{(i)}, \tilde{p}_{0,n}^{(i)}] \Big|_{\Gamma_j^{(2)}} = \tilde{\mathbf{Q}}_{n,j}^{(i)}(x, y; s) \quad (1 \leq j \leq m_n) \quad (2.9)$$

$$\tilde{L}[\tilde{\mathbf{u}}_n^{(i)}, \tilde{p}_{0,n}^{(i)}] \Big|_\infty = \tilde{\sigma}_\infty^{(i)} \quad (2.10)$$

Здесь тильда над величиной указывает, что эта величина является изображением по Лапласу  $\mathbf{u}_n^{(i)}(t) \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_n^{(i)}(s)$ ,  $p_{0,n}^{(i)}(t) \rightarrow \tilde{p}_{0,n}^{(i)}(s), \dots$ ;  $\tilde{L}[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}]$  – оператор над изображениями

$$\tilde{L}[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}] = \mu_0 \tilde{K}(s) \left[ \nabla^{(2)} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \nabla^{(2)} - \frac{2}{3} (\nabla^{(2)} \cdot \tilde{\mathbf{u}}) I \right] - \tilde{p} I \quad (2.11)$$

$$\tilde{K}(s) = 1 - \tilde{l}(s), \quad l(t) \rightarrow \tilde{l}(s), \quad \text{т.е. } \tilde{l}(s) = A\Gamma(\gamma)/(s + \alpha)^\gamma$$

Далее будем предполагать, что напряжения на бесконечности не меняются со временем (после приложения начальной нагрузки).

Функции  $\tilde{f}_n^{(i)}(x, y, s)$ ,  $\tilde{h}_n^{(i)}(x, y, s)$ ,  $\tilde{Q}_{n,j}^{(i)}(x, y, s)$ ,  $\tilde{\sigma}_\infty^{(i)}(s)$  в выражениях (2.7)–(2.10) могут быть представлены в виде

$$\tilde{f}_n^{(i)}(x, y, s) = \sum_{k=1}^{M_n^{(i)}} \mathbf{f}_n^{(i,k)}(x, y) \tilde{D}_{i,k}^n(s) \quad (2.12)$$

$$\tilde{h}_n^{(i)}(x, y, s) = \sum_{k=1}^{M_n^{(i)}} h_n^{(i,k)}(x, y) \tilde{C}_{i,k}^n(s) \quad (2.13)$$

$$\tilde{Q}_{n,j}^{(i)}(x, y, s) = \sum_{k=1}^{M_n^{(i)}} \mathbf{Q}_{n,j}^{(i,k)}(x, y) \tilde{D}_{i,k}^n(s) \quad (2.14)$$

$$\tilde{\sigma}_\infty^{(i)}(s) = \sum_{k=1}^{M_n^{(i)}} \tilde{\sigma}_\infty^{(i,k)} \tilde{D}_{i,k}^n(s) \quad (2.15)$$

Здесь  $\tilde{C}_{i,k}^n(s)$ ,  $\tilde{D}_{i,k}^n(s)$  – функции, известные перед решением задачи для каждого приближения и связанные соотношениями

$$\tilde{D}_{i,k}^n(s) = \tilde{K}(s) \tilde{C}_{i,k}^n(s) \quad (2.16)$$

Возможность представления функций  $\tilde{f}_n^{(i)}(x, y, s)$ ,  $\tilde{h}_n^{(i)}(x, y, s)$ ,  $\tilde{Q}_{n,j}^{(i)}(x, y, s)$ ,  $\tilde{\sigma}_\infty^{(i)}(s)$  в виде (2.12)–(2.15) для нулевого приближения следует из постановки задачи. Для последующих приближений возможность такого представления объясняется полиномиальной зависимостью правых частей уравнений (2.7)–(2.10) от решений для предшествующих приближений.

В частности, для нулевого приближения при  $n=2$ :  $M_2^{(0)} = 3$ ,  $\tilde{D}_{0,1}^2(s) = 1/s$ ,  $\tilde{D}_{0,2}^2(s) = (1/s)\exp(-\tau_1 s)$ ,  $\tilde{D}_{0,3}^2(s) = (1/s)\exp(-\tau_1 s) \tilde{K}(s)$ . При  $n=3$ :  $M_3^{(0)} = 4$ ,  $\tilde{D}_{0,1}^3(s) = 1/s$ ,  $\tilde{D}_{0,2}^3(s) = (1/s)\exp(-\tau_1 s)$ ,  $\tilde{D}_{0,3}^3(s) = (1/s)\exp(-\tau_2 s)$ ,  $\tilde{D}_{0,4}^3(s) = (1/s)\exp(-\tau_2 s) \tilde{K}(s)$ .

Вследствие (2.12)–(2.15) решение задачи (2.7)–(2.10) может быть представлено в виде

$$\tilde{\mathbf{u}}_n^{(i)}(x, y, s) = \sum_{k=1}^{M_n^{(i)}} \mathbf{u}_n^{(i,k)}(x, y) \tilde{C}_{i,k}^n(s) \quad (2.17)$$

$$\tilde{p}_{0,n}^{(i)}(x, y, s) = \sum_{k=1}^{M_n^{(i)}} p_n^{(i,k)}(x, y) \tilde{D}_{i,k}^n(s) \quad (2.18)$$

где  $\mathbf{u}_n^{(i,k)}(x, y)$ ,  $p_n^{(i,k)}(x, y)$  – решения упругих задач

$$\nabla^{(2)} \cdot L^*[\mathbf{u}_n^{(i,k)}, p_n^{(i,k)}] = \mathbf{f}_n^{(i,k)}(x, y) \quad (2.19)$$

$$\nabla^{(2)} \cdot \mathbf{u}_n^{(i,k)} = \tilde{h}_n^{(i,k)}(x, y) \quad (2.20)$$

$$\mathbf{N}_j^{(2)} \cdot L^*[\mathbf{u}_n^{(i,k)}, p_n^{(i,k)}] \Big|_{\Gamma_j^{(2)}} = \tilde{Q}_{n,j}^{(i,k)}(x, y) \quad (1 \leq j \leq m_n) \quad (2.21)$$

$$L^*[\mathbf{u}_n^{(i,k)}, p_n^{(i,k)}]_\infty = \tilde{\sigma}_\infty^{(i,k)} \quad (2.22)$$

$$L^*[\mathbf{u}, p] = \mu_0 \left[ \nabla^{(2)} \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla^{(2)} - \frac{2}{3} (\nabla^{(2)} \cdot \mathbf{u}) I \right] - p I$$

Выражения для напряжений для  $i$ -го приближения имеют вид

$$\tilde{\sigma}_{0,n}^{(i)}(x, y; s) = \sum_{k=1}^{M_n^{(i)}} \sigma_{0,n}^{(i,k)}(x, y) \tilde{D}_{i,k}^n(s) \quad (2.23)$$

$$\sigma_{0,n}^{(i,k)} = L^* \left[ \mathbf{u}_n^{(i,k)}, p_n^{(i,k)} \right]$$

Используя для решения задач (2.19)–(2.22) метод Мусхелишвили [10]–[13], получим

$$u_x + iu_y = \frac{1}{2\mu_0} \left[ \varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \right] + \frac{1}{4\mu_0} \left[ \iint F(z, \bar{z}) dz d\bar{z} - \iint \overline{F(z, \bar{z})} dz d\bar{z} \right] - \quad (2.24)$$

$$- \frac{1}{2} \int H(z, \bar{z}) dz$$

$$p = -2 \operatorname{Re}[\varphi'(z)] + \operatorname{Re} \left[ \int F(z, \bar{z}) dz \right] \quad (2.25)$$

$$F(z, \bar{z}) = \mathbf{f} \left[ \frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i} \right], \quad H(z, \bar{z}) = h \left[ \frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i} \right]$$

где  $u_x, u_y$  – компоненты вектора  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_n^{(i,j)}$  в декартовой системе координат (в (2.24), (2.25) и далее индексы  $i, j$  для простоты опущены);  $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$  – комплексные переменные.

Функции  $\varphi(z), \psi(z)$  определяются из граничных условий задачи (2.19)–(2.22). Для нахождения этих функций в случае многосвязной области (при  $n = 3$ ) используется алгоритм Шварца [10, 12].

Отметим, что подобная схема решения была применена в [14] к решению задачи об одновременном образовании двух круговых (в момент образования) отверстий в предварительно нагруженном теле из вязкоупругого материала, механические свойства которого описываются определяющими соотношениями (1.1)–(1.3).

Для получения конкретных результатов используется комплекс программ "Наложение", который включает в себя, в частности, три специализированных модуля для выполнения на ЭВМ аналитических операций.

1. Модуль, предназначенный для выполнения над изображениями по Лапласу вида

$$f(s) = \sum_{i=1}^n A_i \exp(-\alpha_i s) \frac{1}{s^{\beta_i}} \quad (2.26)$$

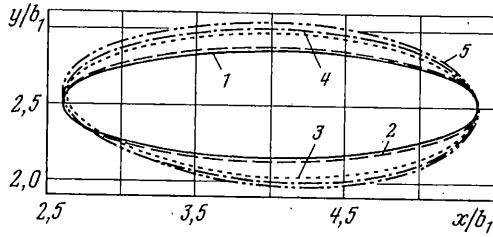
где  $A_i, \alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) – вещественные числа, следующих операций: сложения и умножения на число, умножения, нахождения изображения произведения оригиналов, вычисления значения оригинала для заданного значения времени.

Отметим, что функция  $\tilde{K}(s) = 1 - \operatorname{AG}(\gamma)/(s + \alpha)^\gamma$  при  $\alpha \neq 0$  не принадлежит к виду (2.26), и используется ее приближенное представление в виде отрезка сходящегося ряда (в предположении, что  $\alpha \ll 1$ ). Представление в виде ряда используется и для функции  $1/\tilde{K}(s)$  [15].

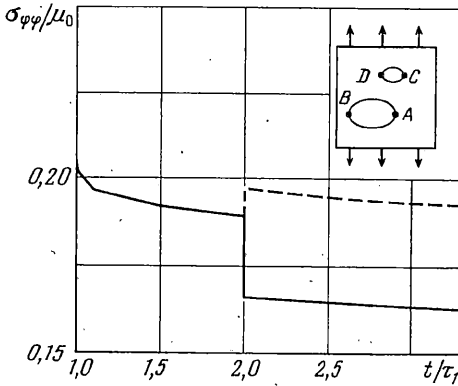
2. Модуль, предназначенный для выполнения операций над функциями двух комплексных переменных  $z$  и  $\bar{z}$  вида

$$f(z, \bar{z}) = f(\xi_1, \xi_2; \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) = \sum_{i=1}^N R_i (\xi_{m_{i,1}} - c_{i,1})^{k_{i,1}} (\bar{\xi}_{m_{i,2}} - c_{i,2})^{k_{i,2}} \quad (2.27)$$

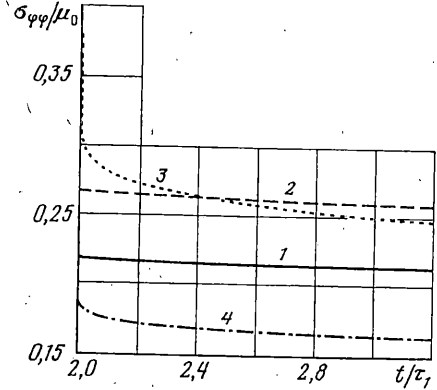
где  $k_{i,j}, m_{i,j}$  – целые числа ( $1 \leq m_{i,j} \leq 2$ );  $R_i, c_{i,j}$  – комплексные коэффициенты;  $\xi_1, \xi_2$  – вспомогательные комплексные переменные, связанные с  $z$  соотношениями  $z = \omega_i(\xi_i)$  ( $i = 1, 2$ );  $\omega_i(\xi_i)$  – аналитические функции, осуществляющие конформное отображение внешности единичного круга  $|\xi_i| > 1$  на бесконечную область, ограниченную контуром  $i$ -го отверстия [12].



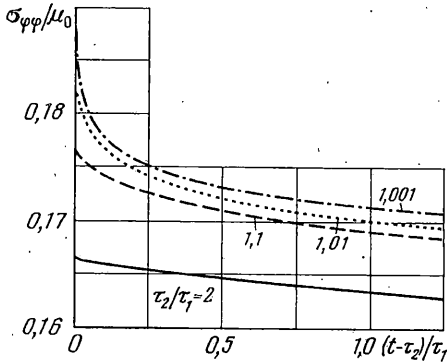
Фиг. 1



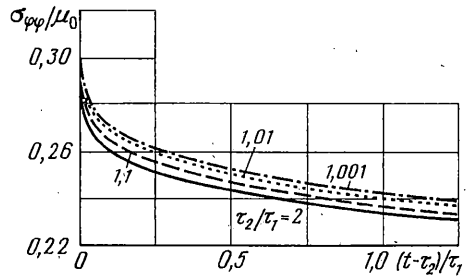
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

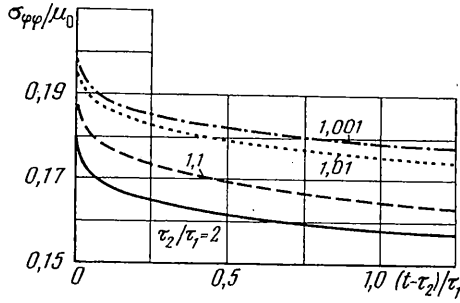


Фиг. 5

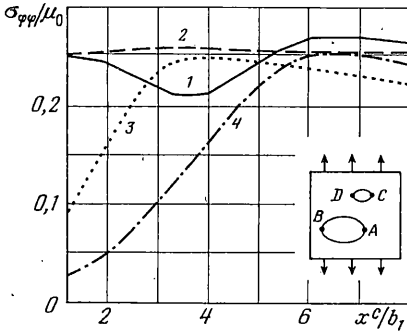
Выполняются следующие операции: сложение, умножение, дифференцирование и интегрирование по  $z$  и  $\bar{z}$ , нахождение комплексно сопряженной функции, нахождение интеграла типа Коши.

3. Модуль, выполняющий над тензорами второго ранга и векторами, компоненты которых являются функциями вида (2.27), следующие действия: сложение, умножение, нахождение сопряженного тензора, применение  $\nabla$ -оператора. Для представления тензоров используются комплексные компоненты.

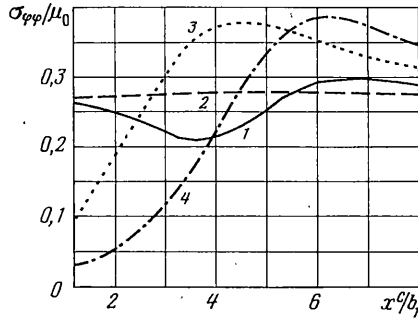
**3. Результаты расчетов.** Далее на фигурах приведены результаты решения задачи. Определены нулевое и первое приближения. Расчеты проведены для случая одноосной начальной растягивающей нагрузки ( $\sigma_{11}^{\infty} = 0$ ,  $\sigma_{22}^{\infty}/\mu_0 = 0,03$ ) для следующих параметров материала:  $\gamma = 0,016$ ,  $A = 0,000155 \alpha \gamma^{-1}$  (указанные значения параметров соответствуют полидиенэпоксипуретану) [6]. Большие оси эллипсов в момент образования считаются параллельными оси  $x_1$  (т.е. перпендикулярными к направлению начальной нагрузки).



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

Для описания расположения и размеров отверстий используются следующие обозначения:  $a_1, a_2$  – большие полуоси эллипсов в момент образования отверстий;  $b_1, b_2$  – малые полуоси;  $x^c, y^c$  – координаты намеченного центра второго отверстия в первом промежуточном состоянии (считается, что центр первого отверстия в этом состоянии совпадает с началом координат).

На фиг. 1 показана форма второго отверстия в различные моменты времени для случая  $a_1/b_1 = a_2/b_2 = 4, a_2/a_1 = 0,35, x^c/b_1 = 4, y^c/b_1 = 3, \alpha\tau_1 = 0,001, \tau_2/\tau_1 = 2$ . Кривая 1 соответствует  $t/\tau_1 = 2$  (до упругой деформации), кривая 2 –  $t/\tau_1 = 2$  (после упругой деформации), кривые 3, 4, 5 соответствуют  $t/\tau_1 = 2,01; 2,1; 3$ .

Как видно из фигуры, при деформировании происходит расширение отверстия в направлении малой оси, возрастающее со временем; при этом перемещения, вызванные мгновенно-упругим деформированием, относительно невелики по сравнению с дальнейшими перемещениями, вызванными протеканием вязкоупругих процессов. Видно также, что форма отверстия становится асимметричной, что объясняется влиянием первого отверстия.

На фиг. 2 показано изменение во времени концентрации напряжений в вершинах первого отверстия с момента его образования для той же задачи, что и на фиг. 1. Следует отметить, что в случае решения задачи в линеаризованной постановке в промежуток времени между образованием отверстий имеет место чистая ползучесть. В случае же решения задачи с учетом нелинейных эффектов, как видно из фиг. 2, напряжения изменяются и в период между образованием отверстий, а также после образования второго отверстия. При этом, как видно из фиг. 2, в момент образования второго отверстия напряжения в точке A (сплошная кривая) уменьшаются, а напряжения в точке B (штриховая линия) возрастают.

На фиг. 3 показано изменение концентрации напряжений в вершинах первого (точки A, B) и второго (точки C, D) отверстий после образования второго отверстия для той же задачи, что и на фиг. 2 (кривые 1–4 соответствуют точкам A, B, C, D). Как видно из фиг. 3, со временем происходит уменьшение напряжений во всех вершинах,

причем напряжения в вершинах второго отверстия меняются более существенно. Уменьшение напряжений можно объяснить тем, что при деформировании отверстий происходит их растяжение в направлении малой оси (фиг. 1) и уменьшение кривизны в вершинах.

На фиг. 4 показано изменение концентрации напряжений в вершине  $A$  первого отверстия в зависимости от времени, прошедшего с момента образования второго отверстия, при различных  $\tau_2$  ( $\sigma\tau_1 = 0,001$ ; размеры и расположение отверстий те же, что и для задачи на фиг. 1). На фиг. 5, 6 приведены аналогичные зависимости для концентрации напряжений в вершинах второго отверстия – точке  $C$  (фиг. 5) и точке  $D$  (фиг. 6). Как видно из фиг. 4–6, чем больше интервал времени  $\tau_2 - \tau_1$  между образованием отверстий, тем меньше концентрация напряжений в вершинах.

Наконец, на фиг. 7, 8 показано изменение концентрации напряжений в вершинах отверстий (кривые 1–4 соответствуют точкам  $A, B, C, D$ ) в зависимости от абсциссы  $x^c$  центра второго отверстия для случая  $a_1/b_1 = a_2/b_2 = 4$ ,  $a_2/a_1 = 0,35$ ,  $y^c/b_1 = 2,5$ ,  $\sigma\tau_1 = 0,001$ ,  $\tau_2/\tau_1 = 2$  в момент времени  $t = 3\tau_1$  (форма отверстий задана во втором промежуточном состоянии). На фиг. 7 приведены результаты решения нелинейной задачи, на фиг. 8 – результаты решения линейной задачи. Как видно из фиг. 7, 8, учет нелинейных эффектов приводит к существенному уменьшению напряжений в вершинах второго отверстия. Отметим также, что наличие малого отверстия приводит, в зависимости от положения его центра, либо к уменьшению напряжений в вершине  $A$  большого отверстия (при  $0 < x^c/b_1 < 5$ ), либо к увеличению напряжений в этой вершине (при  $x^c/b_1 > 5$ ).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин В.А. Концентрация напряжений около кругового в момент образования отверстия в теле из вязкоупругого материала // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 5. С. 1079–1082.
2. Levin V.A. Repeatedly superimposed large elastic deformation. // Intern. J. Fracture. 1996. V. 79. № 1. P. R11–R15.
3. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
4. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущих вязкоупругопластических тел. М.: Наука, 1987. 471 с.
5. Арутюнян Н.Х., Зевин А.А. Расчет строительных конструкций с учетом ползучести. М.: Стройиздат, 1988. 257 с.
6. Адамов А.А. Об идентификации модели наследственной вязкоупругости при конечных деформациях // Структурная механика неоднородных сред. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. С. 8–11.
7. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
8. Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
9. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 887 с.
10. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. Киев: Вища шк., 1975. 227 с.
11. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
12. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
13. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1994. 560 с.
14. Левин В.А., Зингерман К.М. О применении численно-аналитических вычислений на ЭВМ для решения задачи об одновременном образовании двух круговых отверстий в теле из вязкоупругого материала (большие деформации) // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО РАН, 1992. С. 161–166.
15. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. М.: Высш. шк., 1976. 277 с.