

УДК 539.376

© 1999 г. К.И. РОМАНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА СТЕРЖНЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ КЕЛЛЕДАЙНА – ДРУКЕРА

Задачи устойчивости и продольного изгиба стержней в условиях ползучести решались в различных постановках [1–3]. В связи с тем, что точное определение критического времени рассматриваемых ниже задач выпучивания (creep buckling) соответствующего катастрофическому нарастанию прогиба, невозможно [4], используются различные приближенные подходы. К числу последних относятся: замена реального поперечного сечения идеальным двутавром [5, 6] или применение теоремы Келледайна – Друкера для приближенного выражения скорости кривизны изогнутой оси стержня [7, 8].

Ниже дано развитие второго направления, заключающееся в изучении влияния различных аппроксимаций дополнительного рассеяния стержня на расчетную величину критического времени.

Рассмотрим пример шарнирно закрепленного сжатого по концам стержня (фиг. 1), имеющего длину l . Полагаем, что в начальный момент времени среднее сечение стержня имеет прогиб A_0 , нарастающий в процессе дальнейшего деформирования под действием силы $P = \text{const}$.

Примем уравнение состояния материала в виде $\dot{\xi} = k\sigma^n$, где ξ – скорость деформации, σ – напряжение, k и n – постоянные материала при данной температуре.

В [8] показано, что скорость изменения кривизны стержня определяется формулой

$$\dot{\kappa} = \frac{kF}{n+1} \frac{\partial}{\partial M} (\Omega_n^{n+1}) \quad (1)$$

где F – площадь поперечного сечения стержня, M – изгибающий момент, зависящий от текущего значения прогиба, Ω_n – функция, имеющая вид

$$\Omega_n = \left(\frac{1}{F} \int \sigma^{n+1} dF \right)^{1/(n+1)}$$

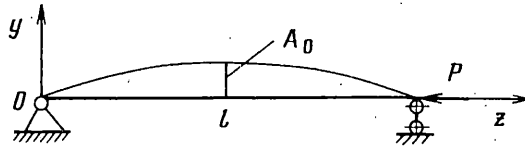
Предполагается, что поперечное сечение стержня имеет две оси симметрии, причем одна из этих осей лежит в плоскости изгибающего момента.

В общем случае точное выражение Ω_n не известно. В частном случае чистого изгиба [8, 9]

$$\Omega_n = MF^{-1/(n+1)} J_n^{-n/(n+1)} \quad (2)$$

где J_n – обобщенный момент инерции сечения.

В соответствии с теоремой Келледайна – Друкера [7] поверхность $\Omega_n = \text{const} = \sigma_*$ с ростом показателя n вкладывается в предшествующие, т.е. поверхности $\Omega_n = \sigma_*$ заключается внутри поверхности $\Omega_1 = \sigma_*$ и вне поверхности $\Omega_\infty = \sigma_*$, где σ_* – пороговое напряжение, ниже которого практически нет ползучести [10, 11].



Фиг. 1

Сказанное дает возможность построить приближенное аналитическое выражение Ω_n для любого n с учетом известных функций Ω_1 и Ω_∞ , соответствующих $n = 1$ (решение линейной теории упругости) и $n \rightarrow \infty$ (предельное состояние).

Примем

$$\Omega_n^2 = (N/F)^2 + (Ma)^2 + \beta(1 - 1/n) \frac{N}{F} Ma \quad (3)$$

$$a = F^{-1/(n+1)} J_n^{-n/(n+1)}$$

где N – нормальная сила; β – параметр, зависящий от формы поперечного сечения стержня, определяемый в процессе решения задачи по методике, изложенной ниже и позволяющий улучшить аппроксимацию Ω_n^2 по сравнению с общепринятой [7] аппроксимацией без параметра β .

В системе координат $N - M$ уравнение кривой $\Omega_n^2 = \sigma_*^2$ представляет собой серию вложенных эллипсов для различных значений n .

Функция (3) построена таким образом, что при $n = 1$ она приводит к равенству $\Omega_n = \Omega_1$, а в случае $N = 0$ эта функция совпадает с (2). В случае же $n \rightarrow \infty$ уравнение (3) дает связь между предельными нагрузками в форме

$$\left(\frac{N}{N^0} \right)^2 + \left(\frac{M}{M^0} \right)^2 + \beta \frac{N}{N^0} \frac{M}{M^0} = 1 \quad (4)$$

где N^0 и M^0 – парциальные предельные нагрузки, каждая из которых является предельной при отсутствии другой.

Параметр β вычисляется с помощью метода наименьших квадратов из условия наилучшей аппроксимации истинной предельной кривой выражением (4).

Рассмотрим методику определения параметра β на примере прямоугольного поперечного сечения. Точное уравнение предельной кривой для этого случая [8] имеет вид

$$\left[\frac{M}{2M^0} + \sqrt{\left(\frac{M}{2M^0} \right)^2 + \left(\frac{N}{N^0} \right)^2} \right]^2 = 1 \quad (5)$$

$$M^0 = \sigma_* b h^2 / 4, \quad N^0 = \sigma_* b h,$$

где b и h – основание и высота прямоугольника, соответственно.

Представим уравнения (4) и (5) в эквивалентной формулировке

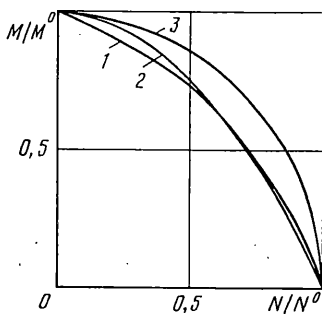
$$f = -\frac{1}{2}\beta x + \frac{1}{2}\sqrt{(\beta x)^2 - 4(x^2 - 1)}$$

и $f = 1 - x^2$ соответственно ($f = M/M^0$ и $x = N/N^0$).

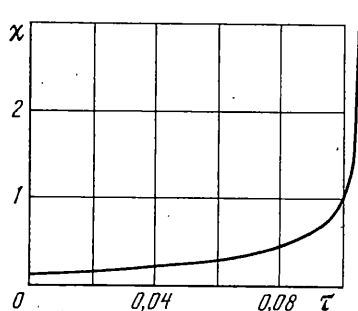
Разобьем интервал $0 \leq x \leq 1$ на m точек и потребуем

$$\partial \Phi / \partial \beta = 0$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^m \left\{ 1 - x_i^2 - \left[-\frac{1}{2}\beta x_i + \frac{1}{2}\sqrt{(\beta x_i)^2 - 4(x_i^2 - 1)} \right]^2 \right\}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Условие минимума ϕ приводит к трансцендентному уравнению, корень которого $\beta = 0,625$ определен численно для $m = 100$ (дальнейшее увеличение точек разбиения практически не приводит к изменению β).

На фиг. 2 кривая 1 построена по уравнению (4) с найденным значением параметра β . Эта кривая значительно лучше аппроксимирует предельную кривую 2, построенную по уравнению (5), чем окружность 3, соответствующая уравнению (4) при $\beta = 0$.

Примем приближенное выражение скорости изменения кривизны изогнутой оси стержня $\dot{\kappa} = \partial^2 \dot{y} / \partial z^2$.

Тогда выражения (1) и (3) позволяют получить уравнение для скорости прогиба независимо от формы поперечного сечения

$$\frac{\partial^2 \dot{y}}{\partial z^2} = kFa \left[\left(\frac{N}{F} \right)^2 + (Ma)^2 + \beta \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{N}{F} Ma \right]^{(n-1)/2} \times \\ \times \left[Ma + \frac{1}{2} \beta \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{N}{F} \right]$$

Приближенное интегрирование этого уравнения по методу Бубнова – Галеркина дает возможность найти критическое время. В частности, для стержня, изображенного на фиг. 1: $N = -P$, $M = -Py$, $y = A \sin(\pi z/l)$, где A – амплитуда изогнутой оси, зависящая от времени. Поэтому потребуем, чтобы

$$\int_0^l -\frac{\pi^2}{l^2} A \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz + kFaP^n \int_0^l \left[F^{-2} + \right. \\ \left. + \left(aA \sin \frac{\pi z}{l} \right)^2 + \beta \left(1 - \frac{1}{n} \right) F^{-1} aA \sin \frac{\pi z}{l} \right]^{1/2(n-1)} \times \\ \times \left[aA \sin \frac{\pi z}{l} + \frac{1}{2} \beta \left(1 - \frac{1}{n} \right) F^{-1} \right] \sin \frac{\pi z}{l} dz = 0$$

Положим в качестве примера $n = 3$. Тогда после интегрирования приходим к дифференциальному уравнению для прогиба

$$\frac{2kP^3 l^2}{\pi^2} dt = \frac{dA}{1/2 a^2 A / F + 3/8 Fa^4 A^3 + 4/3 \beta A^2 a^3 / \pi + 1/9 \beta^2 A a^2 / F + 2/3 \beta a / (\pi F^2)} \quad (6)$$

Как и следовало ожидать, в частном случае $\beta = 0$ получаем решение, приведенное в [8]. Поскольку $\beta \neq 0$, критическое время может быть определено численным интегрированием с учетом начального условия $t = 0$, $A = A_0$ уравнения (6) при $A \rightarrow \infty$.

Найдем, например, критическое время в частном случае стержня с прямоугольным поперечным сечением, для которого $F = bh$, $J_3 = 0,17bh^{7/3}$, $a = 3,78b^{-1}h^{-2}$ и

$$t_* = \frac{\pi^2 b^3 h^5}{2kP^3 l^2} \int_{\chi_0}^{\infty} \frac{d\chi}{76,3\chi^3 + 22,9\beta\chi^2 + (1,59\beta^2 + 7,13)\chi + 0,802\beta} \quad (7)$$

где $\chi = A/h$ – безразмерный прогиб ($\chi_0 = A_0/h$, $\beta = 0,625$).

Пусть $\chi_0 = 0,1$. Тогда критическое время по формуле (7) равно $t_* = 0,524b^3h^5/(kP^3l^2)$.

На фиг. 3 критическое время соответствует асимптоте зависимости $t(\chi)$, где $\tau = 2kP^3l^2t/(\pi^2b^3h^5)$ – безразмерное время.

В случае $\beta = 0$ [8]:

$$t_* = \frac{\pi^2 F^{3/2} J_n^{3/2}}{2kP^3 l^2} \ln \left(\frac{4/3 J_n^{3/2} F^{-3/2} + A_0^2}{A_0^2} \right) = 0,807 \frac{b^3 h^5}{kP^3 l^2}$$

а решение по схеме идеального двутавра [6] дает

$$t_* = \frac{\pi^2 F^{3/2} J_n^{3/2}}{6kP^3 l^2} \ln \left(\frac{4 J_n^{3/2} F^{-3/2} + A_0^2}{A_0^2} \right) = 0,388b^3h^5/(kP^3l^2)$$

Таким образом, применение более совершенной аппроксимации (3) с параметром β приводит к существенному сближению результатов, полученных на основе теоремы Келледайна – Друкера и по схеме идеального двутавра. Интересно, что замена множителя $(1 - 1/n)$ в аппроксимации (3) на множитель $(1 - 1/n^n)$ уменьшает расчетное критическое время до величины $t_* = 0,449b^3h^5/(kP^3l^2)$. Учет параметра β не выводит метод расчета за рамки обычных допущений при использовании теоремы Келледайна – Друкера без параметра β , поэтому можно сделать вывод об уточнении метода, основанного на теореме Келледайна – Друкера, за счет введения параметра β в аппроксимацию Ω_n^2 . Дальнейшее улучшение решения связано с использованием точного выражения для кривизны, приводящего к численным методам интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси стержня [12].

Очевидно, что для оценки точности получаемых значений критического времени целесообразны эксперименты по продольному изгибу стержней в условиях ползучести.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Работнов Ю.Н., Шестериков С.А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 3. С. 406–412.
2. Тергулов И.Г. Изгиб и устойчивость тонких пластин и оболочек при ползучести. – М.: Наука, 1969. 206 с.
3. Куришин Л.М. О постановках задачи устойчивости в условиях ползучести (обзор) // Проблемы теории пластичности и ползучести. М.: Мир, 1979. С. 246–302.
4. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
5. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. 155 с.
6. Романов К.И. Продольный изгиб нелинейно-вязких стержней // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1993. Вып. 33. С. 139–151.
7. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. М.: Мир, 1986. 360 с.

8. Романов К.И. Применение теоремы Келледайна – Друкера к решению задач продольного изгиба стержней в условиях ползучести // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. Алма-Ата: Гылым, 1992. Часть. 3. С. 48–57.
9. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 399 с.
10. Шестериков С.А., Юмашева М.А. Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 86–91.
11. Чадек Й. Ползучесть металлических материалов. М.: Мир, 1987. 302 с.
12. Романов К.И., Чернецов А.А. Анализ продольного изгиба стержня в условиях ползучести // Машиноведение. 1988. № 4. С. 33–35.

Москва

Поступила в редакцию
2.06.1997