МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1999

УДК 539.214:539.374

© 1999 г. А.А. БУРЕНИН, М.В. ГОНЧАРОВ, Л.В. КОВТАНЮК

НЕОБРАТИМЫЕ ДЕФОРМАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ В ОКРЕСТНОСТИ СФЕРИЧЕСКОЙ КАВЕРНЫ ПРИ ВСЕСТОРОННЕМ СЖАТИИ

Приведено решение одномерной нестационарной задачи о конечных упругопластических деформациях, возникающих в окрестности сферического концентратора напряжений при всестороннем сжатии несжимаемой среды.

1. Определяющие соотношения. В декартовой прямоугольной системе координат движений сплошной среды зададим в переменных Эйлера $u_i(x_1, x_2, x_3) = x_i - a_i(x_1, x_2, x_3, t)$, где a_i – начальные, x_i – текущие координаты движущейся точки среды, u_i – компоненты вектора перемещений. Симметричные тензоры обратимых (упругих) e_{ij}^e и необратимых (пластических) e_{ij}^p деформаций введем соотношениями

$$a_{k,i}a_{k,j} = (\delta_{is} - e_{is}^e)(\delta_{st} - 2e_{st}^p)(\delta_{tj} - e_{tj}^e)$$
$$a_{k,j} = \partial a_k / \partial x_j \tag{1.1}$$

Используя уравнение изменения тензора дисторсии $a_{i,j}$:

$$da_{i,j} / dt + a_{i,k}v_{k,j} = 0$$

$$v_i = dx_i / dt = du_i / dt = \partial u_i / dt + v_j u_{i,j}$$

можно получить, согласно (1.1), для тензоров обратимых и необратимых деформаций дифференциальные уравнения их изменения

$$de_{ij}^e / dt = v_{i,j} - b_{ij} - e_{ik}^e v_{k,j} + b_{ik}e_{kj}^e$$
$$de_{ij}^p / dt = \tfrac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}) - e_{ik}^p b_{kj} + b_{ki}e_{kj}^p \tag{1.2}$$
$$b_{ij} = -m_{ik}^{-1} dm_{kj} / dt; \quad a_{i,j} = m_{ik}(\delta_{kj} - e_{kj}^e)$$

Зависимости (1.2) можно рассматривать в качестве дифференциальных определений тензоров обратимых и необратимых деформаций. При этом введенный вспомогательный тензор b_{ij}, обязан удовлетворять тензорному уравнению, которое является следствием условия симметрии тензоров e_{ij}^e и e_{ij}^p:

$$b_{kt}(\delta_{tj} - e_{tj}^e) - (\delta_{kt} - e_{kt}^e)b_{jt} = (\delta_{kt} - e_{kt}^e)v_{t,j} - v_{t,k}(\delta_{tj} - e_{tj}^e)$$

Решение этого уравнения может быть записано в виде

$$b_{ij} = r_{ij} + (\delta_{ik} - e_{ik}^e)t_{kj}$$

$$r_{ij}=\omega_{ij}+M^{-1}[N^2(\varepsilon_{ik}e^e_{kj}-e^e_{ik}\varepsilon_{kj})+N(\varepsilon_{ik}e^e_{ks}e^e_{sj}-e^e_{ik}e^e_{ks}\varepsilon_{sj})+e^e_{ik}\varepsilon_{km}e^e_{ms}e^e_{sj}-e^e_{ik}e^e_{km}\varepsilon_{ms}e^e_{sj}] \tag{1.3}$$

$$2\varepsilon_{ij}=(v_{i,j}+v_{j,i});\quad 2\omega_{ij}=(v_{i,j}-v_{j,i})$$

$$M=2-L_1,\quad N=8-8L_1+3L_1^2-L_2-\tfrac{1}{3}L_1^3+\tfrac{1}{3}L_3$$

$$L_1=e^e_{jj},\quad L_2=e^e_{ij}e^e_{ji},\quad L_2=e^e_{ij}e^e_{jk}e^e_{ki}$$

Тензор t_{ij} в соотношении (1.3) является произвольным симметричным тензором. Можно показать, что при $t_{ij}=0$ все изменение тензора e^p_{ij} в (1.2) сводится к его чистому вращению. Такой случай естественно отождествить с процессами, в которых не происходит изменение необратимых деформаций. Последнее справедливо при упругом деформировании и при разгрузке. В этом случае определение (1.2) тензоров e^e_{ij} и e^p_{ij} упрощается.

$$\frac{de^e_{ij}}{dt}=\varepsilon_{ij}+\tfrac{1}{2}(r_{ik}e^e_{kj}-e^e_{ik}r_{kj}-e^e_{ik}v_{k,j}-v_{k,i}e^e_{kj})$$

$$de^p_{ij}/dt=r_{ik}e^p_{kj}-e^p_{ik}r_{kj} \tag{1.4}$$

Таким образом, в области разгрузки тензоры e^e_{ij} и e^p_{ij} соотношениями (1.4) определяются однозначно. При необратимом деформировании тензор необратимых деформаций e^p_{ij} определен согласно (1.2) и (1.3) с точностью до произвольного симметричного тензора t_{ij}.

Если принять в качестве тензора полных деформаций тензор деформаций Альманси d_{ij}, то получаем следующее его представление через обратимые и необратимые деформации

$$d_{ij}=\tfrac{1}{2}(\delta_{ij}-a_{k,i}a_{k,j})=e^e_{ij}+e^p_{ij}-\tfrac{1}{2}e^e_{ik}e^e_{kj}-e^e_{ik}e^e_{kj}-e^p_{ik}e^e_{kj}+e^e_{ik}e^e_{km}e^e_{mj} \tag{1.5}$$

Положим, что свободная энергия F, как и функция состояния среды, может зависеть только от обратимых деформаций e^e_{ij} и абсолютной температуры T. Необратимые же деформации e^p_{ij} связаны только с диссипацией механической энергии, то есть с производством энтропии S. Следствием закона сохранения энергии

$$\rho\frac{dF}{dt}+\rho\frac{d}{dt}(TS)-\sigma_{ij}v_{i,j}+q_{j,j}=0 \tag{1.6}$$

при такой гипотезе являются для несжимаемой упругопластической среды следующие соотношения:

в областях обратимого деформирования

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\frac{dW(\delta_{kj}-e^e_{kj})}{de^e_{ik}}$$

$$\rho TdS/dt+q_{j,j}=0,\quad W=W(e^e_{ij},\ T)=\rho_0F(e^e_{ij},\ T) \tag{1.7}$$

в областях пластического течения

$$\rho TdS/dt+q_{j,j}=D=\sigma_{ik}(\delta_{kj}-e^e_{kj})t_{ji} \tag{1.8}$$

В соотношениях (1.6)–(1.8) ρ, ρ_0 – плотности среды в текущем и свободном состоянии, q_j – компоненты вектора теплового потока, p – неизвестная функция добавочного гидростатического давления, вызванная предположением о несжимаемости среды. Первое соотношение в (1.7) является аналогом формулы Мурнагана для рассматриваемого случая, второе – уравнение баланса энтропии в областях, где процессы деформирования бездиссипативны. Там, где процесс деформирования связан с накоплением необратимых деформаций, соотношение (1.6) не разделяется на два независимых, как в случае (1.7), и потому может быть представлено в виде (1.8). При этом, как обычно в теории идеальной пластичности, считается, что напряжения в среде полностью определяются обратимыми деформациями, то есть справедливо первое из соотношений (1.7). Источник энтропии D в идеальной пластичности называют диссипативной функцией [1] и определяют зависимостью $D=\sigma_{ij}\varepsilon_{ji}^{p}$. Это позволяет определить тензор t_{ij} в (1.3) и, с другой стороны, связать тензоры ε_{ij}^{p} и e_{ij}^{p}:

$$\varepsilon_{ij}^{p}=\frac{De_{ij}^{p}}{Dt}=\left(\frac{de_{ik}^{p}}{dt}+e_{im}^{p}r_{mk}+r_{mi}e_{mk}^{p}\right)(\delta_{kj}-2e_{kj}^{p})^{-1} \tag{1.9}$$

Символом D/Dt в (1.9) обозначена объективная производная, связывающая тензоры ε_{ji}^{p} и e_{ij}^{p}. Согласно (1.4) в областях разгрузки $\varepsilon_{ij}^{p}=0$.

Для замыкания системы уравнений в областях обратимого деформирования необходимо задать функцию $W(e_{ij}^{e},\ T)$. Если принять условия изотермичности или адиабатичности [2] процесса деформирования, и считать среду изотропной, то можно положить

$$\begin{gathered}W=(a-\mu)I_1+aI_2+bI_1^2-\varkappa I_1I_2-\theta I_1^3\\ I_1=e_{kk}^{e}-\tfrac{1}{2}e_{ij}^{e}e_{ji}^{e},\quad I_2=e_{ij}^{e}e_{ji}^{e}-e_{ij}^{e}e_{jk}^{e}e_{ki}^{e}+\tfrac{1}{4}e_{ij}^{e}e_{jk}^{e}e_{km}^{e}e_{mi}^{e}\end{gathered} \tag{1.10}$$

Согласно (1.10) функция $W(e_{ij}^{e})=W(I_1,\ I_2)$ представляется своими первыми членами разложения в ряд Тейлора относительно свободного состояния, где μ, a, b, $\varkappa$, θ – упругие постоянные. При $b=\varkappa=\theta=0$ из (1.10) следует аналог упругого потенциала Муни [3] в переменных Эйлера, когда еще и $a=0$, то получаем аналог потенциала Трелоара. Формула Мурнагана (1.7) приводит в таком случае к следующей зависимости напряжений от упругих деформаций:

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+2[\mu-(\varkappa+2b)I_1+\varkappa I_2+3\theta I_1^2]e_{ij}^{e}-[4a-(5\varkappa+2b)I_1+\varkappa I_2+3\theta I_1^2]e_{ik}^{e}e_{kj}^{e}+\\ +4(a-\varkappa I_1)e_{is}^{e}e_{sk}^{e}e_{kj}^{e}-(a-\varkappa I_1)e_{is}^{e}e_{sk}^{e}e_{km}^{e}e_{mj}^{e}\end{gathered} \tag{1.11}$$

Когда необратимые деформации отсутствуют, то в (1.10) вместо инвариантов I_1 и I_2 тензора e_{ij}^{e} следует использовать инварианты d_{ss}, $d_{ij}d_{ji}$ тензора деформаций Альманси. Связь напряжений с деформациями в таком случае задается равенством:

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+2[\mu-(\varkappa+2b)d_{kk}+\varkappa d_{st}d_{ts}+3\theta(d_{kk})^2]d_{ij}-4(a-\varkappa d_{kk})d_{im}d_{mj} \tag{1.12}$$

Определяющее соотношение (1.12) является предельным для (1.11) при стремлении к нулю пластических деформаций. Для замыкания системы уравнений в областях пластического течения следует выбрать условие пластичности и принять условие принципа Мизеса. Отметим, что построенная таким способом модель конечных упругопластических деформаций является, по-видимому, простейшей из тех, что можно было бы выписать для случая несжимаемости среды на основе [4–7].

2. Упругое решение. Пусть в центре сферы начального радиуса R_0 имеется сферическая каверна радиуса r_0. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу о равновесии такой сферы при заданных условиях на ее поверхности и при отсутствии давления внутри каверны:

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr}\big|_{r=R} = -P_0, \quad u\big|_{r=R} = R - R_0 \\ &\sigma_{rr}\big|_{r=s_0} = 0, \quad u\big|_{r=s_0} = s_0 - r_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Будем считать, что заданное внешнее давление P_0 обеспечивает на граничной поверхности каверны выполнение условия

$$|\,\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\,|\big|_{r=s_0} = |\,\sigma_{\theta\theta}\,|\big|_{r=s_0} = 2k \tag{2.2}$$

В (2.2) k – предел текучести материала. При внешнем давлении, меньшем P_0, материал сферы будет находиться в упругом состоянии, но при увеличении давления по сравнению с предельным его значением P_0 начинается пластическое течение.

Условие несжимаемости материала в принятых сферических координатах записываем в виде:

$$(1 - u/r)^2(1 - \partial u/\partial r) = 1 \tag{2.3}$$

Решением (2.3) является функция

$$\begin{aligned} &u = [\varphi(t) - r^3]^{1/3} + r \\ &\varphi(t) = R^3(t) - R_0^3 = s^3(t) - r_0^3 \end{aligned} \tag{2.4}$$

В условиях равновесия $\varphi(t) = \mathrm{const}$, $s(t) = s_0$; $R(t) = R = \mathrm{const}$, закон связи напряжений с деформациями (1.12) позволяет вычислить σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$ с точностью до функции $p(r)$:

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr} = -p - \mu a_1(1 - \eta^{4/3}) - \mu a_2(1 - \eta^{2/3}) + \mu a_3(1 - \eta^{-2/3}) + \mu a_4(1 - \eta^{-4/3}) + \\ &+\mu a_5(1 - \eta^{-2}) + \mu a_6(1 - \eta^{-8/3}) + \mu a_7(1 - \eta^{-4}) \\ &\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p + 3(\tfrac{1}{2}\varkappa + \theta)(1 - \eta^2) + (b - \varkappa - \tfrac{15}{2}\theta - \tfrac{1}{4}(\varkappa + 3\theta)\eta^{-2} - \\ &-(b - \tfrac{1}{2}\varkappa - \tfrac{9}{2}\theta)(1 + \eta^{-2/3}))(1 - \eta^{-2/3}) + (\mu - 2a - 5b + \tfrac{13}{4}\varkappa + \\ &+\tfrac{63}{4}\theta + (a + 2b - 4\varkappa - 12\theta)(1 + \eta^{2/3}))(1 - \eta^{2/3}) \\ &a_1 = \mu^{-1}(\tfrac{1}{2}\varkappa + 3\theta), \quad a_2 = \mu^{-1}(2b - \varkappa - 9\theta), \quad a_3 = -2(2a_1 - b\mu^{-1}) \\ &a_4 = 1 - \mu^{-1}(2a + 4b - \tfrac{11}{4}\varkappa - \tfrac{45}{4}\theta), \quad a_5 = \mu^{-1}\,\tfrac{1}{2}\varkappa + a_1 \\ &a_6 = \mu^{-1}(a + b - \tfrac{11}{4}\varkappa - \tfrac{21}{4}\theta), \quad a_7 = \tfrac{3}{4}\mu^{-1}(\varkappa + \theta), \quad \eta = \frac{R^3 - R_0^3}{r^3} - 1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Неизвестную функцию $p = p(r)$ найдем, проинтегрировав уравнение равновесия

$$\sigma_{rr,r} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0$$

с использованием граничных условий (2.1)

$$\mu^{-1}p = -a_1(1 - \eta^{4/3}) - a_2(1 - \eta^{2/3}) + a_3(1 - \eta^{-2/3}) + a_4(1 - \eta^{-4/3}) + a_5(1 - \eta^{-2}) +$$

$$+a_6(1-\eta^{-8/3})+a_7(1-\eta^{-4})+b_1(\beta^6-\eta^2)+b_2(\beta^4-\eta^{4/3})-b_3(\eta+\beta^3)+$$
$$+b_4(\beta^2-\eta_2^{2/3})-b_5(\eta^{1/3}+\beta)+b_6\ln|\eta_2^{1/3}\beta^{-1}|-b_7(\eta^{-1/3}+\beta^{-1})+b_8(\beta^{-2}-\eta_2^{-2/3})- \quad (2.6)$$
$$-b_9(\eta^{-1}+\beta^{-3})-b_{10}(\eta^{-5/3}+\beta^{-5})+b_{11}(\beta^{-6}-\eta_2^{-2})-b_{12}(\eta^{-3}+\beta^{-9})$$
$$\beta=r_0/s_0,\quad b_1=\mu^{-1}(1/2\varkappa+\theta),\quad b_2=\mu^{-1}(1/2a+b-7/4\varkappa-9/2\theta)$$
$$b_3=1-\mu^{-1}(2a+3b-9/4\varkappa+27/4\theta),\quad b_4=\mu^{-1}(\varkappa+2\theta),\quad b_5=-\mu^{-1}(2a+4b-7\varkappa-18\theta)$$
$$b_6=3b_4,\quad b_7=2-\mu^{-1}(4a+6b-9/2\varkappa-27/2\theta),\quad b_8=-\mu^{-1}(a+b-5/2\varkappa-9/2\theta)$$
$$b_9=-b_4,\quad b_{10}=\mu^{-1}(2/5a+2/5b-\varkappa+9/5\theta),\quad b_{11}=-1/4\mu^{-1}(\varkappa+\theta),\quad b_{12}=-3/2b_{11}$$

Если, наконец, учесть, что при $r=s_0$ выполняется условие (2.2), то при подстановке в него вычисленных σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$, получим алгебраическое уравнение для нахождения β:

$$-3(1/2\varkappa+\theta)(1-x^2)-(a+2b-7/2\varkappa-9\theta)(1-x^{4/3})-(\mu-2a-3b+9/4\varkappa+27/4\theta)\times$$
$$\times(x^{-4/3}-x^{2/3})+(b-\varkappa-9/2\theta)(1-x^{-2/3})+3/4(\varkappa+3\theta)(1-x^{-2})+ \quad (2.7)$$
$$+(a+b-5/2\varkappa-9/2\theta)(1-x^{-8/3})+3/4(\varkappa+\theta)(1-x^{-4})=2k$$
$$x=-\beta^3$$

Таким образом, окончательное решение задачи получаем после решения уравнения (2.7). При этом значение P_0 получаем из (2.6) при $\eta=-R_0^3R^{-3}$ и $R^3=R_0^3-(x+1)x^{-1}r_0^3$:

3. Равновесие при необратимых деформациях. Рассмотрим другой предельный случай, когда

$$u|_{r=0}=-r_0 \quad (3.1)$$

т.е. в результате необратимого деформирования каверна исчезает (схлопывается) и среда находится в равновесии. Согласно (2.4) поле перемещений в сфере определяется в этом случае соотношением:

$$u=-(r_0^3+r^3)^{1/3}+r \quad (3.2)$$

По известным (3.2) перемещениям напряжения в упругой области выражаются по формулам (2.5), где $\eta=-1-r_0^3r^{-3}$. Подстановка вычисленных таким образом напряжений в условие пластичности Треска (2.2) позволяет вычислить размер пластической области $r=r_1$. Уравнение для вычисления значения r_1 имеет вид (2.7), где $x=\gamma=-1-r_0^3r_1^{-3}$.

Напряжения в пластичности области, кроме условия текучести, удовлетворяют уравнению равновесия. Потому $\sigma_{rr,r}+4k/r=0$.

Отсюда

$$\sigma_{rr}=-4k\ln|r|+c$$
$$\sigma_{\theta\theta}=-2k(1+2\ln|r|)+c \quad (3.3)$$

Неизвестная функция $P(r)=p-P_0$ так же, как и ранее, найдется согласно условию на внешней поверхности сферы $R=(R_0^3-r_0^3)^{1/3}$ и может быть вычислена согласно (2.6), если в нем принять $\eta=-1-r_0^3r^{-3}$, $\beta=-R(R_0^3-r_0^3)^{-1/3}$.

Постоянную c найдем из условий равновесия напряжений, вычисляемых согласно (3.3) и (2.5) при $r = r_1$:

$$c = 4k\ln|r_1| - P(r_1) - \mu a_1(1-\gamma^{4/3}) - \mu a_2(1-\gamma^{2/3}) + \mu a_3(1-\gamma^{-2/3}) +$$

$$+\mu a_4(1-\gamma^{-4/3}) + \mu a_5(1-\gamma^{-2}) + \mu a_6(1-\gamma^{-8/3}) + \mu a_7(1-\gamma^{-4})$$

4. Пластическое течение. Рассмотрим нестационарную задачу о пластическом течении в окрестности сферической каверны. Положим, что положение граничной поверхности каверны вычисляется согласно (2.7). Это означает, что внешнее давление P_0 таково, что на этой поверхности $r = s_0$ выполняется условие текучести Треска (2.2). Будем считать, что начиная с момента времени $t = 0$ внешнее давление меняется по закону

$$P|_{r=R(t)} = P_0(1+f(t)), \quad f(0)=0 \tag{4.1}$$

Такое нагружение приведет к тому, что условие пластичности (2.2) будет выполняться при $t = 0$ не только на внутренней границе среды $r = s(t)$, но и в некоторой примыкающей к ней области. То есть область пластического течения будет ограничена поверхностями $s(t)$ и $r_1(t)$ ($s(t) \leqslant r \leqslant r_1(t)$). В момент времени $t = 0$ $r_1(0) = s(0) = s_0$.

Перемещение среды будет определяться зависимостью (2.4), согласно которой отличная от нуля компонента скорости будет вычисляться зависимостью $v_r = \frac{1}{3}\varphi'(t)r^{-2}$.

В области пластического течения уравнение движения среды

$$\sigma_{rr,r} = -4k/r + \tfrac{1}{3}\rho(\varphi''(t)r^{-3} - \tfrac{2}{3}\varphi'^2(t)r^{-5})$$

можно проинтегрировать

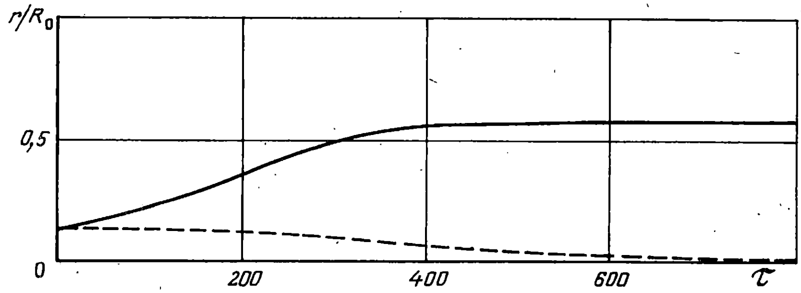
$$\sigma_{rr} = 4k\ln|s(t)r^{-1}| + \tfrac{1}{3}\rho\varphi''(t)(s^{-1}(t) - r^{-1}) - \tfrac{1}{18}\rho\varphi'^2(t)(s^{-4}(t) - r^{-4}) \tag{4.2}$$

В (4.2) учитывается, что при $r = s(t)$ напряжение $\sigma_{rr} = 0$. С другой стороны, интеграл уравнения движения в упругой области $r_1(t) \leqslant r \leqslant R(t)$, с учетом граничного условия (4.1), может быть записан в виде

$$\begin{aligned}\mu^{-1}\sigma_{rr} &= b_1(y^2 - m^{-6}) + b_2(y^{4/3} - m^{-4}) + b_3(y + m^{-3}) + b_4(y^{2/3} - m^{-2}) +\\ &+ b_5(y^{1/3} + m^{-1}) - b_6\ln|y^{1/3}m^{-1}| + b_7(y^{-1/3} + m) + b_8(y^{-2/3} - m^2) +\\ &+ b_9(y^{-1} + m^3) + b_{10}(y^{-5/3} + m^5) + b_{11}(y^{-2} - m^6) - b_{12}(y^{-3} - m^9) -\\ &- P_0(1+f(t)) + \tfrac{1}{3}\rho\varphi''(t)(R^{-1}(t) - r^{-1}) - \tfrac{1}{18}\rho\varphi'^2(t)(R^{-4}(t) - r^{-4})\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$y = \varphi(t)r^{-3} - 1, \quad m(t) = R_0^{-1}R(t)$$

Сравнение (4.3) с (4.2) при $r = r_1(t)$ позволяет получить дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi = \varphi(t)$. Положение граничной поверхности $r = r_1(t)$ пластической области определяется условием пластичности (2.2). Полученное таким способом обыкновенное дифференциальное уравнение при заданной функции $f(t)$ может быть проинтегрировано численно. Начальные условия задачи Коши, согласно приведенной постановке задачи, имеют вид: $\varphi(0) = s_0^3 - r_0^3$, $\varphi'(0) = 0$. Постоянная s_0 определяется из решения приведенной выше вспомогательной задачи об упругом равновесии. Другое вспомогательное решение является асимптотикой расчетов при $t \to \infty$.



На фигуре приведены характерные зависимости $r_1(\tau)/R_0$ (сплошная кривая) и $s(\tau)/R_0$ (штриховая кривая) при $a\mu^{-1} = 0{,}8$; $b\mu^{-1} = 2$; $\varkappa\mu^{-1} = 0{,}2$; $\theta\mu^{-1} = 0{,}1$; $\varkappa\mu^{-1} = 0{,}01$. Безразмерное давление на внешней границе среды при этом задавалось в виде $\mu^{-1}P = \mu^{-1}P_0(1 + \xi\tau)$, $\xi = \alpha R_0 \rho^{1/2} P_0^{-1} \mu^{-1/2}$, где τ – безразмерное время. В расчетах, приведенных на фигуре $\xi = 0{,}02$; $r_0/R_0 = 0{,}125$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
2. *Бленд Д.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
3. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
4. *Lee E.H.* Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans ASME. Ser. E. J. Apll. Mech. 1969. V. 36. No. 1. P. 1–6.
5. *Кандауров В.И.* Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // ПМТФ. 1982. № 4. С. 133–139.
6. *Шитиков А.В., Быковцев Г.И.* Конечные деформации упругопластических сред // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. № 1. С. 59–62.
7. *Мясников В.П.* Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. Дальневост. отд-ния РАН. 1996. № 4. С. 8–14.

Владивосток

Поступила в редакцию
5.02.1997