

УДК 539.214:539.374

© 1999 г. С.Е. АЛЕКСАНДРОВ, Д. ВИЛОТИЧ, Р.В. ГОЛЬДШТЕЙН, Н.Н. ЧИКАНОВА

### **К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДИАГРАММЫ ПЛАСТИЧНОСТИ**

При оптимизации параметров технологических процессов обработки металлов давлением (ОМД) одним из основных критериев является возможность производства изделий без дефектов. Существуют различные теоретические подходы для анализа разрушения в процессах ОМД. В [1–4] был использован классический вариационный принцип теории идеально пластического тела (метод верхней оценки), чтобы предсказать начало разрушения при экструзии и прокатке. Очевидным недостатком этого подхода является отсутствие критерия разрушения в модели. Модификация вариационного принципа, предложенная в [5], позволила ввести критерий разрушения в напряжениях (критерий максимального напряжения). Анализ разрушения при прокатке трехслойных полос, основанный на этом принципе, был выполнен в [6]. Несмотря на широкое распространение метода верхней оценки при анализе процессов ОМД, включая численное моделирование [7, 8], принципиальные трудности возникают при исследовании некоторых установившихся процессов (если материал не идеально пластический или если форма очага деформации неизвестна заранее) и при использовании многих законов трения. Другой подход к анализу разрушения в процессах ОМД основан на введении в модель параметра поврежденности. В некоторых моделях этот параметр определяется по рассчитанному ранее напряженно-деформированному состоянию [9], в других – напряженно-деформированное состояние и параметр поврежденности определяются из единой системы уравнений [10, 11]. Такие модели отвечают реальной картине разрушения, происходящего в пластичных материалах. Однако, для инженерных приложений решения по этим моделям, особенно по моделям типа [10, 11], слишком сложны. Кроме того, весьма трудоемкими являются эксперименты по определению параметров, входящих в эти модели. Возможный набор экспериментов по определению параметров одной из моделей предложен в [12]. В связи с этим в инженерной практике для предсказания разрушения как при листовой штамповке [13], так и при объемных операциях ОМД часто используется диаграмма пластичности [14, 15]. Обзор работ по диаграммам пластичности приведен в [16]. Поскольку диаграмма пластичности не учитывает влияния истории деформирования, а лишь отражает зависимость предельной деформации от вида напряженного состояния, то при сложных путях нагружения требуются дополнительные гипотезы. Во многих случаях эти гипотезы также вводят понятие меры поврежденности материала [16]. Другой критерий предложен в [17], и позволяет использовать непосредственно исходную диаграмму пластичности для оценки вероятности разрушения. В публикуемой работе исследуются некоторые свойства решений, необходимых для применения этого подхода. Исходная диаграмма пластичности строится в координатах "степень трехосности напряженного состояния" – "эквивалентная пластическая деформация", учитывая, таким образом, два главных фактора, определяющих разрушение в пластичных металлах.

Осадка инструментами различной формы является распространенным видом испытаний при построении диаграммы пластичности [18, 19]. Одним из основных недостатков такого вида испытаний является трение, которое усложняет картину течения. В связи с этим расчеты часто основаны на достаточно грубых предположениях, таких как метод тонких сечений [20–22]. Уточненные расчеты возможны

с использованием других приближенных методов, например [23], тем не менее сам закон трения в процессах ОМД представляет значительные трудности при моделировании [24–26], и может сильно влиять на результат вычислений. Однако, во многих случаях, в зависимости от параметров процесса и свойств материала, разрушение наступает на свободной поверхности образца: при осадке цилиндрических образцов [19], при растяжении образцов с выточками, например [27, 28], при осадке плит инструментом сложной формы [17]. Это обстоятельство используется в публикуемой работе, чтобы показать, что в этих случаях параметр, введенный в [17], может быть определен по измерениям деформации на свободной поверхности, что относительно легко может быть выполнено, например методом делительных сеток [29–31], методом микроструктурных измерений [32] и другими известными экспериментальными методами. Предполагается, что материал подчиняется условию пластичности Мизеса и ассоциированному закону течения. Предложенный подход используется для определения точки на диаграмме пластичности [15], по результатам осадки диска сферическими бойками.

**1. Диаграмма пластичности.** Распространенная диаграмма пластичности (например [15]), показана схематически на фиг. 1. В [15] предполагалось, что диаграмма может быть построена по трем испытаниям: одноосное растяжение, чистое кручение и одноосная осадка, в предположении однородного напряженно-деформированного состояния. По осям координат откладываются эквивалентная пластическая логарифмическая деформация, равная в этих случаях накопленной пластической деформации  $e_{eq}$ , которая определяется уравнением

$$de_{eq}/dt = \dot{e}_{eq} = (2/3)^{1/2}(D_{ij}D^{ij})^{1/2} \quad (1.2)$$

( $t$  – время;  $D_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформации), и параметр  $\beta$ , характеризующий напряженное состояние

$$\beta = 3\sigma/\sigma_{eq} \quad (1.2)$$

Здесь  $\sigma$  – среднее напряжение,  $\sigma_{eq}$  – эквивалентное напряжение

$$\sigma_{eq} = (3/2)^{1/2}(s_{ij}s^{ij})^{1/2} \quad (1.3)$$

и  $s_{ij}$  – компоненты девиатора напряжений. Для материала, подчиняющегося условию пластичности Мизеса, имеем

$$\sigma_{eq} = \sigma_Y \quad (1.4)$$

Здесь  $\sigma_Y$  – предел текучести при одноосном растяжении (сжатии) – известная функция  $e_{eq}$ . Из (1.2) и (1.4) следует, что

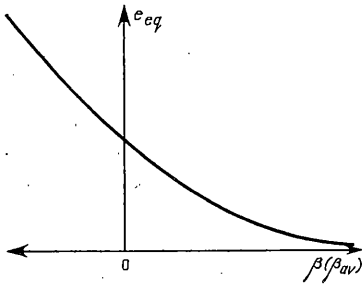
$$\beta = 3\sigma/\sigma_Y \quad (1.5)$$

Очевидно, что в случае однородных полей напряжений и деформаций имеем  $\beta = 1$  при одноосном растяжении,  $\beta = 0$  при чистом кручении и  $\beta = -1$  при одноосном сжатии.

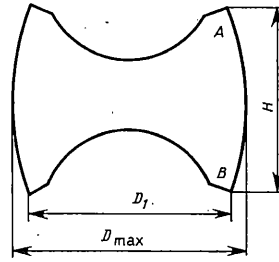
Для уточнения диаграммы деформируемости необходимы другие виды испытаний, в частности осадка образцов инструментом различной формы [18, 19]. В этом случае напряженно-деформированное состояние в очаге деформации не является однородным и, кроме того, величина  $\beta$  изменяется в процессе деформации. Для таких испытаний (и при приложении диаграммы пластичности к анализу технологических процессов) вводится осредненное значение [17]

$$\beta_{av} = e_{eq}^{-1} \int_0^{e_{eq}} \beta de_{eq} \quad (1.6)$$

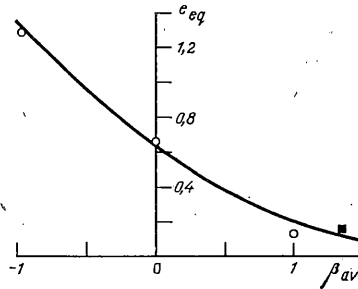
которое откладывается вдоль горизонтальной оси диаграммы пластичности (фиг. 1). Под знаком интеграла в (1.6) стоит величина  $\beta$ , определенная (1.2), а интеграл должен



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

быть вычислен вдоль траектории материальной точки, в которой наступило разрушение. Очевидно, что при  $\beta = \text{const}$  величина  $\beta_{av} = \beta$ . В дальнейшем под диаграммой пластичности будет пониматься кривая в координатах  $\beta_{av} - e_{eq}$ , которая определяет условия возникновения разрушения при произвольном пути деформирования.

**2. Соотношения на свободной поверхности.** Во многих случаях разрушение наступает на свободной поверхности образца [17, 19, 27, 28]. Это обстоятельство может быть использовано для развития эффективного теоретико-экспериментального метода определения точек диаграммы пластичности.

Рассмотрим деформирующуюся поверхность  $\Omega$ , состоящую из одних и тех же материальных точек, на которой отсутствуют напряжения. Введем в некоторой точке  $M$  этой поверхности ортонормированный базис  $e_1 e_2 e_3$  так, что вектор  $e_3$  направлен всегда по нормали к  $\Omega$ , вектор  $e_2$  совпадает по направлению с материальным волокном  $d\xi_2$ , лежащим на поверхности  $\Omega$ , вектор  $e_1$  перпендикулярен к  $e_2$  и  $e_3$  и базис  $e_1 e_2 e_3$  формирует правую систему координат. Вообще говоря, в процессе деформации точка  $M$  будет перемещаться, а базис  $e_1 e_2 e_3$  вращаться относительно некоторой системы координат, фиксированной в пространстве. Однако, всегда можно сообщить рассматриваемому телу такие движения (перемещения и вращения как единого целого), что базис  $e_1 e_2 e_3$  не будет изменяться со временем для произвольной точки  $M$ . Очевидно, что напряженно-деформированное состояние не изменяется при таком преобразовании движения. Таким образом, в дальнейшем считаем, что базис  $e_1 e_2 e_3$  не изменяется в процессе деформации.

Пусть  $A$  – матрица градиента деформаций, зависящая от времени (или любого монотонно возрастающего параметра). В начале деформации

$$A = I \quad (2.1)$$

где  $I$  – единичная матрица. Положение материального волокна  $d\xi_2$  в любой момент времени определяется вектором  $dx_2$

$$dx_2 = Ad\xi_2 \quad (2.2)$$

В выбранной системе координат имеем

$$\mathbf{dx}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ dx_{22} \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{d\xi}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ d\xi_{22} \\ 0 \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.2), находим для элементов матрицы  $\mathbf{A}$

$$A_{12} = 0, A_{32} = 0 \quad (2.4)$$

Рассмотрим теперь материальное волокно  $\mathbf{d\xi}_1$ , которое в начальный момент времени совпадало по направлению с вектором  $\mathbf{e}_1$ . Его положение в последующие моменты времени определяется вектором  $\mathbf{dx}_1$

$$\mathbf{dx}_1 = \mathbf{A} \mathbf{d\xi}_1 \quad (2.5)$$

В выбранной системе координат имеем

$$\mathbf{dx}_1 = \begin{vmatrix} dx_{12} \\ dx_{22} \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{d\xi}_1 = \begin{vmatrix} d\xi_{11} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.5), получаем

$$A_{31} = 0 \quad (2.7)$$

Из (2.4) и (2.7) следует, что матрица  $\mathbf{A}$  и транспонированная матрица  $\mathbf{A}^T$  имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

Направление главных осей тензора искажений [33] совпадает с направлением главных осей матрицы  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  (например, [34]). В дальнейшем основные значения будут иметь элементы  $B_{13} = B_{31}$  и  $B_{23} = B_{32}$  матрицы  $\mathbf{B}$ , которые, вследствие (2.8) и (2.9), определяются выражениями

$$B_{13} = B_{31} = A_{11}A_{13} + A_{21}A_{23}, \quad B_{23} = B_{32} = A_{22}A_{23} \quad (2.10)$$

Производная матрица  $\mathbf{A}$  по времени,  $\dot{\mathbf{A}}$ , представима в виде (например [35])

$$\mathbf{L} = (\mathbf{D} + \mathbf{W}) = \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{D} = (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \mathbf{W} = (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (2.11)$$

где  $\mathbf{A}^{-1}$  – матрица, обратная к  $\mathbf{A}$ . В выбранной системе координат для изотропного материала тензор скоростей деформаций  $\mathbf{D}$  имеет вид

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

По определению

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & 0 & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & 0 \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

Из (2.11), (2.12) и (2.13) следует, что

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} + W_{12} & W_{13} \\ D_{21} + W_{21} & D_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & D_{33} \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

Учитывая, что матрица  $\mathbf{A}$  имеет вид (2.8) в любой момент времени и подставляя (2.8) и (2.14) в (2.11), получим

$$\dot{A}_{13} = D_{11}A_{13} + (D_{12} + W_{12})A_{23} + W_{13}A_{33} \quad (2.15)$$

$$\dot{A}_{23} = (D_{21} + W_{21})A_{13} + D_{22}A_{23} + W_{23}A_{33} \quad (2.16)$$

$$0 = W_{31}A_{11} + W_{32}A_{21} \quad (2.17)$$

$$0 = W_{32}A_{22} \quad (2.18)$$

Из (2.17) и (2.18) следует, что при произвольной деформации  $W_{31} = 0$  и  $W_{32} = 0$ . Из свойства тензора  $\mathbf{W}$ ,  $W_{ij} = -W_{ji}$ , следует, что  $W_{13} = 0$  и  $W_{23} = 0$ . Тогда, уравнения (2.15) и (2.16) преобразуются к виду

$$\dot{A}_{13} = D_{11}A_{13} + (D_{12} + W_{12})A_{23}$$

$$\dot{A}_{23} = (D_{21} + W_{21})A_{13} + D_{22}A_{23}$$

Решение этих уравнений, удовлетворяющее начальному условию (2.1), имеет форму

$$A_{13} = 0, A_{23} = 0 \quad (2.19)$$

Из (2.10) и (2.19) следует, что  $B_{13} = B_{31} = 0$ ,  $B_{23} = B_{32} = 0$ . Таким образом, вектор  $\mathbf{e}_3$  определяет главное направление тензора  $\mathbf{B}$  и, следовательно, тензора искажений.

Рассмотрим материальное волокно  $d\xi_3$ , которое в начальный момент было направлено перпендикулярно поверхности  $\Omega$  в точке  $M$ . Поэтому, в начальный момент

$$d\xi_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ d\xi_3 \end{vmatrix} \quad (2.20)$$

Положение вектора  $d\xi_3$  после деформации,  $d\mathbf{x}_3$ , определяется уравнением  $d\mathbf{x}_3 = \mathbf{A}d\xi_3$ . Подставляя в это уравнение (2.20) и (2.8) с учетом (2.19), найдем

$$d\mathbf{x}_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ A_{33}d\xi_3 \end{vmatrix}$$

Таким образом, в течении всего процесса направление вектора  $d\xi_3$  совпадает с одной из главных осей тензора искажений. Главная скорость деформации  $D_3$  связана с главным относительным удлинением  $\lambda_3$  соотношением [34]

$$D_3 = \dot{\lambda}_3 / \lambda_3 \quad (2.21)$$

Это уравнение не зависит от истории деформации. Однако в рассматриваемом случае важно, что в точке  $M$  оно выполняется для одного и того же материального волокна  $d\xi_3$ .

На свободной поверхности главное напряжение  $\sigma_3 = 0$ . Поэтому соответствующая девиаторная компонента,  $s_3$ , определяет среднее напряжение

$$\sigma = -s_3 \quad (2.22)$$

Из закона течения, ассоциированного с (1.4), следует

$$D_3 = \frac{3}{2} \frac{\dot{e}_{eq}}{\sigma_Y} s_3 \quad (2.23)$$

Подставляя (2.22) в (1.5), получим в точке  $M$

$$\beta = -3s_3 / \sigma_Y \quad (2.24)$$

**3. Условия разрушения на свободной поверхности.** Пусть разрушение произошло в точке  $M$  в момент времени  $t_*$  и накопленная эквивалентная деформация в точке  $M$  в этот момент времени была  $e_{eq}^*$ . Тогда, соответствующая величина  $\beta_{av}^*$  может быть определена из (1.6)

$$\beta_{av}^* = e_{eq}^{-1*} \int_0^{e_{eq}^*} \beta de_{eq} = e_{eq}^{-1*} \int_0^{t_*} \beta \dot{e}_{eq} dt \quad (3.1)$$

Из (2.23) и (2.4) следует, что (3.1) может быть представлено в форме

$$\beta_{av}^* = -2e_{eq}^{-1*} \int_0^{t_*} D_3 dt \quad (3.2)$$

Подставляя (2.21) в (3.2) и учитывая, что  $d\xi_3$  в каждый момент времени совпадает с  $e_3$ , найдем

$$\beta_{av}^* = -2e_{eq}^{-1*} \ln(\lambda_{3*}) \quad (3.3)$$

Здесь  $\lambda_{3*}$  – значение  $\lambda_3$  в момент разрушения. Введем главные относительные удлинения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Материальные волокна, относительные удлинения которых равны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , лежат на поверхности  $\Omega$ , но не обязательно совпадают с векторами  $e_1$  и  $e_2$ . Из (3.3) следует, что  $\beta_{av}^*$  определяется из кинематических характеристик процесса. Тем не менее экспериментальное определение этой величины затруднительно, ввиду того, что  $\lambda_{3*}$  должно быть измерено для материального волокна, находящегося внутри образца. Однако, учитывая условие несжимаемости,  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ , уравнение (3.3) преобразуется к виду

$$\beta_{av}^* = 2e_{eq}^{-1*} \ln(\lambda_{1*} \lambda_{2*}) \quad (3.4)$$

Здесь  $\lambda_{1*}$  и  $\lambda_{2*}$  – величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в момент разрушения. Поскольку эти величины определяются перемещениями точек плоскости  $\Omega$  в момент разрушения, то их измерение может быть выполнено известными методами, например [29–31]. Для определения величины  $e_{eq}^*$ , входящей в определение диаграммы пластичности и в (3.4), необходимо, как следует из (1.1), аналогичные измерения выполнять для различных стадий процесса деформирования.

Таким образом, если разрушение происходит на свободной поверхности, то точка на диаграмме пластичности определяется перемещениями точек свободной поверхности. Кроме того, условия трения не входят в окончательные уравнения, что не требует выбора закона трения. (Трение, конечно, влияет на процесс разрушения. Однако, это влияние будет сказываться на величинах замеренных относительных удлинений.) Отметим также, что закон упрочнения, который определяет зависимость  $\sigma_Y = \sigma_Y(e_{eq})$ , также не входит явно в эти уравнения, что является дополнительным преимуществом при интерпретации экспериментальных результатов.

**4. Осадка сферическими бойками.** Осадка плоского стального (химический состав: 0,32–0,39% С; 0,15–0,35% Si; 0,5–0,8 % Mn) диска диаметром  $D_0 = 30$  мм и высотой  $H_0 = 20$  мм была произведена сферическими бойками радиусом 15 мм до начала разрушения, которое во всех случаях (были испытаны три идентичных образца) наступало на боковой свободной поверхности диска. Отметим, что методы анализа, развитые для процессов внедрения шарика в тело значительно больших размеров (такие методы также часто используются для определения свойств материала, например [36, 37]), не могут быть применены в рассматриваемом случае, так как картины пластического течения совершенно разные.

Форма образца на произвольной стадии процесса показана схематически на фиг. 2. На этой фигуре также даны обозначения геометрических размеров. Ввиду осевой симметрии выполняется точное соотношение

$$\lambda_1 = D_{\max}/D_0 \quad (4.1)$$

Здесь  $D_{\max}$  – диаметр диска на плоскости симметрии. Определим величину  $\lambda_2$  приближенно. Предположим, что кривая  $AB$  (фиг. 2) является дугой окружности. В этом случае длина этой кривой  $L_{AB}$  может быть определена по измеренным значениям  $H$  и  $D_1$  (фиг. 2). Тогда,

$$\lambda_2 = L_{AB}/H_0 \quad (4.2)$$

Используя средние значения замеренных величин (по трем образцам) и уравнения (4.1) и (4.2), можно найти  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и, используя полученные теоретические результаты, величины

$$\beta_{av}^* = 1,347, \quad e_{eq}^* = 0,155 \quad (4.3)$$

Стандартные испытания (одноосное растяжение, чистое кручение и одноосное сжатие) для этой же стали были выполнены в [17] и дали следующие результаты:  $e_{eq}^* = 0,133$  при  $\beta = 1$ ,  $e_{eq}^* = 0,663$  при  $\beta = 0$ ,  $e_{eq}^* = 1,291$  при  $\beta = -0,96$ .

В последнем случае при анализе напряженного состояния было учтено бочкообразование, которое уменьшило величину  $|\beta|$ . На фиг. 3 показаны результаты этих испытаний (светлые точки), темная точка, определенная данными (4.3), и аппроксимация всех испытаний полиномом второй степени, которая представляется уравнением

$$e_{eq} = 0,639 - 0,568b_{av} + 0,138\beta_{av}^2 \quad (4.4)$$

Из фиг. 3 видно, что вновь полученная точка подтверждает основную форму кривой и, в то же время, указывает, что точка, соответствующая  $\beta = 1$ , предсказывает, видимо, заниженное значение  $e_{eq}$ . По всей видимости, это происходит потому, что при анализе экспериментов на растяжение не было принято во внимание шейкообразование, которое обязательно присутствует при испытаниях металлов. Поскольку, как следует из экспериментальных и теоретических результатов [38],  $e_{eq}$  распределена достаточно однородно в минимальном сечении образца, а  $\sigma$  выше в центре образца, то при более точной интерпретации результатов экспериментов на одноосное растяжение, выполненных в [17], точка (соответствующая  $\beta = 1$  на фиг. 3) сместилась бы вправо, приближаясь к линии, определенной (4.4). На это обстоятельство при проведении экспериментов на растяжение обращалось внимание также в [15].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Avitzur B. Analysis of central bursting defects in extrusion and wire drawing // Trans. ASME J. Engng Industr. 1968. V. 90. N 1. P. 79–91.
2. Avitzur B. Study of flow through conical converging dies // Metal Forming: Interrelation between theory and practice / Ed. A.L. Hoffmanner. New York; London: Plenum Press, 1971. P. 1–46.

3. Avitzur B., Choi J.C. Analysis of central bursting defects in plane strain drawing and extrusion // Trans. ASME. J. Engng Industr. 1986. V. 108. N 4. P. 317–321.
4. Turczyn S. The effect of the roll-gap shape factor on internal defects in rolling // J. Mater. Process. Technol. 1996. V. 60. N 1–4. P. 275–282.
5. Александров С.Е., Гольдштейн Р.В. Вариационный принцип в теории пластического течения с учетом образования трещин отрыва // Докл. РАН. 1995. Т. 342. № 4. С. 484–486.
6. Alexandrov S., Chicanova N. Upper bound of torsion moment and fracture by rolling of three layer sandwich sheets // J. Technol. Plasticity. 1995. V. 20. N 1–2. P. 59–72.
7. Kobayashi S. A review on the finite-element method and metal forming process modeling // J. Appl. Metalworking. 1982. V. 2. N 3. P. 163–169.
8. Kobayashi S., Oh S.-I., Altan T. Metal forming and the finite-element method. New York: Oxford Univ. Press. 1989. 402 p.
9. Богатов А.А. О разрушении металла при обработке давлением // Кузнечно-штамповочное производство. 1997. № 8. С. 2–7.
10. Bontcheva N., Iankov R. Numerical investigation of the damage process in metal forming // Engng Fract. Mech. 1991. V. 40. N 2. P. 387–393.
11. Alberti N., Barcellona A., Cannizzaro L., Micari F. Prediction of ductile fractures in metal-forming processes: An approach based on the damage mechanics // CIRP Annals. 1994. V. 43. N 1. P. 207–210.
12. Lemaitre J. Formulation and identification of damage kinetic constitutive equations // Continuum Damage Méchanics. Theory and Applications / Eds D. Krajancovic and J. Lemaitre. Wien: Springer, 1985. P. 37–89.
13. Embury J.D., LeRoy G.H. Failure maps applied to metal deformation processes // Advances in Research on the Strength and Fracture of Materials / Ed. D.M.R. Taplin. New York: Pergamon Press, 1978. V. 1. P. 15–41.
14. Пластичность и разрушение // Под ред. В.Л. Колмогорова. М.: Металлургия. 1977. 336 с.
15. Vujovic V., Shabaik A.H. A new workability criterion for ductile metals // Trans. ASME. J. Engng Mater. Technol. 1986. V. 108. N 3. P. 245–249.
16. Огородников В.А. Оценка деформируемости металлов при обработке давлением. Киев: Вища шк., 1983. 175 с.
17. Vilotic D. Ponasanje celicnih materijala u razlicitim obradnim sistemima hladnog Zapreminskog deformisanja. Novi Sad; Univ. Novi Sad, 1987. 323 с.
18. Vilotic D., Shabaik A.H. Analysis of upsetting with profiling dies // Trans. ASME. J. Engng Mater. Technol. 1985. V. 107. N 4. P. 261–264.
19. Lahoti G.D., Semiatin S.L. Review of forging: Past history, recent advances // Computer Simulation in Materials Sciences / Eds R.J. Arsenault et al. Metals Park: ASM Intern., 1988. P. 1–28.
20. Vilotic D., Vujovic V., Plancak M., Trbojevic I., Francuski P. General solution of contact stress and forming load in upsetting of cylinder by conical dies // J. Technol. Plasticity. 1993. V. 18. N 1–2. P. 59–66.
21. Vilotic D., Vujovic V., Plancak M. Determination of contact stress in upsetting of cylinder by concave dies // Metallurgy and New Materials Researches. 1994. V. 2. N 1–2. P. 105–113.
22. Vilotic D., Plancak M., Vujovic V., Milutinovich M., Gelei S. Theoretical solution of contact stresses and forming load in upsetting of cylinder by spherical dies // J. Technol. Plasticity. 1996. V. 21. N 1–2. P. 1–10.
23. Alexandrov S., Chikanova N., Vilotic D. Compression of a block between cylindrical dies and its application to the workability diagram // Advanced Methods in Materials Processing Defects / Eds M. Predeleanu and P. Gilormini. Amsterdam: Elsevier, 1997. P. 247–256.
24. Thomsen E.G. Friction in forming processes // CIRP Annals. 1969. V. 17. N 2. P. 187–193.
25. Wilson R.D.W. Friction modeling in forging // Computer simulation in materials science / Eds R.J. Arsenault, et al. J. Metals Park: ASM Intern., 1988. P. 237–267.
26. Wang F., Lenard J.G. An experimental study of interfacial friction-hot ring compression // Trans. ASME. J. Engng Mater. Technol. 1992. V. 114. N 1. P. 13–18.
27. Needleman A., Tvergaard V. An analysis of ductile rupture in notched bars // J. Mech. Phys. Solids. 1984. V. 32. N 6. P. 461–490.
28. Alexandrov S.E., Goldstein R.V. Distributions of stress and plastic strain in notched tensile bars // Intern. J. Fracture. 1998. V. 91. N 1. P. 1–11.
29. Дель Г.Д., Новиков Н.А. Метод делительных сеток. М.: Машиностроение, 1979. 144 с.



30. *Иванов К.М.* Оценка точности определения компонентов конечной деформации методом делительных сеток // Изв. вузов. Машиностроение. 1994. № 1–3. С. 66–70.
31. *Vilotic D., Plancak M., Trbojevic I.* Stress state in the critical zone in upsetting of prismatic specimen by cylindrical dies and material formability // Metallurgy and New Materials Researches. 1997. V. 5. N 3. P. 31–40.
32. *Ульянов Э.И., Иванов К.М.* Точность определения компонентов деформации в процессах холодной штамповки методом микроструктурных измерений // Изв. вузов. Машиностроение. 1994. № 1–3. С. 89–94.
33. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
34. *Hill R.* Aspects of invariance in solid mechanics // Advances in Applied Mechanics. / Ed. Chia-Shun Yih. New York: Acad. Press, 1978. V. 18. P. 1–75.
35. *Gurtin M.E., Spear K.* On the relationship between the logarithmic strain rate and the stretching tensor // Intern. J. Solids Structures. 1983. V. 19. N 5. P. 437–444.
36. *Cseh G., Chinh N.Q., Tasnadi P., Juhasz A.* Indentation test for the investigation of high-temperature plasticity of materials // J. Mater. Sci. 1997. V. 32. N 19. P. 5107–5111.
37. *Care G., Fischer-cripps A.C.* Elastic-plastic indentation stress fields using the finite-element method // J. Mater. Sci. 1997. V. 32. N 21. P. 5653–5659.
38. *Bridgmen P.W.* Studies in large plastic flow and fracture. Cambridge: Harvard Univ. Press, 1964. 362 p.

Москва, Нови Сад (Югославия)

Поступила в редакцию  
15.04.1998