

УДК 539.3 : 534.1

© 1999 г. В.Г. ПОПОВ

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ВОЛН
С СИСТЕМАМИ РАДИАЛЬНЫХ ДЕФЕКТОВ**

Излагается метод решения задач дифракции упругих волн на системах радиально расположенных конечных дефектов, базирующийся на представлении дифракционного поля через разрывные решения уравнений Ламе. Если дефектами являются тонкие жесткие включения, то неизвестные скачки напряжений определяются из системы сингулярных интегральных уравнений. При рассмотрении системы трещин неизвестные скачки перемещений удовлетворяют системе сингулярных интегродифференциальных уравнений. Для ее решения предложена модификация известного численного метода. В случае двух дефектов проведено численное исследование напряженного состояния, вызванного их наличием.

1. Для решения двумерных задач теории упругости в областях, содержащих радиально расположенные дефекты типа трещин или тонких жестких включений, построим разрывные решения уравнений Ламе в полярных координатах (r, θ) с разрывами, сосредоточенными на некотором отрезке $\theta = \alpha, r \in [r_0, r_1]$. При этом, будем предполагать, что амплитуды перемещений и напряжений на этом отрезке терпят разрывы со скачками

$$\langle \sigma_\theta \rangle = \chi_1(r), \langle \tau_{\theta r} \rangle = \chi_2(r), \langle u_\theta \rangle = \chi_3(r), \langle u_r \rangle = \chi_4(r) \quad (1.1)$$
$$r \in [r_0, r_1], \chi_l(r) \equiv 0, r \notin [r_0, r_1] \quad (l = 1, 2, 3, 4)$$

и выполняются условия излучения [1]. В (1.1) приняты следующие обозначения для скачков $\langle f \rangle = f(r, \alpha + 0) - f(r, \alpha - 0)$.

Перемещения и напряжения при помощи известных формул [2] выразим через потенциалы продольных и поперечных волн $\phi_j(r, \theta)$ ($j = 1, 2$), где $\phi_j(r, \theta)$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \phi_j + \kappa_j^2 \phi_j = 0, \quad \kappa_j = \omega / c_j \quad (j = 1, 2) \quad (1.2)$$

где c_1, c_2 – скорости распространения продольных и поперечных волн в среде, ω – частота колебаний. Множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен.

Предварительно строится разрывное решение этих уравнений, имеющее на отрезке $\theta = \alpha, r \in [r_0, r_1]$ разрывы со скачками

$$\langle \phi_j \rangle = p_j(r), \quad \langle \partial \phi_j / \partial r \rangle = q_j(r) \quad (j = 1, 2), \quad r \in [r_0, r_1] \quad (1.3)$$

и удовлетворяющее условиям излучения. Построение таких разрывных решений в частном случае $p_j(r) \equiv 0$ ($j = 1, 2$) рассмотрено в [3]. Для этого к уравнению (1.2) и (1.3) необходимо применить интегральное преобразование Конторовича – Лебедева с

функцией Ганкеля первого рода [4]. В результате будет получена следующая одномерная задача о скачке

$$\Phi_j''(\lambda, \theta) + \lambda^2 \Phi_j(\lambda, \theta) = 0, \quad \langle \Phi_j(\lambda, \theta) \rangle = P_j(\lambda), \quad \langle \Phi_j'(\lambda, \theta) \rangle = Q_j(\lambda) \quad (1.4)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_j \\ P_j \\ Q_j \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} \varphi_j(r, \theta) \\ p_j(r) \\ q_j(r) \end{bmatrix} \exp\left(\frac{i\lambda\pi}{2}\right) H_\lambda^{(1)}(\chi_j r) r^{-1} dr$$

где $H_\lambda^{(1)}(\chi_j r)$ – функция Ганкеля первого рода.

После применения к (1.4) конечного преобразования Фурье по обобщенной схеме метода интегральных преобразований [5] находим

$$\Phi_{jk} = -(Q_j(\lambda) + P_j(\lambda)(-ik)) \frac{e^{ik\lambda}}{k^2 - \lambda^2}, \quad \Phi_{jk} = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(\lambda, \theta) e^{ik\theta} d\theta \quad (j=1,2)$$

Из последнего равенства после применения формул обращения преобразований Фурье и Конторовича – Лебедева находим разрывное решение уравнения (1.2) в виде

$$\varphi_j(r, \theta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{q_j(\eta)}{\eta} R_j(r, \eta, \alpha - \theta) d\eta + \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{p_j(\eta)}{\eta} R_j(r, \eta, \alpha - \theta) d\eta \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} R_j(r, \eta, \alpha - \theta) &= \frac{1}{4} \int_0^\infty e^{i\lambda\pi} \cos \lambda(\pi - |\alpha - \theta|) H_\lambda^{(1)}(\chi_j r) H_\lambda^{(1)}(\chi_j \eta) d\lambda = \\ &= -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_j \sqrt{r^2 - 2r\eta \cos(\alpha - \theta) + \eta^2}) \quad (j=1,2) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для решения (1.5) имеют место следующие предельные равенства:

$$\begin{aligned} \varphi_j(r, \alpha \pm 0) &= \pm \frac{1}{2} p_j(r) - \frac{i}{4} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{q_j(\eta)}{\eta} H_0^{(1)}(\chi_j |\eta - r|) d\eta \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial \theta}(r, \alpha \pm 0) &= \pm \frac{1}{2} q_j(r) - \frac{i}{4} \partial_r^j \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{p_j(\eta)}{\eta} H_0^{(1)}(\chi_j |\eta - r|) d\eta \\ \partial_r^j &= r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \chi_j^2 r^2 \quad (j=1,2) \end{aligned} \quad (1.7)$$

При выводе формул (1.7) были использованы соотношения

$$\begin{aligned} \delta(r - \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{i\infty} e^{i\lambda\pi} \sin \lambda\pi H_\lambda^{(1)}(\chi_j r) H_\lambda^{(1)}(\chi_j \eta) d\lambda \\ \frac{\partial R_j}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\alpha \pm 0} &= \pm \frac{\eta}{2} \delta(r - \eta) \end{aligned}$$

Из (1.7) видно, что (1.5) действительно является разрывным решением уравнения (1.2) со скачками (1.3).

Теперь скачки в (1.5) выбираются так, чтобы выраженные через них перемещения и напряжения имели на рассматриваемом отрезке $\theta = \alpha$, $r \in [r_0, r_1]$ разрывы со скачками (1.1). Для этого необходимо выполнение равенств

$$\begin{aligned} p_1 &= -\chi_2^{-2} (2\chi_4' + \mu^{-1} \chi_1), \quad p_2 = -\chi_2^{-2} (-2\chi_3' + \mu^{-1} \chi_2) \\ q_1 &= \chi_3 - r\chi_2^{-2} (-2\chi_3'' + \mu^{-1} \chi_2'), \quad q_2 = \chi_4 + r\chi_2^{-2} (-2\chi_4'' + \mu^{-1} \chi_1') \end{aligned} \quad (1.8)$$

После подстановки (1.8) в (1.5) и представления перемещений и напряжений через волновые потенциалы (1.5) будет получено искомое разрывное решение со скачками (1.1). Последнее может быть записано в виде

$$T(r, \theta) = \int_{r_0}^{\eta} G(\eta, r, \theta - \alpha) Z(\eta) d\eta \quad (1.9)$$

$$T(r, \theta) = [t_j(r, \theta)] = [\sigma_\theta, \tau_\theta, u_\theta, u_r], \quad Z(\eta) = [\chi_j(\eta)] \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

Элементы матрицы четвертого порядка G определяются формулами

$$\begin{aligned} G_{11} &= \kappa_2^{-2} \left[\frac{1}{\eta} \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \frac{\partial R_1}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial R_2}{\partial \theta} \right) \right] \\ G_{12} &= \kappa_2^{-2} \left[- \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \frac{\partial R_1}{\partial \eta} + \frac{2}{\eta} \frac{\partial}{\partial r} (rd_2 R_2) \right] \\ G_{13} &= \mu \kappa_2^{-2} \left[- \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) R_1 - 4 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (rd_2 R_2) \right] \\ G_{14} &= -\mu \kappa_2^{-2} \left[2 \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\eta} \frac{\partial R_1}{\partial \theta} + 2 \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{\eta} \frac{\partial R_2}{\partial \theta} \right] \\ G_{31} &= \mu \kappa_2^{-2} \left(\frac{r}{\eta} d_1 R_1 + \frac{\partial^2 R_2}{\partial r \partial \theta} \right), \quad G_{32} = \mu \kappa_2^{-2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial R_1}{\partial \theta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial R_2}{\partial r} \right) \\ G_{33} &= \kappa_2^{-2} \left[\frac{1}{r} \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial R_1}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial R_2}{\partial \theta} \right) \right] \\ G_{34} &= -\kappa_2^{-2} \left[-2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{r}{\eta} d_1 R_1 - \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial R_2}{\partial r} \right] \\ d_k &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \kappa_k^2 \quad (k = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Формулы (1.10) определяют элементы только первой и третьей строк матрицы G . Элементы второй и четвертой строк могут быть получены по этим формулам, если в них сделать взаимную замену R_1, d_1 и R_2, d_2 . В результате из элементов $G_{11}, G_{12}, G_{13}, G_{14}$ будут получены элементы $G_{22}, -G_{21}, G_{24}, -G_{23}$, а из $G_{31}, G_{32}, G_{33}, G_{34}$ — элементы $G_{42}, -G_{41}, G_{44}, -G_{43}$.

Построенное разрывное решение (1.9) может быть применено к решению задач о колебаниях среды, содержащей радиально расположенные дефекты типа тонких жестких включений или трещин.

2. Пусть в упругой среде, находящейся в состоянии плоской деформации, имеется система тонких жестких радиальных включений, расположенных в плоскости (r, θ) , $r > 0, -\pi < \theta \leq \pi$ на отрезках $\theta = \theta_l, r \in [a_l, b_l]$ ($l = 1, 2, \dots, N$). В среде распространяются плоские упругие волны: продольная, заданная потенциалом

$$\varphi_0 = \kappa_1^{-1} A \exp(i\kappa_1 r \cos(\theta - \theta_0)) \quad (2.1)$$

или поперечная с потенциалом

$$\psi_0 = \kappa_2^{-1} B \exp(i\kappa_2 r \cos(\theta - \theta_0)) \quad (2.2)$$

где θ_0 – угол между направлением распространения волны и положительным направлением оси Ox .

Для решения задачи об определении результирующего поля перемещений и напряжений введем в рассмотрение вектор

$$T(r, \theta) = [t_j(r, \theta)] = [\sigma_\theta, \tau_{r\theta}, u_\theta, u_r] \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (2.3)$$

Компоненты этого вектора терпят разрывы на линиях расположения включений, скачки которых при $\theta = \theta_l$ обозначим

$$\langle \sigma_\theta \rangle_l = \langle t_1 \rangle_l = \chi_{1l}(r), \quad \langle \tau_{r\theta} \rangle_l = \langle t_2 \rangle_l = \chi_{2l}(r) \quad (2.4)$$

$$\langle u_\theta \rangle_l = \langle t_3 \rangle_l = 0, \quad \langle u_r \rangle_l = \langle t_4 \rangle_l = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, N)$$

Включения предполагаются сцепленными с упругой средой и могут совершать под действием набегающих волн поступательные и вращательные движения. Из этого вытекает выполнение следующих условий на включениях

$$u_\theta(r, \theta_l) = t_3(r, \theta_l) = d_{1l} + \gamma_l \left(r - \frac{a_l + b_l}{2} \right) \quad (2.5)$$

$$u_r(r, \theta_l) = t_4(r, \theta_l) = d_{2l}, \quad r \in [a_l, b_l] \quad (l = 1, 2, \dots, N)$$

Параметры движения включений d_{1l} , d_{2l} , γ_l определяются из уравнений движения включений, которые в случае гармонических колебаний имеют вид

$$\omega^2 m_l d_{jl} = \int_{a_l}^{b_l} \chi_{lj}(r) dr, \quad J_{0l} \omega^2 \gamma_l = \int_{a_l}^{b_l} \chi_{lj}(r) \left(r - \frac{a_l + b_l}{2} \right) dr \quad (j = 1, 2, \quad l = 1, 2, \dots, N) \quad (2.6)$$

где m_l , J_{0l} – масса и момент инерции l -го включения.

Вектор (2.3) представим в виде

$$T(r, \theta) = T_0(r, \theta) + \sum_{l=1}^N T_l(r, \theta) \quad (2.7)$$

Компонентами вектора

$$T_0(r, \theta) = [t_{0j}(r, \theta)] = [\sigma_\theta^0, \tau_{r\theta}^0, u_\theta^0, v_r^0]_T \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

являются перемещения и напряжения, вызванные распространяющимися в среде волнами (2.1) или (2.2). Вектора

$$T_l(r, \theta) = [t_{lj}(r, \theta)] = [\sigma_\theta^l, \tau_{r\theta}^l, u_\theta^l, v_r^l]_T \quad (j = 1, 2, 3, 4 \quad l = 1, 2, \dots, N) \quad (2.8)$$

представим разрывными решениями со скачками (2.4) на отрезках расположения включений. В соответствии с формулами (1.9), (1.10) они равны

$$t_{lj}(r, \theta) = \sum_{k=1}^2 \int_{a_l}^{b_l} \chi_{lk}(\eta) G_{jk}(r, \eta, \theta - \theta_l) d\eta \quad (j = 1, 2, 3, 4; \quad l = 1, 2, \dots, N) \quad (2.9)$$

Формулы (2.7), (2.9) однозначно определяют перемещения и напряжения в среде, если будут найдены неизвестные скачки разрывных решений (2.9). Это можно сделать, если воспользоваться условиями (2.5).

Для реализации этих условий предварительно продифференцируем их по r , затем подставим туда (2.9). В результате получим

$$\sum_{l=1}^N \frac{\partial t_{3l}}{\partial r}(r, \theta_j) = \gamma_j - \frac{\partial t_{30}}{\partial r}(r, \theta_j), \quad \sum_{l=1}^N \frac{\partial t_{4l}}{\partial r}(r, \theta_j) = -\frac{\partial t_{40}}{\partial r}(r, \theta_j) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.10)$$

Условия (2.10) будут эквивалентны (2.5), если к ним добавить равенства

$$\sum_{l=1}^N t_{3l}(a_j, \theta_j) = d_{1j} - \gamma_j \frac{h_j}{2} - t_{30}(a_j, \theta_j), \quad \sum_{l=1}^N t_{4l}(a_j, \theta_j) = d_{1j} - t_{40}(a_j, \theta_j) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.11)$$

После подстановки (2.9) в (2.10), (2.11) приходим к системе сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных скачков напряжений, которая после приведения ее к промежутку $[-1, 1]$, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} & -\frac{(1+\xi^2)}{4\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{j\lambda}(x) \frac{dx}{x-y} + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^2 \int \varphi_{lk}(x) P_{\lambda+2,k}^{lj}(x, y) dx = \gamma_j \delta_{1\lambda} + f_{\lambda j}(y), \quad -1 < y < 1 \\ & \frac{(1+\xi^2)}{2} \varepsilon_j \int_{-1}^1 \varphi_{j\lambda}(x) \ln(1+x) dx + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^2 \varphi_{lk}(x) Q_{\lambda+2,k}^{lj}(x) dx = \\ & = d_{\lambda j}^0 - \gamma_j \delta_{1\lambda} + f_{\lambda j}^0 \quad (j = 1, 2, \dots, N; \quad \lambda = 1, 2), \quad d_{\lambda j}^0 = h_1^{-1} d_{\lambda j} \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $\delta_{1\lambda}$ – символ Кронекера.

В (2.12) приняты следующие обозначения:

$$\varphi_{lk}(x) = \mu^{-1} \chi_{lk} \left(\frac{h_l(x + \alpha_l + \beta_l)}{2} \right), \quad h_l = b_l - a_l, \quad \alpha_l = h_l^{-1} a_l$$

$$\beta_l = h_l^{-1} b_l, \quad \varepsilon_l = h_l / h_1 \quad (l = 1, 2, \dots, N), \quad \kappa_0 = \kappa_2 h_1$$

Ядра интегральных операторов в (2.12) при $l = j$, получены после выделения сингулярной составляющей из

$$\frac{\partial}{\partial y} G_{\lambda k} \left(\frac{h_j}{2}(y + \alpha_j + \beta_j), \frac{h_l}{2}(x + \alpha_j + \beta_j), \theta_j \right), \quad G_{lk} \left(a_j, \frac{h_j}{2}(x + \alpha_j + \beta_j), \theta_j \right)$$

При этом $P_{14}^{jj} = P_{23}^{jj} = 0$, $Q_{14}^{jj} = Q_{23}^{jj} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, N$), а оставшиеся характеризуются следующей асимптотикой

$$\begin{aligned} P_{\lambda+2,k}^{lj}(x, y) &= O((x-y) \ln |x-y|), \quad (x-y) \rightarrow 0 \\ Q_{\lambda+2,k}^{lj}(x) &= O(1), \quad 1+x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

В случае $l \neq j$ имеет место формулы

$$\begin{aligned} P_{\lambda+2,k}^{lj}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} G_{\lambda k} \left(\frac{h_j}{2}(y + \alpha_j + \beta_j), \frac{h_l}{2}(x + \alpha_l + \beta_l), \theta_l \right) \\ Q_{\lambda+2,k}^{lj}(x) &= \frac{\varepsilon_j}{2} G_{lk} \left(a_j, \frac{h_l}{2}(x + \alpha_l + \beta_l), \theta_l \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Правые части уравнений (2.12) равны

$$f_{\lambda j}(y) = -\frac{\partial}{\partial r} t_{\lambda+2,0} \left(\frac{h_j}{2}(y + \alpha_j + \beta_j), \theta_j \right), \quad f_{\lambda j}^0 = -t_{\lambda+2,0}(a_j, \theta_j) h_1^{-1} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.15)$$

К уравнениям (2.12) необходимо добавить равенства (2.6), которые в новых обозначениях имеют вид

$$\begin{aligned} d_{\lambda j}^0 m_{0j} \kappa_0^2 &= \int_{-1}^1 \varphi_{j\lambda}(x) dx \quad (\lambda = 1, 2), \quad \frac{1}{6} m_{0j} \kappa_0^2 \gamma_j = \int_{-1}^1 \varphi_{j1}(x) x dx \\ m_{0j} &= 2m_j / (h_1^2 \rho) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Приближенное решение системы (2.12) разыскивается в виде

$$\varphi_{lk}(x) = \frac{\Psi_{lk}(x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad (l=1, 2, \dots, N, \quad k=1, 2) \quad (2.17)$$

где $\Psi_{lk}(x)$ приближены интерполяционными многочленами

$$\Psi_{lk}(x) = G_n^{lk}(x) = \sum_{m=1}^n \Psi_{lk}(x_m) \frac{T_n(x)}{(x-x_m)T_n'(x_m)} \quad (2.18)$$

Здесь $T_n(x)$ – многочлены Чебышева, x_m – корни этих многочленов.

Для функции вида (2.17) имеет место формула

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} \Psi_{lk}(x) dx = \sum_{m=1}^n \Psi_{lk}(x_m) a_m B_m \quad (2.19)$$

$$B_m = - \left(\ln 2 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^m \cos p \gamma_m}{p} \right), \quad a_m = \frac{\pi}{n}$$

которая может быть получена после замены в интеграле этих функций интерполяционным многочленом (2.18).

Методом [6], а также при помощи формул (2.19), (2.12), (2.16) относительно $\Psi_{lk}(x_m)$ может быть получена система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & - \frac{(1+\xi^2)}{4\pi} \sum_{m=1}^n a_m \frac{\Psi_{j\lambda}(x_m)}{x_m - y_i} + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^n a_m \Psi_{lk}(x_m) P_{\lambda+2k}^{lj}(x_m, y_i) = \\ & = \gamma_j \delta_{i\lambda} + f_{\lambda j}(y_i) \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1+\xi^2)}{8\pi} \varepsilon_j \sum_{m=1}^n a_m B_m \Psi_{j\lambda}(x_m) + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^n a_m \Psi_{lk}(x_m) Q_{\lambda+2k}^{lj}(x_m) = \\ & = d_{\lambda j}^0 - \gamma_j \delta_{i\lambda} + f_{\lambda j}^0 \end{aligned}$$

$$d_{\lambda j}^0 m_{0j} \kappa_0^2 = \sum_{m=1}^n a_m \Psi_{j\lambda}(x_m), \quad \frac{1}{6} m_{0j} \kappa_0^2 \gamma_j = \sum_{m=1}^n a_m x_m \Psi_{j\lambda}(x_m)$$

$$(j=1, 2, \dots, N, \quad \lambda=1, 2)$$

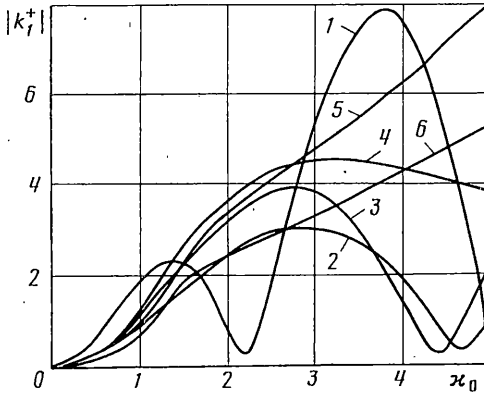
После решения системы (2.20) будут непосредственно найдены амплитуды колебаний включений $d_{1j}^0, d_{2j}^0, \gamma_j$ ($j=1, 2, \dots, N$), а неизвестные скачки могут быть определены по формулам (2.17), (2.18).

Исследуем напряженное состояние среды вблизи концов включений. Имеют место асимптотические представления для напряжений [7, 8]:

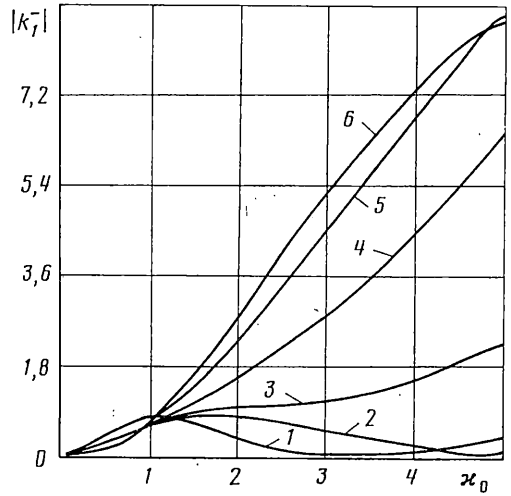
$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} = \frac{\kappa_* K_{2l}^\pm}{4\sqrt{2\rho}} \begin{bmatrix} -5 \cos \theta_1 - (2\kappa+1) \cos \theta_3 \\ -3 \cos \theta_1 + (2\kappa+1) \cos \theta_3 \\ -\sin \theta_1 + (2\kappa+1) \sin \theta_3 \end{bmatrix} + \frac{\kappa_* K_{2l}^\pm}{4\sqrt{2\rho}} \begin{bmatrix} -5 \cos \theta_1 + (2\kappa+1) \sin \theta_3 \\ 3 \cos \theta_1 - (2\kappa+1) \sin \theta_3 \\ \sin \theta_1 + (2\kappa+1) \cos \theta_3 \end{bmatrix} + O(1)$$

$$\theta_p = \frac{p\theta}{2} \quad (p=1, 2, 3), \quad K_{\lambda l}^\pm = \frac{\pm \mu \Psi_{\lambda l}(\pm 1)}{4(\kappa+1)\sqrt{h_l/2}}, \quad \kappa = 3-4\nu, \quad \kappa_* = \frac{2}{\kappa-1}$$

Здесь ρ, θ – полярные координаты с центром, совпадающим с одним из концов l -го включения. Напряженное состояние вблизи них определяется коэффициентами



Фиг. 1



Фиг. 2

$K_{\lambda l}^{\pm}$, которые в соответствии с [7, 8], будем называть коэффициентами интенсивности напряжений (КИН) для включений. Из (2.17), (2.18) для них могут быть получены следующие приближенные формулы

$$K_{\lambda l}^{\pm} = \frac{\pm \mu}{\kappa_*(\kappa_* + 1)} \left(\frac{h_l}{2} \right)^{-1/2} k_{\lambda l}^{\pm}, \quad k_{\lambda l}^+ = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (-1)^m \Psi_{\lambda l}(x_m) \operatorname{ctg} \frac{\gamma_m}{2}$$

$$k_{\lambda l}^+ = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{m=1}^n (-1)^m \Psi_{\lambda l}(x_m) \operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2} \quad (\lambda = 1, 2, \quad l = 1, 2, \dots, N) \quad (2.21)$$

Численная реализация решения проводилась для случая двух включений одинаковой длины ($N = 2$). В применяемых интерполяционных формулах использовалось до 30 узлов, что обеспечило получение результатов с погрешностью менее 0,1%. Предполагалось, что включения расположены симметрично и их положение описывается следующими значениями параметров $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, 1, \theta_1 = -\beta, \theta_2 = \beta$. С включениями взаимодействует плоская продольная волна, распространяющаяся под углом $\theta_0 = 180^\circ$, при этом, в силу симметрии $k_1^{\pm} = k_{11}^{\pm} = k_{12}^{\pm}, k_2^{\pm} = k_{21}^{\pm} = k_{22}^{\pm}$.

Результаты численного анализа представлены в виде графиков на фиг. 1, 2. Кривые 1–6 всюду соответствуют следующим значениям угла, образованного включениями $\beta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$. На фиг. 1 показаны зависимости от безразмерной частоты $\kappa_0 = \kappa_2 h_1$ для $|k_l^+|$, а на фиг. 2 – $|k_l^-|$. В случае $\beta \leq 60^\circ$ величина $|k_l^+|$ имеет ряд максимумов и минимумов. Для других углов между включениями имеет место возрастание, а затем стабилизация $|k_l^+|$. Величина $|k_l^-|$ возрастает с увеличением угла, образованного включениями. Наличие максимумов наблюдается при $\beta \leq 45^\circ$. В целом величины КИН у сближенных концов включений больше чем у удаленных.

3. Пусть теперь на тех же отрезках расположено N трещин, с которыми взаимодействуют плоские упругие волны, заданные потенциалами (2.1), (2.2). Берега трещин предполагаются свободными от напряжений, а перемещения на линиях их расположения терпят разрывы с некоторыми скачками, т.е. для компонент вектора (2.3) выполняются условия

$$t_1(r, \theta_l) = t_2(r, \theta_l) = 0, \quad \langle t_3 \rangle = \chi_{l3}(r), \quad \langle t_4 \rangle = \chi_{l4}(r) \quad (3.1)$$

$$r \in [a_l, b_l] \quad (l = 1, 2, \dots, N)$$

Для вектора (2.3) воспользуемся представлением (2.7), где вектора $T_l(r, \theta)$ являются разрывными решениями (1.9) со скачками (3.1). Эти решения определяются по формулам (2.9) при суммировании по $k = 3, 4$. Неизвестные скачки будут найдены из первых двух условий (3.1). Для реализации этих условий функции G_{jk} ($k = 1, 2, k = 3, 4$) из (1.7) представим в виде

$$G_{jk}(r, \eta, \theta - \theta_l) = -\frac{\partial}{\partial \eta} B_{jk}^l(\eta, r, \theta) + C_{jk}^l(\eta, r, \theta) \quad (3.2)$$

$$B_{13}^l = \kappa_2^{-2} \left[2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) R_{1l} + 4 \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\eta} d_2 R_{2l} \right]$$

$$B_{14}^l = \kappa_2^{-2} \left[\frac{2}{\eta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) R_{1l} + 4 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \eta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} R_{2l} \right]$$

$$B_{23}^l = -\kappa_2^{-2} \left[\frac{2}{\eta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) R_{2l} + 4 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \eta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} R_{1l} \right]$$

$$B_{24}^l = \kappa_2^{-2} \left[2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) R_{2l} + 4 \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\eta} d_1 R_{1l} \right]$$

$$C_{13}^l = -\left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) R_{1l}, \quad C_{23}^l = 2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} R_{1l}, \quad C_{14}^l = 2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} R_{2l}$$

$$C_{24}^l = -\left(\kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) R_{2l}, \quad R_{jl} = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}[\kappa_j q_l]$$

$$q_l = \sqrt{\eta^2 + r^2 - 2\eta r \cos(\theta - \theta_l)} \quad (j=1, 2, l=1, 2, \dots, N)$$

После подстановки (3.2) в (2.9) выполним в интегралах, содержащих B_{jk}^l , интегрирование по частям. При этом, учитывается, что, так как трещины предполагаются непересекающимися, то

$$\chi_{lk}(a_l) = \chi_{lk}(b_l) = 0 \quad (l=1, 2, \dots, N, k=3, 4) \quad (3.3)$$

В результате получим

$$t_{ij}(r, \theta) = \mu \sum_{k=3}^4 \int_{a_l}^{b_l} \chi_{lk}'(\eta) B_{jk}^l d\eta + \sum_{k=3}^4 \int_{a_l}^{b_l} \chi_{lk}(\eta) C_{jk}^l d\eta \quad (3.4)$$

Подставив (3.4) в первые два равенства (3.1), получим систему интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных скачков, которая после перехода к промежутку $[-1, 1]$ имеет вид

$$\frac{2(1-\xi^2)}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi'_{j,\lambda+2}(x) \frac{dx}{x-y} - \frac{\kappa_0^2 \varepsilon^2 (1-\xi^2)}{4\pi} \delta_{1\lambda} \int_{-1}^1 \varphi_{j,\lambda+2}(x) \ln|x-y| dx + \quad (3.5)$$

$$+ \sum_{l=1}^N \sum_{k=3}^4 \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi'_{lk}(x) P_{\lambda k}^{lj}(x, y) dx + \sum_{l=1}^N \sum_{k=3}^4 \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{lk}(x) Q_{\lambda k}^{lj}(x, y) dx = f_{\lambda j}(y)$$

$$(j=1, 2, 3, \dots, N; \lambda=1, 2), \quad y \in [-1, 1]$$

В (3.5) приняты обозначения аналогичные (2.13). Ядра интегральных операторов определяются аналогично соответствующим ядрам в (2.20). Правые части уравнений

системы (3.5) равны

$$f_{\lambda_j}(y) = -t_{\lambda_0} \left(\frac{h_j(y + \alpha_j + \beta_j)}{2}, \theta_j \right) \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

Систему (3.5) необходимо рассматривать совместно с равенствами

$$\int_{-1}^1 \varphi'_{jk}(x) dx = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N, \quad k = 3, 4) \quad (3.6)$$

вытекающими из (3.3).

Для построения приближенного решения (3.5) производные $\varphi'_{lk}(x)$ ($l = 1, 2, \dots, N$, $k = 3, 4$) представим в виде (2.17), а функции $\psi_{lk}(x)$ проаппроксимируем интерполяционными многочленами (2.18). Используя это представление для производных, найдем сами функции $\varphi_{lk}(x)$. Для этого выполним в (2.18) разложение

$$\frac{T_n(x)}{x - x_m} = \sum_{p=0}^{n-1} c_p T_p(x) \quad (3.7)$$

Коэффициенты c_p легко определяются, если воспользоваться свойством ортогональности для многочленов Чебышева [9] и формулами для интегралов, содержащих эти многочлены из [10]. В результате находим

$$c_0 = U_{n-1}(x_m), \quad c_p = 2U_{n-1}(x_m)T_p(x_m) \quad (3.8)$$

Подставив (3.7), (3.8) в (2.18) получим

$$\psi_{lk}(x) = G_n^{lk}(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \psi_{lk}(x_m) + \frac{2}{n} \sum_{m=1}^n \psi_{lk}(x_m) \sum_{p=1}^{n-1} T_p(x_m) T_p(x) \quad (3.9)$$

Заметим, что из (3.6) после подстановки туда производных в виде (2.17) и применения квадратурной формулы Гаусса–Чебышева [11] следует

$$\sum_{m=1}^n a_m \psi_{lk}(x_m) = 0, \quad a_m = \frac{\pi}{n} \quad (3.10)$$

Последнее равенство дает возможность окончательно получить из (3.9)

$$\psi_{lk}(x) = G_n^{lk}(x) = \frac{2}{n} \sum_{m=1}^n \psi_{lk}(x_m) \sum_{p=1}^{n-1} T_p(x_m) T_p(x) \quad (3.11)$$

Очевидно, что

$$\varphi_{lk}(x) = \int_{-1}^x \psi'_{lk}(x) dx = \int_{-1}^x \frac{\psi_{lk}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Заменив в последней формуле $\psi_{lk}(x)$ многочленом (3.11) и учтя, что

$$\int_{-1}^x \frac{T_p(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{p} U_{p-1}(x)$$

найдем следующие приближенные формулы для функций $\varphi_{lk}(x)$

$$\begin{aligned} \varphi_{lk}(x) &= 2\sqrt{1-x^2} S_n^{lk}(x) \\ S_n^{lk}(x) &= -\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \psi_{lk}(x_m) \sum_{p=1}^{n-1} p^{-1} T_p(x_m) U_{p-1}(x) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Аппроксимация (3.12) позволяет для интегралов, содержащих $\Phi_{lk}(x)$, получить следующие квадратурные формулы:

$$\int_{-1}^1 \Phi_{lk}(x) \ln |x - y_i| dx = - \sum_{m=1}^n a_m W_n^{im} \Psi_{lk}(x_m)$$

$$W_n^{im} = T_1(x) \left(\ln 2 - \frac{T_2(y_i)}{2} \right) + \sum_{p=1}^n \frac{T_p(x_m)}{p} \left[T_{p-1}(y_i) - \frac{T_{p+1}(y_i)}{p+1} \right] \quad (3.13)$$

$$\int_{-1}^1 \Phi_{lk}(x) Q_{\lambda k}^{lj}(x, y_i) dx = -2 \sum_{m=1}^n a_m \Psi_{lk}(x_m) F_{kl}(x_m, y_i)$$

$$F_{kl}(x_m, y_i) = \sum_{p=1}^n b_p Q_{\lambda k}^{lj}(z_p, y_i) S_n^{lk}(z_p)$$

$$z_p = \cos \frac{\pi p}{n+1}, \quad b_p = \frac{1}{p+1} \sin^2 \frac{p\pi}{n+1}, \quad p=1, 2, \dots, n$$

$$a_m = \frac{\pi}{n}, \quad y_i = \cos \frac{i\pi}{n}, \quad m=1, 2, \dots, n; \quad i=1, 2, \dots, n-1$$

Эти квадратурные формулы позволяют методом, изложенным в [6], из (3.5), (3.6), получить систему линейных алгебраических уравнений для определения $\Psi_{lk}(x_m)$:

$$\frac{2(1-\xi^2)}{\pi} \sum_{m=1}^n a_m \frac{\Psi_{j, \lambda+2}(x_m)}{x_m - y_i} + \frac{\kappa_0^2 \xi^2 (1-\xi^2)}{2} \delta_{i\lambda} \sum_{m=1}^n a_m W_n^{im} \Psi_{j, \lambda+2}(x_m) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N \sum_{k=3}^4 \sum_{m=1}^n a_m F_{\lambda k}(x_m, y_i) \Psi_{lk}(x_m) -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^N \sum_{k=3}^4 \sum_{m=1}^n a_m F_{\lambda k}(x_m, y_i) \Psi_{lk}(x_m) = f_{\lambda j}(y_i) \quad (3.14)$$

$$(\lambda = 1, 2; \quad j = 1, 2, \dots, N; \quad i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\sum_{m=1}^n a_m \Psi_{lk}(x_m) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, N; \quad k = 3, 4)$$

Динамическое напряженное состояние среды вблизи вершин трещин характеризуется коэффициентами интенсивности напряжений (КИН) [12], которые определяются формулами

$$K_{j\lambda}^+ = \lim_{r \rightarrow b_l+0} \sqrt{2(r-b_l)} t_{ij}(r, \theta_l), \quad K_{j\lambda}^- = \lim_{r \rightarrow a_l-0} \sqrt{2(a_l-r)} t_{ij}(r, \theta_l)$$

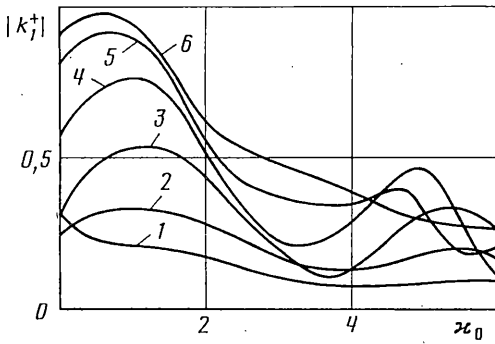
$$(j = 1, 2; \quad l = 1, 2, \dots, N)$$

В результате предельного перехода находим

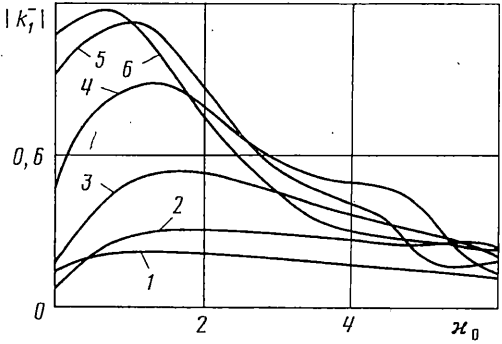
$$K_{j\lambda}^+ = \frac{(1-\xi^2)}{n} \mu \sqrt{2h_l} \sum_{m=1}^n (-1)^m \Psi_{j+2, l}(x_m) \operatorname{ctg} \frac{\gamma_m}{2}$$

$$K_{j\lambda}^- = \frac{(1-\xi^2)}{n} \mu \sqrt{2h_l} \sum_{m=1}^n (-1)^{m+m-1} \Psi_{j+2, l}(x_m) \operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2}$$

Численная реализация проводилась для случая двух трещин одинаковой длины ($N = 2$). В квадратурных формулах использовалось до $n = 30$ узлов, что обеспечило получение основных результатов с погрешностью не превышающей 0,1%. Предпо-



Фиг. 3



Фиг. 4

лагалось, что трещины расположены симметрично и их положение определяется следующими параметрами $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,1$, $\theta_1 = -\beta$, $\theta_2 = \beta$. С трещинами взаимодействует плоская волна продольного сдвига (2.1) распространяющаяся в отрицательном направлении оси Ox ($\theta_0 = 180^\circ$). Для различных значений угла β исследована зависимость абсолютных значений безразмерных КИН

$$k_{jl}^\pm = \left| \frac{K_{jl}^\pm}{\sqrt{2h_l \sigma_0}} \right|, \quad \sigma_0 = \mu x_0$$

от безразмерной частоты $x_0 = x_2 h_1$. Результаты приведены в виде графиков на фиг. 3, 4. Кривые 1–6 на них соответствуют $\beta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$.

На фиг. 3 показаны зависимости для $k_{11}^+ = k_{12}^+ = k_1^+$ – КИН на удаленных концах трещин. Видно, что значения k_1^+ возрастают при увеличении угла между трещинами и наибольших значений этот КИН достигает в случае трещин, лежащих на одной прямой: $\beta = 90^\circ$, кривая 6. При углах между трещинами $\beta < 30^\circ$, k_1^+ практически на всем исследованном диапазоне частот монотонно убывает. При увеличении угла зависимость усложняется, для нее характерны два максимума. Один в области низких частот, имеющий место и в случае изолированной трещины [12], другой в области высоких частот. Если же угол между трещинами близок к развернутому $\beta \approx 90^\circ$, то величина k_1^+ опять имеет только один максимум, как и в случае изолированной трещины. При $\beta = 90^\circ$ и сближении трещин $\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow 0$ значения k_1^+ стремятся к значениям в случае дифракции на одной трещине.

На фиг. 4 приведены графики для КИН $k_{11}^- = k_{12}^- = k_1^-$ у сближенных концов трещин. В этом случае так же наблюдается увеличение концентрации напряжений с возрастанием угла, образованного трещинами. Для кривых характерно наличие одного максимума. Сравнение кривых на фиг. 3 и фиг. 4 позволяет сделать вывод о том, что $k_1^- > k_1^+$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
2. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко Н.А. Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1978. 308 с.
3. Попов В.Г. Дифракция упругих волн сдвига на включении сложной формы, расположенном в неограниченной упругой среде // Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепрпетровск: ДГУ. 1986. С. 121–127.

4. *Конторович М.Н., Лебедев Н.Н.* Об одном методе решения некоторых задач дифракции и родственных ей проблем // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. № 10. С. 1192–1206.
5. *Попов Г.Я.* Об одном способе решения задач механики для областей с разрезами или тонкими включениями // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 122–135.
6. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 288 с.
7. *Бережницкий Л.Г., Панасюк В.В., Стацук Н.Г.* Взаимодействие жестких включений и трещин в деформируемом теле. Киев.: Наук. думка, 1983. 253 с.
8. *Сулим Г.Т.* Концентрация напряжений возле тонкостенных линейных включений // Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 11. С. 82–89.
9. *Градиштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
10. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука. 1967. 299 с.
11. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука. 1967. 500 с.
12. *Партон В.З., Борисковский В.Г.* Динамическая механика разрушения. М.: Машиностроение, 1985. 263 с.

Одесса

Поступила в редакцию
22.09.1997