

УДК 531.8

© 1999 г. И.А. ПАПУША

## **АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АВИАЦИОННОЙ ГРАВИМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАДИЕНТОМЕТРА**

Задаче построения карт аномалий гравитационного поля Земли путем аэро- съемки в настоящее время уделяется все больше внимания в связи с перспектив- ностью использования этих карт при разведке полезных ископаемых.

Вопрос о включении в состав измерительного комплекса авиационной гравимет- рической системы градиентометра, доставляющего информацию о гравитационном градиенте, исследовался еще в 80-е годы [1]. Преимущество такого подхода заклю- чается в способности градиентометра отделять гравитационные эффекты от инер- ционных посредством измерений, и в возможности не привязываться к какой-либо априорной модели поля тяготения Земли. Но в связи с невозможностью с удов- летворительной точностью измерять тензор гравитационного градиента на под- вижном основании, в течение длительного времени было принято считать, что задача авиационной гравиметрии с использованием градиентометрических измере- ний является бесперспективной. В настоящее время наметившийся существенный прогресс в повышении качества гравиметрической аппаратуры, связанный с развитием принципиально новых технологий [2], доступность высокоточной нави- гационной информации спутниковых навигационных систем (СНС) являются предпосылками для проведения дальнейших исследований в этой области.

При разработке алгоритмов оценки гравитационных аномалий приходится учи- тывать влияние на точность конечного результата фактора инструментальных по- грешностей. При этом существует два пути: первый путь технического усовер- шенствования приборов, второй – тщательного изучения всех источников помех, с целью возможно эффективнее учесть их воздействие. Приходится решать вопрос, каким именно способом учитывать влияние различных возмущающих факторов. Некоторые наиболее существенные параметры включаются в вектор состояния динамической системы, другие, ввиду своей плохой обусловленности, представля- ются в виде неконтролируемых возмущений с заданными характеристиками, влиянием третьих целесообразнее просто пренебречь.

К числу немногих работ, посвященных описанию погрешностей гравитационно- го градиентометра, относится [3], где предложена статистическая модель, парамет- ры которой определяются экспериментальным путем, причем источник возникнове- ния конкретных погрешностей не рассматривается. Другой подход был осуществ- лен в статье [4], где различной природы ошибки в выходном сигнале гравита- ционного градиента учтены в виде поправочных коэффициентов. Ниже предлага- ется модель ошибок, традиционная для инерциальной навигации [5], [6].

**1. Алгоритм решения задачи авиационной гравиметрии с использованием гра- диентометрических измерений.** Входной информацией алгоритма являются показания авиационного гравиметрического комплекса, состоящего из инерциальной навига- ционной системы (ИНС) на горизонтируемой платформе которой жестко установлен градиентометр, а также приемников СНС. Различные схемы использования навига- ционной, градиентометрической и гравиметрической информации в задаче оценки гравитационных аномалий изложены в [7]. Независимо от целесообразности варианта

функционального построения алгоритмов, информационно они эквивалентны ниже-  
следующему.

*1.1. Исходные соотношения.* Исходными соотношениями для решения задачи оцен-  
ки гравитационных аномалий являются уравнения, описывающие движение мате-  
риальной точки в поле силы тяготения.

Введем систему координат  $Mx_1x_2x_3(Mx)$  связанную с движущимся объектом на кото-  
ром установлен гравиметрический комплекс.  $M$  – точка, отождествляемая с объек-  
том,  $Mx_3$  – направление внешней нормали к поверхности эллипсоида Земли. Ориен-  
тация трехгранника  $Mx$  в азимуте (относительно оси  $Mx_3$ ) доопределяется тем или  
иным способом.

Введем некоторые векторы в проекциях на ось трехгранника  $Mx$ :  $\mathbf{u}_x = (u_1u_2u_3)^T$  –  
вектор угловой скорости Земли;  $\boldsymbol{\omega}_x = (\omega_1\omega_2\omega_3)^T$  – вектор абсолютной угловой скоро-  
сти трехгранника  $Mx$ ;  $\boldsymbol{\Omega}_x = (\Omega_1\Omega_2\Omega_3)^T$  – вектор относительной угловой скорости трех-  
гранника  $Mx$ ;  $\mathbf{v}_x = (v_1v_2v_3)^T$  – вектор абсолютной скорости точки  $M$ ;  $\mathbf{V}_x = (V_1V_2V_3)^T$  –  
вектор относительной скорости точки  $M$ ;  $\mathbf{g}_x$  – вектор силы тяготения в проекции на  
оси трехгранника  $Mx$ ;  $\mathbf{f}_x$  – вектор внешней силы, действующей на чувствительную  
массу;  $\Gamma = \|\|\partial g_i/\partial x_j\|\|$  – тензор гравитационного градиента, единица измерения – 1 Этвеш  
( $1E = 10^{-9} \text{ c}^{-2}$ ), его матрица обладает свойством симметрии и имеет нулевой след,  
поэтому тензор содержит пять независимых компонент.

Уравнения, описывающие движение точки  $M$  единичной массы, в проекции на оси  
трехгранника  $Mx$  имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_x + \hat{\boldsymbol{\omega}}_x \mathbf{x}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_x = \mathbf{f}_x + \mathbf{g}_x + \hat{\boldsymbol{\omega}}_x \mathbf{v}_x$$

$$\dot{\mathbf{g}}_x = \Gamma_x \mathbf{V}_x + \hat{\boldsymbol{\Omega}}_x \mathbf{g}_x$$

Здесь  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$  обозначает кососимметрическую матрицу

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{array} \right\|$$

поставленную в соответствие вектору  $\boldsymbol{\omega}_x = (\omega_1\omega_2\omega_3)^T$ .

*1.2. Модельные уравнения и уравнения ошибок.* Воспользуемся принятыми в [8]  
представлениями о приборном и модельном трехгранниках.

Вводится модельный трехгранник  $Mx'$  – числовой образ трехгранника  $Mx$ , полу-  
ченный в бортовом алгоритме ИНС. Обозначения всех параметров движения объекта  
в системе координат  $Mx'$  совпадают с обозначениями в системе координат  $Mx$  и отли-  
чаются индексом штрих.

Трехгранник  $Mz_1z_2z_3(Mz)$ , служащий приборной реализацией трехгранника  $Mx$ , вво-  
дится так, чтобы его оси совпадали с осями чувствительности ньютонометров ИНС.  
Для обозначения параметров движения в системе координат  $Mz$  используется индекс  $z$ .

В бортовых вычислителях существующих ИНС при интегрировании уравнений,  
представляющих собой уравнения движения в модельном трехграннике, используется  
известная модель гравитационного поля. Модельные уравнения, в которых для описа-  
ния вектора тяготения используется тензор гравитационного градиента, предлагается  
решать в режиме постобработки

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{v}' + \hat{\boldsymbol{\omega}}' \mathbf{x}'$$

$$\dot{\mathbf{v}}' = \mathbf{f}' + \mathbf{g}' + \hat{\boldsymbol{\omega}}' \mathbf{v}'$$

$$\dot{\mathbf{g}}' = \Gamma'(\mathbf{v}' + \hat{\mathbf{u}}' \mathbf{x}') + (\hat{\boldsymbol{\omega}}' - \hat{\mathbf{u}}') \mathbf{g}'$$

(1.1)

Величины  $f'$ ,  $\Gamma'$  измерены в осях приборного трехгранника  $Mz$ ,  $\omega'$  и  $u'$  определяются по информации ИНС.

Установим соотношения, определяющие зависимость ошибок модельного алгоритма от погрешностей начальных условий и инструментальных погрешностей. Уравнения ошибок описывают движение модельной точки  $M'$  относительно реальной  $M$  и ориентацию приборного трехгранника относительно модельного.

Вводятся векторы-столбцы  $\delta x = x' - z$ ,  $\delta v = v' - v_z$ ,  $\delta g = g' - g_z$ . Тогда уравнения ошибок имеют вид

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= \delta v + \hat{\omega} \delta x - \hat{v} x \\ \delta \dot{v} &= \Delta f + \delta g + \hat{\omega} \delta v - \hat{v} v \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\delta \dot{g} = \Gamma(\delta v + \hat{u} \delta x - (\hat{\beta} u) x) + \Delta \Gamma V + \hat{\Omega} \delta g + ((\hat{\beta} u) - \hat{v}) g$$

$$\hat{\beta} = \hat{\omega} \beta + v$$

Здесь  $\beta_x$  – вектор угла малого поворота, определяющий взаимную ориентацию трехгранников  $Mz$  и  $Mx'$  так, что выполняется соотношение  $I_z = (E + \hat{\beta}_x) I_{x'}$  ( $I_z, I_{x'}$  – проекции некоторого вектора  $I$  на оси трехгранников  $Mz$  и  $Mx'$  соответственно);  $v_z = \omega_z - \omega'$  – вектор неконтролируемых возмущений (дрейфов) гиросплатформы;  $\Delta \Gamma$  – тензор погрешностей градиентометра в приборных осях ИНС;  $\Delta f$  – вектор приборных погрешностей ньютонометров в тех же осях.

Вычисленные ранее величины вектора состояния системы (1.1) уточняются поправками, полученными в результате оценивания ошибок системы при помощи дополнительной информации. Математическая схема процесса коррекции и коррекционные алгоритмы приведены в [9].

Сделаем некоторые предположения об инструментальных погрешностях. Положим на интервалах коррекции  $\hat{v} = 0$ , а  $\Delta \Gamma$  и  $\Delta f$  будем считать немоделируемыми возмущениями.

С помощью полученной от СНС позиционной информации  $x^*$  формируется вектор коррекции

$$z = x' - x^* = \Delta x + w \quad (1.3)$$

где  $w$  – погрешность измерения  $z$ .

Таким образом, поставлена задача оценки вектора состояния

$$[\delta x, \delta v, \delta g, \beta, v]^T \quad (1.4)$$

линейной динамической системы 15-го порядка по измерениям (1.3).

Полные ошибки определения координат, составляющих скорости и составляющих гравитационного ускорения определяются следующим образом:  $\Delta x = \delta x + \hat{\beta} x$ ,  $\Delta v = \delta v + \hat{\beta} v$ ,  $\Delta g = \delta g + \hat{\beta} g$ .

Следует подчеркнуть, что описываемая схема решения задачи оценки гравитационных аномалий носит модельный характер. Она определяет функциональное назначение того или иного типа измерительной информации и позволяет исследовать возможности использования измерений гравитационного градиента. При решении практической задачи эта схема может служить основой для рабочего алгоритма, который должен включать в себя ряд дополнительных процедур, учитывающих индивидуальные особенности измерителей.

2. Математические модели погрешностей канонического гравитационного градиентометра. Источники приборных погрешностей, возникающих при практическом измерении тензора гравитационного градиента на подвижном основании, очень разно-

образны. Градиентометр в общем случае измеряет гравитационный сигнал на который наложены вращательное и осестремительное ускорения, вычисляемые с определенной точностью. Также оказывают влияние неучтенные параметры движения платформы, угловые ошибки установки градиентометра относительно приборной системы координат, несоосность в ориентации внутренних акселерометров прибора, несинхронность фиксирования измерений различных блоков, температурные и магнитные флуктуации окружающей среды и др.

Рассмотрим реалистическую ситуацию, когда в модели гравитационного градиентометра и в его измерениях присутствуют различного рода ошибки и выделим некоторые из них. Математическое описание погрешностей прибора проводится на примере модели канонического градиентометра, состоящего из шести пространственных трехосных акселерометров, разнесенных по трем ортогональным осям на одинаковое расстояние от центра. При этом предполагается, что описание любой реализации прибора сводится к канонической модели, причем специфические ошибки конкретных реализаций не рассматриваются.

*2.1. Математическое описание акселерометра и его ошибок.* Для построения модели погрешностей градиентометра удобно воспользоваться обычно используемой моделью акселерометра, являющегося основным элементом конструкции, и следовательно, основным источником ошибок градиентометра.

Рассмотрим математическую модель классического ньютонометра, предложенную в [5]. Разность между измеренным и идеальным значением удельной силы, действующей на чувствительную массу, составляет ошибку показаний ньютонометра. Для однокомпонентной модели такая ошибка может быть представлена в следующем виде

$$\Delta f_x = a + b + b_0 + k(f_x)^2 + m(f_x)^3 + \Phi_3 f_y + \Phi_2 f_z$$

Здесь величина  $a$  характеризует чувствительность ньютонометра,  $b$  – неопределенность положения нуля,  $b_0$  – смещение нуля ньютонометра (систематическая ошибка). Составляющие  $k(f_x)^2 + m(f_x)^3$  отражают нелинейность функции  $f_x$ , а  $\Phi_3 f_y + \Phi_2 f_z$  – влияние боковых компонент кажущегося ускорения.

Схема пространственного ньютонометра моделируется тремя однокомпонентными. В качестве модельного уравнения пространственного ньютонометра можно взять уравнение

$$\mathbf{f}' = (E + \Phi)\mathbf{f} + \mathbf{W} + \mathbf{F} \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{f}'$  – измеренное значение вектора удельной силы,  $E$  – единичная матрица,  $\mathbf{f}$  – идеальное значение вектора удельной силы. Матрица  $\Phi = (\Phi_{ij})$  характеризует ошибки, зависящие от измеряемого сигнала, элементы  $\Phi_{ii}$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) – ошибки масштаба,  $\Phi_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, 3$ ) – ошибки перекрестно-осевой чувствительности;  $\mathbf{W}$  – аддитивные погрешности. Матрица-столбец

$$\mathbf{F} = [k_1(f_1)^2 + m_1(f_1)^3, k_2(f_2)^2 + m_2(f_2)^3, k_3(f_3)^2 + m_3(f_3)^3]^T$$

характеризует нелинейность характеристики ньютонометра,

Характерные значения коэффициентов в модели ньютонометра (на примере акселерометра фирмы Bell Aerospace [10]) следующие:  $a \sim 10^{-6} - 10^{-7}g$ ,  $b_0 \sim 10^{-4}g$ ,  $k \sim 0,5 \times 10^{-6}g/g^2$ ,  $m \sim 0,5 \times 10^{-8}g/g^3$ .

*2.2 Модель погрешностей канонического градиентометра.* На основе математической модели акселерометра и модели его ошибок можно построить модель ошибок градиентометра, являющихся следствием неидеальности его конструктивных составляющих.

Компоненты измеряемого градиентометром тензора  $\Lambda$  образуются из разностей показаний разнесенных по одной оси пар акселерометров  $f_i^j$ , где  $j$  ( $j = (1-2), (3-4), (5-6)$ ) – номер трехосного акселерометра в составе градиентометра попарно для

расположенных на одной оси градиентометра,  $i$  – номер компоненты измеряемой силы каждым однокомпонентным акселерометром

$$\Lambda = \frac{1}{l} \begin{vmatrix} f_1^2 - f_1^1 & f_1^4 - f_1^3 & f_1^6 - f_1^5 \\ f_2^2 - f_2^1 & f_2^4 - f_2^3 & f_2^6 - f_2^5 \\ f_3^2 - f_3^1 & f_3^4 - f_3^3 & f_3^6 - f_3^5 \end{vmatrix}$$

Здесь  $l$  – расстояние между центрами парных (симметричных относительно центральной точки) акселерометров.

Формирование тензора гравитационного градиента  $\Gamma$  по измеряемому тензору  $\Lambda$  производится следующим образом [11]:  $\Gamma = 1/2 (\Lambda + \Lambda^T) + \hat{\omega}^2$ . Центроостремительное ускорение  $\hat{\omega}^2$  считаем навигационной величиной, определяемой с высокой точностью, и как источник ошибок гравитационного тензора не рассматриваем.

Запишем для акселерометров, расположенных на 1-й оси градиентометра модельные уравнения (2.1) и сформируем измеряемый градиентометром тензор (его первый столбец)

$$\Lambda_1 l = \mathbf{f}^2 - \mathbf{f}^1 = \mathbf{f}_z^2 - \mathbf{f}_z^1 + \Phi^2 \mathbf{f}_z^2 - \Phi^1 \mathbf{f}_z^1 + \mathbf{W}^2 - \mathbf{W}^1 + \mathbf{F}^2 - \mathbf{F}^1 \quad (2.2)$$

Здесь  $\mathbf{f}_z$  – силы, действующие на акселерометры в приборных осях  $Mz$ ,  $\mathbf{f}$  – измеренное значение силы. Величины векторов – столбцов  $\Lambda_2, \Lambda_3$  выражаются аналогично.

Рассмотрим отдельно каждую составляющую ошибки тензора гравитационного градиента, вызванную различными неточностями конструкции прибора.

*Угловые ошибки несоосности конструктивных элементов градиентометра.*

Ошибка, вызванная неточностью внутренней геометрии градиентометра, отражается в уравнении (2.2) недиагональными компонентами матриц  $\Phi^j$  ( $j = 1, \dots, 6$ ).

Запишем действующие на акселерометры силы в проекции на оси приборного трехгранника  $Mz$ :  $\mathbf{f}^j = (E + \Phi) \mathbf{f}_z^j$ . Для  $j$ -го пространственного акселерометра матрица преобразования от приборной системы координат к действительным осям этого акселерометра с использованием углов малого поворота ( $\phi^j, \psi^j, \chi^j$ ) имеет вид

$$\begin{vmatrix} f_1^j \\ f_2^j \\ f_3^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \phi_3^j & -\phi_2^j \\ -\psi_3^j & 1 & \psi_1^j \\ \chi_2^j & -\chi_1^j & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_{z1}^j \\ f_{z2}^j \\ f_{z3}^j \end{vmatrix}$$

где  $\phi, \psi, \chi$  три оси всего градиентометра. В обозначении угла малого поворота  $\phi_i^j$  номер трехосного акселерометра отражается верхним индексом  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ), нижний индекс  $i$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) указывает на номер оси, поворот вокруг которой совместит ось акселерометра с соответствующей осью трехгранника  $Mz$ .

Теперь сформируем компоненты измеряемого тензора  $\Lambda$ :

$$\Lambda_1 l = \mathbf{f}^2 - \mathbf{f}^1 = (E + \Phi^2)(\mathbf{f}_z^2 - \mathbf{f}_z^1) + (\Phi^2 - \Phi^1)\mathbf{f}_z^1$$

Векторы-столбцы  $\Lambda_2$  и  $\Lambda_3$  выражаются аналогично.

И, наконец, получим тензор гравитационного градиента в зависимости от малых углов отклонений осей чувствительности внутренних акселерометров градиентометра

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \Lambda_{11}^z + \phi_3^2 \Lambda_{12}^z - \phi_2^2 \Lambda_{13}^z + 1/2 \left[ (\phi_3^2 - \phi_3^1) f_{z2}^1 - (\phi_2^2 - \phi_2^1) f_{z3}^1 \right] \\ \Gamma_{12} &= \Gamma_{21} = 1/2 \left[ \Lambda_{12}^z + \Lambda_{21}^z + \psi_1^2 \Lambda_{13}^z - \psi_3^2 \Lambda_{11}^z + \phi_3^4 \Lambda_{22}^z - \phi_2^4 \Lambda_{23}^z \right] + \\ &+ 1/2 \left[ (\psi_1^2 - \psi_1^1) f_{z3}^1 - (\psi_3^2 - \psi_3^1) f_{z1}^1 + (\phi_3^4 - \phi_3^3) f_{z2}^3 - (\phi_2^4 - \phi_2^3) f_{z3}^3 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13} = \Gamma_{31} &= \frac{1}{2} \left[ \Lambda_{13}^z + \Lambda_{31}^z + \chi_2^2 \Lambda_{11}^z - \chi_1^2 \Lambda_{12}^z + \phi_3^6 \Lambda_{32}^z - \phi_2^6 \Lambda_{33}^z \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \left[ (\chi_2^2 - \chi_2^1) f_{z1}^1 - (\chi_1^2 - \chi_1^1) f_{z2}^1 + (\phi_3^6 - \phi_3^5) f_{z2}^5 - (\phi_2^6 - \phi_2^5) f_{z3}^5 \right] \\
\Gamma_{22} &= \Lambda_{22}^z + \psi_1^4 \Lambda_{23}^z - \psi_3^4 \Lambda_{21}^z + \frac{1}{2} \left[ (\psi_1^4 - \psi_1^3) f_{z3}^3 - (\psi_3^4 - \psi_3^3) f_{z1}^3 \right] \\
\Gamma_{23} = \Gamma_{32} &= \frac{1}{2} \left[ \Lambda_{23}^z + \Lambda_{32}^z + \chi_2^4 \Lambda_{21}^z - \chi_1^4 \Lambda_{22}^z + \psi_1^6 \Lambda_{33}^z - \psi_3^6 \Lambda_{31}^z \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \left[ (\chi_2^4 - \chi_2^3) f_{z1}^3 - (\chi_1^4 - \chi_1^3) f_{z2}^3 + (\psi_1^6 - \psi_1^5) f_{z3}^5 - (\psi_3^6 - \psi_3^5) f_{z1}^5 \right] \\
\Gamma_{33} &= \Lambda_{33}^z + \chi_2^6 \Lambda_{31}^z - \chi_1^6 \Lambda_{32}^z + \frac{1}{2} \left[ (\chi_2^6 - \chi_2^5) f_{z1}^5 - (\chi_1^6 - \chi_1^5) f_{z2}^5 \right]
\end{aligned}$$

В правых частях приведенных выражений следует вычитать соответствующую компоненту матрицы  $\omega^2$ .

Ошибка тензора гравитационного градиента в зависимости от угловых ошибок внутренней конструкции градиентометра для наглядности можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \Delta \Gamma_{11} \\ 2\Delta' \Gamma_{12} \\ 2\Delta' \Gamma_{13} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & \phi_3^2 & -\phi_2^2 \\ -\psi_3^2 & 0 & \psi_1^2 \\ \chi_2^2 & -\chi_1^2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Lambda_{11} \\ \Lambda_{12} \\ \Lambda_{13} \end{vmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & (\phi_3^2 - \phi_3^1) & -(\phi_2^2 - \phi_2^1) \\ -(\psi_3^2 - \psi_3^1) & 0 & (\psi_1^2 - \psi_1^1) \\ (\chi_2^2 - \chi_2^1) & -(\chi_1^2 - \chi_1^1) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} 2\Delta'' \Gamma_{12} \\ \Delta \Gamma_{22} \\ 2\Delta' \Gamma_{23} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & \phi_3^4 & -\phi_2^4 \\ -\psi_3^4 & 0 & \psi_1^4 \\ \chi_2^4 & -\chi_1^4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Lambda_{21} \\ \Lambda_{22} \\ \Lambda_{23} \end{vmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & (\phi_3^4 - \phi_3^3) & -(\phi_2^4 - \phi_2^3) \\ -(\psi_3^4 - \psi_3^3) & 0 & (\psi_1^4 - \psi_1^3) \\ (\chi_2^4 - \chi_2^3) & -(\chi_1^4 - \chi_1^3) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1^3 \\ f_2^3 \\ f_3^3 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} 2\Delta'' \Gamma_{13} \\ 2\Delta'' \Gamma_{23} \\ \Delta \Gamma_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & \phi_3^6 & -\phi_2^6 \\ -\psi_3^6 & 0 & \psi_1^6 \\ \chi_2^6 & -\chi_1^6 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Lambda_{31} \\ \Lambda_{32} \\ \Lambda_{33} \end{vmatrix} + \\
&+ \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & (\phi_3^6 - \phi_3^5) & -(\phi_2^6 - \phi_2^5) \\ -(\psi_3^6 - \psi_3^5) & 0 & (\psi_1^6 - \psi_1^5) \\ (\chi_2^6 - \chi_2^5) & -(\chi_1^6 - \chi_1^5) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1^5 \\ f_2^5 \\ f_3^5 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Для недиагональных компонент тензора  $\Gamma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) ошибка складывается из двух составляющих  $\Delta \Gamma_{ij} = \Delta' \Gamma_{ij} + \Delta'' \Gamma_{ij}$ .

Таким образом, в каждую компоненту тензора погрешности гравитационного градиента линейно входят компоненты измеряемого градиентометром тензора  $\Lambda$  с коэффициентами порядка угловой ошибки ориентации оси внутреннего акселерометра прибора от оси градиентометра. Второй составляющей будут линейные слагаемые

перегрузок акселерометров с коэффициентами порядка угловой ошибки ориентации осей двух симметричных акселерометров.

*Ошибки масштабных множителей.* Ошибки масштабных коэффициентов, заданных в паспортных характеристиках градиентометра отражаются в диагональных элементах матриц  $\Phi^j$  ( $j = 1, \dots, 6$ ) уравнения (2.2). Обозначим через  $\phi^j, \psi^j, \chi^j$  ошибки задания масштабных множителей  $j$ -го акселерометра по 1-й, 2-й, 3-й осям соответственно. Т.е. матрица  $\Phi^j$  имеет вид

$$\Phi^j = \begin{vmatrix} \phi^j & 0 & 0 \\ 0 & \psi^j & 0 \\ 0 & 0 & \chi^j \end{vmatrix}$$

На ошибку градиента это обстоятельство повлияет следующим образом (по аналогии с рассуждениями, проводимыми при выводе выражения для угловых ошибок)

$$\begin{vmatrix} \Delta\Gamma_{11} \\ 2\Delta'\Gamma_{12} \\ 2\Delta'\Gamma_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \psi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Lambda_{11} \\ \Lambda_{12} \\ \Lambda_{13} \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{l} \begin{vmatrix} (\phi^2 - \phi^1) & 0 & 0 \\ 0 & (\psi^2 - \psi^1) & 0 \\ 0 & 0 & (\chi^2 - \chi^1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2\Delta''\Gamma_{12} \\ \Delta\Gamma_{22} \\ 2\Delta'\Gamma_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi^4 & 0 & 0 \\ 0 & \psi^4 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Lambda_{21} \\ \Lambda_{22} \\ \Lambda_{23} \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{l} \begin{vmatrix} (\phi^4 - \phi^3) & 0 & 0 \\ 0 & (\psi^4 - \psi^3) & 0 \\ 0 & 0 & (\chi^4 - \chi^3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1^3 \\ f_2^3 \\ f_3^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2\Delta''\Gamma_{13} \\ 2\Delta''\Gamma_{23} \\ \Delta'\Gamma_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi^6 & 0 & 0 \\ 0 & \psi^6 & 0 \\ 0 & 0 & \chi^6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Lambda_{31} \\ \Lambda_{32} \\ \Lambda_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{l} \begin{vmatrix} (\phi^6 - \phi^5) & 0 & 0 \\ 0 & (\psi^6 - \psi^5) & 0 \\ 0 & 0 & (\chi^6 - \chi^5) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1^5 \\ f_2^5 \\ f_3^5 \end{vmatrix}$$

Ошибки недиагональных компонент тензора  $\Gamma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) образуются из двух составляющих  $\Delta\Gamma_{ij} = \Delta'\Gamma_{ij} + \Delta''\Gamma_{ij}$ .

Итак, неточная информация о масштабных коэффициентах внутренних акселерометров градиентометра порождает ошибку выходного сигнала. При этом в каждую компоненту тензора погрешности гравитационного градиента линейно входят компоненты измеряемого градиентометром тензора  $\Lambda$  с коэффициентами порядка ошибки задания масштабных коэффициентов акселерометров. Второй составляющей будут линейные слагаемые перегрузок акселерометров с коэффициентами порядка разности масштабных ошибок двух симметричных акселерометров.

*Ошибка смещения нуля градиентометра.* Аддитивные компоненты погрешностей акселерометров  $W^j$  в уравнении (2.2) дадут аддитивную ошибку для каждой компоненты тензора гравитационного градиента  $\mathbf{W}$ . Эта величина будет включать в себя систематическую ошибку – погрешность определения смещение нуля градиентометра после калибровки.

*Ошибка, вызванная нелинейностью характеристик акселерометров.* Квадратичная нелинейность акселерометров вызывает ошибку тензора гравитационного градиента

$$\Delta\Gamma_{11} = k_1^2(f_2^2)^2 - k_1^1(f_1^1)^2$$

$$\Delta\Gamma_{12} = \frac{1}{2}(k_2^2(f_2^2)^2 - k_2^1(f_2^1)^2 + k_1^4(f_1^4)^2 - k_1^3(f_1^3)^2)$$

$$\Delta\Gamma_{13} = \frac{1}{2}(k_3^2(f_3^2)^2 - k_3^1(f_3^1)^2 + k_1^6(f_1^6)^2 - k_1^5(f_1^5)^2)$$

$$\Delta\Gamma_{22} = k_2^4(f_2^4)^2 - k_2^3(f_2^3)^2$$

$$\Delta\Gamma_{23} = \frac{1}{2}(k_3^4(f_3^4)^2 - k_3^3(f_3^3)^2 + k_2^6(f_2^6)^2 - k_2^5(f_2^5)^2)$$

$$\Delta\Gamma_{33} = k_3^6(f_3^6)^2 - k_3^5(f_3^5)^2$$

Ошибка кубической нелинейности выглядит аналогично. При этом следует заменить все квадратичные члены на кубические и использовать другое обозначение коэффициентов.

*Угловые ошибки ориентации градиентометра.* Данная погрешность вызвана невозможностью идеально точно совместить оси всего градиентометра с осями связанной с платформой системой координат.

Ошибка установки градиентометра на малый угол поворота  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$  относительно приборных осей трехгранника  $Mz$  приводит к возмущению входной величины измеряемого тензора  $\Lambda = \Lambda_z + \delta\Lambda_z - \Lambda_z\delta$  и тензора гравитационного градиента  $\Gamma = \Gamma_z + \delta\Gamma_z - \Gamma_z\delta$ . При этом предполагается, что собственные оси чувствительности градиентометра ортогональны.

*Ошибка временного запаздывания.* Для определения тензора гравитационного градиента  $\Gamma$  при динамических испытаниях, например, в полете, следует учитывать инерционные свойства градиентометра.

Введем обозначение тензора  $\mathbf{G}$  (размерности Этвеш), имеющего смысл мгновенного сигнала, отражаемого градиентометром. Тогда величины  $\Gamma$  и  $\mathbf{G}$  связаны следующим дифференциальным уравнением первого порядка:  $\tau\dot{\mathbf{G}} + \mathbf{G} = \Gamma$ , где  $\tau$  – постоянная времени динамической модели градиентометра (считаем ее одинаковой для всех компонент тензора),  $\Gamma$  – искомое значение гравитационного градиента.

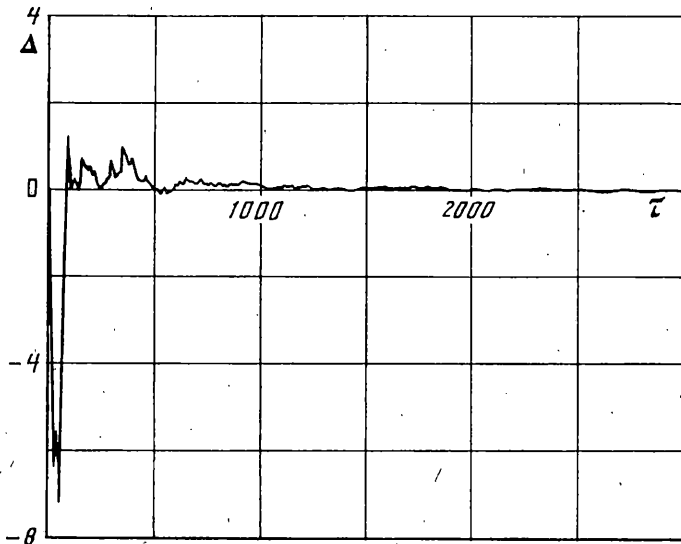
Ошибка задания постоянной времени запаздывания  $\tau$  на величину  $\Delta\tau$  приводит к следующей погрешности в выходном сигнале гравитационного градиента:  $\Delta\Gamma = \Delta\tau\dot{\mathbf{G}}$ . С точностью до величины порядка  $\Delta\tau$  эту ошибку можно записать в виде  $\Delta\Gamma = \Delta\tau\dot{\Gamma}$ .

### 3. Численное моделирование алгоритма решения задачи авиационной гравиметрии.

Численное моделирование проводилось с целью исследовать оцениваемость переменных, описывающих инструментальные погрешности градиентометра и включенных в вектор состояния динамической системы, а также проверить чувствительность алгоритма к немоделируемым возмущениям. В качестве алгоритма оценивания использовался фильтр Калмана.

Трудности, возникшие при проведении анализа в настоящей задаче, заключаются в отсутствии какого-либо экспериментального материала по конкретной приборной реализации градиентометра и отсутствии достоверных сведений о точностных ха-





рактических приборах, демонстрируемых на подвижном основании. Тем не менее можно воспользоваться доступными результатами практических исследований гравиметрической системы и провести некоторые качественные аналогии касательно градиентометров. Основанием для подобной параллели является тот факт, что действие обоих приборов строится на одних физических принципах, их основным конструктивным элементом является акселерометр.

Вектор состояния системы (1.4) поочередно дополнялся переменными описывающими отдельные ошибки величины сигнала гравитационного градиента, и в целом имеет вид  $[\delta x, \delta v, \delta g, \beta, \nu, \Phi, K, M, W, \delta, \Delta \tau]^T$ . Для задания немоделируемых составляющих погрешностей  $\Delta f$  и  $\Delta G$  использовалась запись показаний гравиметрической системы, произведенная во время летных испытаний. Данные получены в лаборатории управления и навигации механико-математического факультета МГУ. Шумы градиентометра задавались шумами гравиметров, при этом масштабные коэффициенты выбирались в соответствии со следующей пропорцией: точность гравиметра в 0,1 мГал, показанная в неподвижном состоянии соответствует точности градиентометра в 1 Е. Таким образом при проведенных преобразованиях сохранены спектральные свойства шумовых составляющих сигнала.

Моделирование проводилось в следующих предположениях:

- порядки навигационных величин выбирались в соответствии с параметрами реально существующих ИНС;
- характеристики величин, моделирующих погрешности градиентометра, задавались на примере приборов Bell Aerospace;
- ошибка измерений СНС (1.3) моделировалась процессом белого шума, причем предполагаемая точность позиционной информации 10 см;
- шаг квантования времени системы 1 с.

Имитировалось движение по траектории, включающей в себя маневры (повороты). На стационарной траектории оцениваемость переменных, обозначающих погрешности существенно ухудшается.

Некоторые результаты моделирования:

- угловые ошибки несоосности акселерометров градиентометра порядка  $4''$  за 20 мин работы алгоритма оцениваются с точностью  $0,004''$ ;
- ошибки задания масштабных коэффициентов акселерометров порядка  $10^{-5}$  определяются с точностью  $10^{-8}$ ;

– точность определения коэффициентов нелинейности квадратичного характера величиной  $0,5 \times 10^{-6} g/g^2$  составляет  $0,2 \times 10^{-7} g/g^2$ .

Ошибка определения гравитационной аномалии  $\Delta$  [мГал] после стабилизации коррекционного алгоритма не превышает 0,5 мГал, что отражено на фигуре ( $\tau$  [с]).

Следует отметить, что разработанная модель погрешностей гравитационного градиентометра предусматривает дальнейшее развитие, учитывающее специфические особенности конкретных приборных реализаций и их эксплуатационные особенности.

**4. Выводы.** Предложена модель инструментальных погрешностей канонического гравитационного градиентометра. Параметры модели включены в вектор состояния линейной динамической системы уравнений ошибок, возникающих при решении задачи авиационной гравиметрии. Получена удовлетворительная точность оценки гравитационной аномалии при численном моделировании алгоритма решения задачи в рамках сделанных предположений об инструментальных погрешностях.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gerber M.A. Gravity Gradiometry. Something New in Inertial Navigation // Astron. and Aeron. 1978. V. 16. No. 5. P. 18–26.
2. Paik H.J., Canavan E.R., Moody M.V. Airborne / shipborne SGG survey System // Proceedings of the International Symposium on Kinematic Systems in Geodesy, Geomatics and Navigation. Banff, Canada: University of Calgary. 1997. P. 565–570.
3. Gerber M.A. Propagation of gravity gradiometer errors in an airborne inertial navigation system // AIAA Preprint 75–1089. Boston: Mass, 1975.
4. Chan H., Paik H. Superconducting gravity gradiometer for sensitive gravity measurements // Physical Review. Particles and Fields. 1978. V. 35. No. 12.
5. Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И. Теория навигационных систем. М.: Изд-во МГУ, 1980. 228 с.
6. Самолетные навигационные системы. М.: Воениздат, 1973. 465 с.
7. Вавилова Н.Б., Пануша И.А. Об использовании градиентометрических измерений в задаче авиационной гравиметрии // Вестн. Моск. ун-та. № 4. 1999. С. 38–43.
8. Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И. Задача коррекции в инерциальной навигации. М.: Изд-во МГУ, 1982. 174 с.
9. Голован А.А., Горицкий А.Ю., Парусников Н.А., Тихомиров В.В. Алгоритмы корректируемых инерциальных навигационных систем: Препринт № 2. М.: МГУ, 1994.
10. Development experience of gravity gradiometer system // IEEE PLANS'82. P. 323–332.
11. Reinhardt V.S., von Bun F.O., Turneaure J.P. A supersensitive accelerometer for spacecraft gradiometry // IEEE. 1982. P. 279–288.

Москва

Поступила в редакцию  
12.02.1999