

УДК 539.3

© 1999 г. И.В. АНДРИАНОВ, В.А. МИКОЛЕНКО, Е.Г. ХОЛОД

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПЛОСКОГО ВОЛОКНИСТОГО  
 КОМПОЗИТА ПРИ УЧЕТЕ ШИРИНЫ ВОЛОКНА**

Рассматривается плоская динамическая задача теории упругости для полосы (матрицы), армированной волокнами (включениями) большой жесткости (фиг. 1).

Материал матрицы считается нелинейным (что характерно, например, для резиноподобных материалов), включения описываются в рамках линейной модели. Учитываются дискретный характер достаточно редко расположенных волокон и их ширина. Описанная модель может применяться, например, для описания резинокордной ткани.

Строится аналитическое решение, важное с точки зрения практики [1–3]. Для этого последовательно применяются: алгоритм, основанный на асимптотическом разложении обобщенных функций [4, 5], метод осреднения дифференциальных уравнений с быстропеременными коэффициентами [2, 3], разложение по отношению жесткостных параметров [6] и метод Лейбнсона – Ишлинского [7, 8].

Исходные уравнения движения могут быть представлены следующим образом [9, 10]:

$$L_1(u, v) \equiv [(1 + u_x)\delta_{11} + u_y\delta_{12}]_x + [(1 + u_x)\delta_{12} + u_y\delta_{22}]_y = [\rho_0 + \bar{\rho}_c \Phi(y)]u_{tt} \quad (1)$$

$$L_2(u, v) \equiv [v_x\delta_{11} + (1 + v_x)\delta_{11}]_x + [v_x\delta_{12} + (1 + v_x)\delta_{22}]_y = [\rho_0 + \bar{\rho}_c \Phi(y)]u_{tt}$$

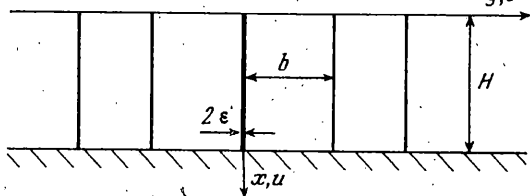
$$\Phi(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [H(y + kb - \varepsilon) - H(y + kb + \varepsilon)]$$

Здесь индексы  $x, y, t$  означают частные производные по соответствующим переменным;  $\rho_0$  и  $\bar{\rho}_c$  – плотности материала полосы и армирующих нитей соответственно;  $H(\dots)$  – функция Хевисайда,  $u(v)$  – перемещение в направлении оси  $x(y)$ ;  $\delta_{11}(\delta_{22})$  – напряжение растяжения–сжатия вдоль оси  $x(y)$ ;  $\delta_{12}$  – напряжение сдвига;  $b$  – расстояние между средними линиями ребер;  $2\varepsilon$  – ширина ребра.

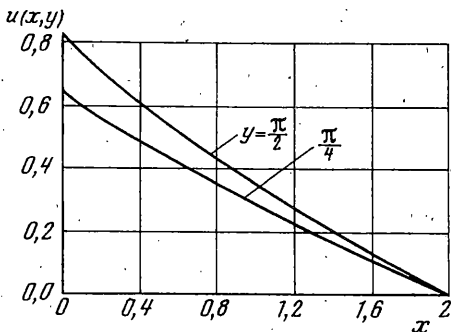
Предполагается, что принятая система координат материальна (метод Лагранжа), т.е. координаты точек недеформированной системы численно совпадают с координатами деформированной системы. Тогда роль характеристик деформации играют компоненты тензора деформаций, которые в декартовой системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} e_{11} &= u_x + 0,5(u_x^2 + v_x^2), & e_{22} &= v_y + 0,5(u_y^2 + v_y^2) \\ e_{12} &= u_y + v_x + u_x u_y + v_x v_y \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим ортотропный материал, главные направления ортотропии которого совпадают с декартовыми осями координат. Пренебрегаем для упрощения выкладок



Фиг. 1



Фиг. 2

коэффициентом Пуассона, что незначительно влияет на результат. Тогда соотношение между деформациями и напряжениями можно записать следующим образом:

$$\delta_{11} = [E_1 + \bar{E}_c F(y)] e_{11} \quad (3)$$

$$\delta_{22} = E_2 e_{22}, \quad \delta_{12} = G e_{12} \quad (4)$$

Здесь  $E_1, E_2$  – модули Юнга в направлении осей  $x, y$  соответственно,  $G$  – модуль сдвига,  $\bar{E}_c$  – жесткость нитей на растяжение,  $e_{11}, e_{22}, e_{12}$  – соответствующие деформации.

Учтем сначала ширину ребер. Считая ребра тонкими, можно использовать параметр  $2\epsilon$  в качестве малого и разложить функцию  $\Phi(y)$  в ряд по  $\epsilon$ . Покажем это разложение на примере функции  $\varphi(y) = H(x - \epsilon) - H(x + \epsilon)$ .

Применяя двухстороннее преобразование Лапласа [9], получим

$$\bar{\varphi}(p) = \frac{\exp(-\epsilon p) - \exp(\epsilon p)}{p}$$

где  $p$  – параметр преобразования Лапласа.

После разложения функции  $\bar{\varphi}(p)$  в ряд по  $\epsilon$  имеем

$$\bar{\varphi}(p) = 2\epsilon - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\epsilon^{n+1} p}{(n+1)!}$$

В результате обратного преобразования Лапласа (обоснованного в рамках теории обобщенных функций) получаем

$$\varphi(y) = 2\epsilon \delta(y) - 2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \epsilon^{n+1} \frac{\delta^{(n)}(y)}{(n+1)!}$$

Здесь  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака;  $\delta^{(n)}(x)$  – ее  $n$ -я производная. Функция  $\Phi(y)$  может быть представлена в виде:

$$\Phi(y) = 2\epsilon \Phi_0(y) + 2\epsilon \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \epsilon^n \Phi_n(y)$$

$$\Phi_0(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(y - kb), \quad \Phi_n(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(y - kb)$$

В итоге в первом приближении приходим к системе уравнений с одномерными ребрами:

$$L_1(u, v) = [\rho_0 + \rho_c \Phi_0(y)] u_{,1}, \quad L_2(u, v) = [\rho_0 + \rho_c \Phi_0(y)] u_{,2}, \quad \rho_0 = 2\bar{\epsilon} \bar{\rho}_c$$

Соотношение между деформацией  $e_{11}$  и напряжением  $\delta_{11}$  (3) записывается так

$$\delta_{11} = [E_1 + E_c \Phi_0(y)]e_{11}, \quad E_c = 2\varepsilon \bar{E}_c$$

Учет ширины ребер может быть без труда произведен в следующем приближении по стандартной методике теории возмущений [3].

Перейдем к анализу задачи с одномерными ребрами, учитывая дискретность их расположения. Если внешняя нагрузка изменяется достаточно плавно, так что характерный период ее изменения больше расстояния между армирующими волокнами, можно перейти к осредненному описанию, используя изложенную в [2, 3] схему.

Первоначально осредним входящую в уравнение (1), (3) переменную по  $y$  функцию  $\Phi(y)$ , заменив ее средним значением  $1/b$ . Тогда приходим к соотношениям нелинейной ортотропной теории упругости

$$[(1 + u_{0x})\delta_{11}^{(0)} + u_{0y}\delta_{12}^{(0)}]_x + [(1 + u_{0x})\delta_{12}^{(0)} + u_{0y}\delta_{22}^{(0)}]_y = \rho_1 u_{0n} \quad (5)$$

$$[(1 + v_{0x})\delta_{11}^{(0)} + v_{0y}\delta_{12}^{(0)}]_x + [(1 + v_{0x})\delta_{12}^{(0)} + v_{0y}\delta_{22}^{(0)}]_y = \rho_1 v_{0n}$$

$$\delta_{11}^{(0)} = E_1 e_{11}^{(0)}, \quad \delta_{22}^{(0)} = E_2 e_{22}^{(0)}, \quad \delta_{12}^{(0)} = G e_{12}^{(0)}$$

$$e_{11}^{(0)} = u_{0x} + 0,5(u_{0x}^2 + v_{0x}^2), \quad e_{22}^{(0)} = v_{0y} + 0,5(u_{0y}^2 + v_{0y}^2)$$

$$e_{12}^{(0)} = u_{0y} + v_{0x} + u_{0x}u_{0y} + v_{0x}v_{0y}$$

$$E_{11} = E_1 + E_c / b, \quad \rho_1 = \rho_0 + \rho_c / b$$

Если на краю полосы  $x = 0$  задана нормальная динамическая нагрузка  $P(y, t)$ , а край  $x = H$  защемлен, то граничные условия можно представить в следующем виде:

$$\text{при } x = 0: \delta_{11}^{(0)} = P(y, t), \quad \delta_{12}^{(0)} = 0 \quad (6)$$

$$\text{при } x = H: u_0 = v_0 = 0$$

Таким образом, мы приходим к краевой задаче (5), (6) с гладкими коэффициентами. Решение ее может строиться численными методами, либо (как далее) при помощи дальнейших асимптотических упрощений по другим малым параметрам.

Перейдем к построению обусловленных дискретной структурой нитей поправок и осредненному решению. Ограничиваясь первым приближением (последовательное построение асимптотического процесса описано, например, в [3]), положим  $u \approx u_0 + u_1$ ,  $v \approx v_0 + v_1$ . Поскольку поправки быстро изменяются в направлении оси  $Oy$ , при их определении можно ограничиться лишь старшими производными по  $y$ , а ввиду достаточно большой жесткости нитей (а именно этот случай интересен на практике) считать на соответствующих линиях  $y = ib$  ( $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ):

$$u_1 = v_1 = 0 \quad (7)$$

Тогда приходим к следующей задаче на примере  $0 \leq y \leq b$  (далее решение периодически продолжается):

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -\frac{\rho_1 u_{0n}}{G} + \left[ (1 + u_{0x}) \frac{E_1 e_{11}^{(0)}}{G} \right]_{x} \equiv \Phi_1(u_0) \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = -E_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} \rho_1 v_{0n} \quad (9)$$

при  $y = 0, b: u_1 = v_1 = 0$ .

При интегрировании системы (8), (9) функции  $u_0, v_0$  считаются постоянными [11]. В

результате получаем

$$u_1 = \varphi_1(u_0)F_1(y), \quad v_1 = \varphi_2(v_0)F_1(y) + \varphi_3(u_0)F_2(y) \quad (10)$$

$$F_1(y) = 0,5y(y-b), \quad F_2(y) = 0,5y(b^2/3 - 0,5by + y^2/6)$$

$$F_i(y+b) = F_i(y) \quad (i=1, 2), \quad \varphi_2(v_0) = -\frac{\rho_1}{G}v_{0m}, \quad \varphi_3(u_0) = \frac{E_2}{G} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$$

Решение (10) не удовлетворяет, вообще говоря, заданным граничным условиям. Соответствующие невязки компенсируются решением типа пограничного слоя  $u_{11}, v_{11}$ , которое определяется из следующей краевой задачи:

$$E_1 u_{11,xx} + G u_{11} + G v_{11,xy} = 0, \quad E_2 v_{11,xx} + G v_{11,yy} + G u_{11,xy} = 0 \quad (11)$$

$$\text{при } x=0: \quad E_1 u_{11,x} = -E_1 u_{1,x} - E_c \delta_{11}^{(0)}, \quad u_{11,y} + v_{11,x} = -u_{1,y}$$

$$\text{при } x=H: \quad u_{11} = -u_1, \quad v_{11} = -v_1 \quad (12)$$

$$\text{при } x=0, b: \quad u_{11} = v_{11} = 0 \quad (13)$$

Решение краевой задачи (11)–(13) может быть определено методом Канторовича [11]. Таким образом, поправки к осредненному решению выписывают явно (10) либо получаются из решения линейной квазистатической краевой задачи с постоянными коэффициентами (11)–(13).

Перейдем к упрощению осредненной краевой задачи (5), (6), принимая в качестве малого параметра отношение  $\varepsilon_1 = G/E_1$ , при этом  $E_2/E_1 \sim 1$ .

Введем параметры, характеризующие изменяемость исходных функций по  $x$ ,  $y$  и  $t$ , степени их нелинейности и соотношение между функциями  $u, v$ :

$$\frac{\partial}{\partial x}(u; v) \sim \varepsilon_1^{-\alpha}(u, v), \quad \frac{\partial}{\partial y}(u, v) \sim \varepsilon_1^{-\beta}(u, v)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u; v) \sim \varepsilon_1^{-\gamma}(u, v), \quad u \sim \varepsilon_1^{\delta}, \quad v \sim \varepsilon_1^{-\kappa}$$

В результате применения асимптотической процедуры, детально описанной, например, в [2], получаются два состояния с различной изменяемостью по  $x$  и  $y$ , которые условно можно назвать основным состоянием и пограничным слоем

$$1. \quad \alpha = -1/2, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1/2, \quad \delta = 0, \quad \kappa = 0$$

$$[E_{11}(1+u_x)(u_x + 0,5u_x^2) + G u_y(u_y + u_x u_y)]_x + [G(1+u_x)(u_y + u_x u_y)]_y = \rho_1 u_{tt} \quad (14)$$

$$2. \quad \alpha = -1/2, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1/2, \quad \delta = 0, \quad \kappa = -2$$

$$[E_{11}(1+v_y)(v_y + 0,5v_y^2) + G v_x(v_x + v_x v_y)]_y + [G(1+v_y)(v_x + v_x v_y)]_y = 0 \quad (15)$$

Расщепленные граничные условия примут вид для уравнения (14):

$$\text{при } x=0: \quad E_{11}(u_x + 0,5u_x^2) = P(y, t)$$

$$\text{при } x=H: \quad u = 0$$

для уравнения (15):

$$\text{при } x=0: \quad v_{1,x} + v_x v_y = -u_{1,y} + u_x u_y$$

$$\text{при } x=H: \quad v = 0$$

Таким образом, каждое из состояний (14), (15) можно рассчитывать независимо.

Покажем теперь возможность упрощений при использовании метода Лейбензона – Ишлинского. Суть последнего заключается в следующем. В некоторых случаях (когда основная деформация сосредоточена вблизи края) можно пренебречь нелинейными членами в уравнениях равновесия (или движения) сохранив их, однако, в крайних условиях. В данном случае это можно будет сделать, если внешняя нагрузка на краю полосы представляет собой самоуравновешенную по  $y$  нагрузку, причем период этой нагрузки существенно меньше ширины полосы. Упрощенная по методу Лейбензона – Ишлинского краевая задача примет вид:

$$E_{11}u_{xx} + u_{yy} = \rho_1 u_{tt} \quad (16)$$

$$\text{при } x = 0: u_x + 0,5u_x^2 = P(y, t) \quad (17)$$

$$\text{при } x = H: u = 0 \quad (18)$$

$$E_{22}v_{yy} + Gv_{xx} = \rho_1 v_{tt} \quad (19)$$

$$\text{при } x = 0: v_x = -u_y - u_x u_y \quad (20)$$

$$\text{при } x = H: v = 0 \quad (21)$$

$$P_1(y, t) = P(y, t)/E_{11}$$

Преобразуем краевое условие (17), найдя  $u_x$  из решения квадратного уравнения (17) (знак (+) выбирается из условия перехода к линейной задаче):

$$\text{при } x = 0: u_x = -1 + \sqrt{1 + 2P_1(y, t)} \quad (22)$$

Таким образом, приходим к линейной краевой задаче (16), (19), (22), которая может решаться известными приемами, а затем – к линейной же (при известном  $u$ ) краевой задаче (19)–(21).

В качестве примера рассмотрим статический расчет гладкой ортотропной полосы под действием нагрузки  $P(y) = E_1 \alpha \sin(y/l)$ , где  $\alpha$  – некоторый безразмерный параметр ( $\alpha < 0,5$ ), параметр  $l$  характеризует период внешней нагрузки.

Тогда граничное условие (22) может быть преобразовано к виду

$$\text{при } x = 0: u_x \approx \frac{\alpha^2}{6} + \alpha \sin \bar{y} - \frac{\alpha^2}{6} \alpha \sin(2\bar{y}), \quad \bar{y} = y/l \quad (23)$$

Решение краевой задачи (16), (23) будет

$$\bar{u} = \frac{\alpha^2}{6} (\bar{x} - \bar{H}) - \frac{\alpha \sin \bar{y}}{\varepsilon_1 (1 - A)} [\exp(-\varepsilon_1 \bar{x}) - A \exp(\varepsilon_1 \bar{x})] -$$

$$- \frac{\alpha^2 \sin(2\bar{y})}{6 (1 - A_1)} [\exp(-2\varepsilon_1 \bar{x}) - A_1 \exp(2\varepsilon_1 \bar{x})]$$

$$\bar{x} \doteq x/l, \quad \bar{y} = y/l, \quad \bar{H} = H/l, \quad \bar{u} = u/l$$

$$A = \exp(-\varepsilon_1 \bar{H}) / \exp(\varepsilon_1 \bar{H}), \quad A_1 = \exp(-2\varepsilon_1 \bar{H}) / \exp(2\varepsilon_1 \bar{H})$$

Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 2.

Авторы признательны А.В. Павленко за полезные обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амиро Я.Я., Заруцкий В.А.* Теория ребристых оболочек. Киев: Наук.думка, 1980. 336 с.
2. *Андрянов И.В., Лесничая В.А., Маневич Л.И.* Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 224 с.
3. *Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрянов И.В.* Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.
4. *Estrada R.P., Kanwal R.P.* A distributional theory for asymptotic expansions // Proc. R. Soc. London A. 1990. 428. P. 399–430.
5. *Estrada R.P., Kanwal R.P.* Asymptotic analysis: a distributional approach. Berlin: Birkhauser, 1993. 350 p.
6. *Маневич Л.И., Павленко А.В., Коблик С.Г.* Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. Киев; Донецк: Вища шк., 1982. 253 с.
7. *Лейбензон Л.С.* О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферических и цилиндрических оболочек // Сб. тр. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1951. С. 50–86.
8. *Ишлинский А.Ю.* Рассмотрение вопроса об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. мат. ж. 1954. Т. 6. № 2. С. 140–146.
9. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
10. *Бланд Д.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 184 с.
11. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Наука, 1962. 798 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию  
28.01.1997