МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1999

УДК 539.3

© 1999 г. А.О. ВАТУЛЬЯН, Е.В. САДЧИКОВ

О НОВОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ О КОЛЕБАНИЯХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

В предлагаемой работе построена система неклассических граничных интегральных уравнений 1-го рода с гладкими ядрами, связывающая неизвестные и известные значения на контуре компонент векторов перемещений и напряжений в задаче об установившихся колебаниях ограниченной односвязной области, занятой анизотропной средой. Предложена схема анализа этой системы интегральных уравнений на основе сочетания классического метода граничных элементов и метода квазирешений. Рассмотрены численные примеры, иллюстрирующие реализацию предложенного подхода.

Рассмотрим установившиеся колебания ортотропной среды, занимающей двумерную односвязную область Ω, ограниченную кусочно-гладкой границей S.

Будем считать, что оси упругой симметрии совпадают с осями координат.

Уравнения колебаний имеют вид

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} + \rho\omega^2 u_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{33,3} + \rho\omega^2 u_3 = 0$$

а определяющие соотношения представимы в форме [1]:

$$\sigma_{11} = c_{11}u_{1,1} + c_{13}u_{3,3}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = c_{55}(u_{1,3} + u_{3,1}) \qquad (2)$$

$$\sigma_{33} = c_{13}u_{1,1} + c_{33}u_{3,3}$$

где c_{ij} – упругие постоянные материала.

Предположим, что граница S состоит из двух частей $S = S_1 \cup S_2$, причем на части S_1 задан вектор перемещений, а на части S_2 вектор напряжений:

$$u_i\,|_{S_1} = f_i, \quad \sigma_{ij}n_j\,|_{S_2} = g_i \qquad (3)$$

где n_j $(j = 1, 3)$ – компоненты единичного вектора внешней нормали к S.

Граничная задача (1)–(3) может быть проанализирована на основе классического подхода метода граничных уравнений, основные идеи которого изложены, например в [2]. Ключевым моментом при реализации этого подхода является построение фундаментальных решений для ортотропной среды. В изотропном случае соответствующие фундаментальные решения выражаются, как известно, через функции Ханкеля. В анизотропном случае фундаментальные решения строятся при помощи интегрального преобразования Фурье, однако в явном виде, как в изотропном случае, их получить не удается. Отметим, что представление фундаментальных решений в ортотропной среде в виде однократных интегралов получено в [3]. При отсутствии же явного представления фундаментальных решений возникают трудности технического характера при реализации метода граничных элементов для соответствующей системы граничных уравнений.

В [4] предложен иной подход, основанный лишь на анализе характеристического многочлена оператора теории упругости, проводящий к системе граничных уравнений 1-го рода с гладкими ядрами. Подобная идея по видимому впервые была предложена для изотропной упругой среды в [5]. Построим систему граничных уравнений для анизотропной среды для краевой задачи (1)–(3), используя этот подход.

Применим к системе уравнений (1), (2) преобразование Фурье с параметром $\alpha=(\alpha_1,\alpha_3)$, для чего уравнения (1) умножим на $e^{i(\alpha,x)}$, проинтегрируем по области Ω и, преобразовывая интегралы по Ω в интегралы по S, на основании формулы Грина получим

$$i\alpha_j\tilde{\sigma}_{kj}(\alpha)=\rho\omega^2\tilde{u}_k(\alpha)+\int\limits_S \sigma_{kj}e^{i(\alpha,x)}n_j dl \qquad (4)$$

Относительно компонент трансформант Фурье $\tilde{u}_1,\tilde{u}_1$ получаем систему следующих соотношений:

$$(\alpha_1^2c_{11}+\alpha_3^2c_{55}-\rho\omega^2)\tilde{u}_1+\alpha_1\alpha_3(c_{13}+c_{55})\tilde{u}_3=F_1(\alpha_1,\alpha_3) \qquad (5)$$

$$\alpha_1\alpha_3(c_{55}+c_{31})\tilde{u}_1+(\alpha_1^2c_{55}+\alpha_3^2c_{33}-\rho\omega^2)\tilde{u}_3=F_3(\alpha_1,\alpha_3)$$

$$F_1(\alpha_1,\alpha_3)=\int\limits_S t_1e^{i(\alpha,x)}dl-i\int\limits_S ([\alpha_1c_{11}u_1+\alpha_3c_{55}u_3]n_1+[\alpha_1c_{13}u_3+\alpha_3c_{55}u_1]n_3)e^{i(\alpha,x)}dl$$

$$F_3(\alpha_1,\alpha_3)=\int\limits_S t_3e^{i(\alpha,x)}dl-i\int\limits_S ([\alpha_1c_{55}u_3+\alpha_3c_{31}u_1]n_1+[\alpha_1c_{55}u_1+\alpha_3c_{33}u_3]n_3)e^{i(\alpha,x)}dl$$

$$t_1=\sigma_{11}n_1+\sigma_{13}n_3,\qquad t_3=\sigma_{31}n_1+\sigma_{33}n_3$$

Разрешая систему (5) относительно неизвестных трансформант $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_3$, получаем:

$$\tilde{u}_1=p_{11}(\beta_1,\beta_3)F_1(\beta_1,\beta_3)+p_{13}(\beta_1,\beta_3)F_3(\beta_1,\beta_3)\Delta^{-1}(\beta_1,\beta_3)$$

$$\tilde{u}_3=p_{31}(\beta_1,\beta_3)F_1(\beta_1,\beta_3)+p_{33}(\beta_1,\beta_3)F_3(\beta_1,\beta_3)\Delta^{-1}(\beta_1,\beta_3) \qquad (6)$$

$$p_{11}(\beta_1,\beta_3)=(\gamma_5\beta_1^2+\beta_3^2-1)$$

$$p_{13}(\beta_1,\beta_3)=-(\gamma_5+\gamma_7)\beta_1\beta_3=p_{31}(\beta_1,\beta_3)$$

$$p_{33}(\beta_1,\beta_3)=(\gamma_1\beta_1^2+\gamma_5\beta_3^2-1)$$

$$p_0(\beta_1,\beta_3)=\beta_1^4\gamma_1\gamma_5+\beta_3^4\gamma_5+\beta_1^2\beta_3^2(\gamma_1-2\gamma_5\gamma_7-\gamma_7^2)-\beta_1^2(\gamma_1+\gamma_5)-\beta_3^2(\gamma_5+1)+1$$

$$k^2=\rho\omega^2/c_{33},\qquad \beta_j=k^{-1}\alpha_j,\qquad \gamma_1=c_{11}/c_{33},\qquad \gamma_5=c_{55}/c_{33},\qquad \gamma_7=c_{13}/c_{33}$$

$$\Delta(\beta_1,\beta_3)=c_{33}k^2p_0(\beta_1,\beta_3)$$

Рассмотрим структуру представления (6). Для этого изучим нули полинома $p_0(\beta_1,\beta_3)$. Перейдем к полярной системе координат, введя $\beta_1=\beta\cos(\phi)$, $\beta_3=\beta\sin(\phi)$. Тогда

$$p_0(\beta_1,\beta_3)=A_0(\phi)[\beta^2-(\zeta^1)^2(\phi)][\beta^2-(\zeta^2)^2(\phi)]$$

$$A_0(\phi)=\gamma_1\gamma_5\cos^4(\phi)+(\gamma_1-2\gamma_5\gamma_7-\gamma_7^2)\sin^2(\phi)\cos^2(\phi)+\gamma_5\sin^4(\phi)$$

$$(\zeta^{1,2}(\phi))^2=[A_2(\phi)\pm\sqrt{D(\phi)}](2A_0(\phi))^{-1}$$

$$A_2(\phi) = \gamma_5 + \gamma_1 \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)$$

$$D(\phi) = [(\gamma_1 - \gamma_5)\cos^2(\phi) + (\gamma_5 - 1)\sin^2(\phi)]^2 + 4(\gamma_5 + \gamma_7)^2 \sin^2(\phi)\cos^2(\phi)$$

Отметим, что $D(\phi) > 0$ и кривые $\zeta^1(\phi)$ и $\zeta^2(\phi)$ не пересекаются. В принципе возможно обращение в нуль $D(\phi)$, например, при $\phi = 0$, $\gamma_1 = \gamma_5$ или при $\phi = \pi/2$ и $\gamma_5 = 1$, что не противоречит положительности упругой энергии; однако проведенный анализ упругих постоянных для различных ортотропных и трансверсально-изотропных материалов показал, что на практике такие материалы не встречались. Таким образом, для того, чтобы $\zeta^1(\phi)$ и $\zeta^2(\phi)$ были вещественны, необходимо проверить, что $A_0(\phi) > 0$.

Преобразуя $A_0(\phi)$ к виду

$$A_0(\phi) = [\sqrt{\gamma_1\gamma_5}\cos^2(\phi) - \sqrt{\gamma_5}\sin^2(\phi)]^2 + [2\sqrt{\gamma_1}\gamma_5 + (\gamma_1 + \gamma_5^2 - (\gamma_5 + \gamma_7)^2)]\sin^2(\phi)\cos^2(\phi)$$

получим, что для положительности $A_0(\phi)$ достаточно потребовать положительности выражения: $2\sqrt{\gamma_1}\gamma_5 + \gamma_1 + \gamma_5^2 - (\gamma_5 + \gamma_7)^2 > 0$ или $(\sqrt{\gamma_1} + 2\gamma_5 + \gamma_7)(\sqrt{\gamma_1} - \gamma_7) > 0$.

Последнее неравенство естественным образом вытекает из положительной определенности упругой энергии $\delta_1 = \gamma_1 - \gamma_7^2 > 0$, $\gamma_5 > 0$. Отметим, что $\zeta^1(\phi) < \zeta^2(\phi)$ и внутренняя кривая $\zeta^1(\phi)$ всегда выпуклая (овал), кривые симметричны относительно осей координат $\zeta^k(\pi + \phi) = \zeta^k(\phi) = \zeta^k(-\phi)$. Обе кривые являются алгебраическими кривыми 4-го порядка, а из общей теории кривых 4-го порядка [6] следует, что возможное число точек перегиба на внешней кривой равно 4, 8 или 0, в зависимости от соотношений между упругими параметрами. С учетом симметрии кривых относительно осей координат, в [7] было установлено, что возможны 4 качественно различные конфигурации кривых $\zeta^1(\phi)$, $\zeta^2(\phi)$, характеризующиеся количеством и расположением точек перегиба.

Таким образом $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_3$ представлены в виде отношения двух целых функций двух комплексных переменных β_1 и β_3, причем знаменатель обращается в нуль на двух вещественных множествах, определяемых кривыми $\zeta^1(\phi)$ и $\zeta^2(\phi)$. С другой стороны известно, что преобразование Фурье функции, заданной в ограниченной области Ω, есть функция целая [8]. Таким образом, для устранения этого противоречия, необходимо потребовать обращения в нуль числителя (6) при $\beta = \zeta^1(\phi)$ и $\beta = \zeta^2(\phi)$. При этом получим следующую систему разрешающих соотношений:

$$p_{ij}(\zeta^k(\phi)\cos(\phi), \zeta^k(\phi)\sin(\phi))F_j(k\zeta^k(\phi)\cos(\phi), k\zeta^k(\phi)\sin(\phi)) = 0 \qquad (7)$$

$(i = 1, 3, k = 1, 2;\ \phi \in [0, 2\pi])$

Эта система позволяет связать между собой известные и неизвестные на контуре S величины компонент перемещений и вектора напряжений. Проанализируем систему (7). Несложный анализ позволяет установить, что из 4-х соотношений (7) два являются зависимыми. В качестве независимых могут быть выбраны соотношения при $i = 1$, $k = 1, 2$.

Эти соотношения могут быть истолкованы как граничные интегральные уравнения первого рода, связывающие между собой известные и неизвестные величины на S:

$$\int_S \sum_{k=1}^{4} K_k^j(x,\phi)X_k(x)dl = 0, \quad \phi \in [0 \ldots 2\pi]$$

$$X = (X_1, X_2, X_3, X_4), \quad X_1 = t_1 / c_{33}, \quad X_2 = t_3 / c_{33}, \quad X_3 = u_1, \quad X_4 = u_3$$

Удовлетворяя граничным условиям (3), имеем

$$\int_{S_1} [K_1^j(x,\phi)X_1(x) + K_2^j(x,\phi)X_2(x)]dl_x +$$

$$+\int_{S_2} [K_3^j(x,\phi)X_3(x)+K_4^j(x,\phi)X_4(x)]dl_x = F^j(\phi) \tag{8}$$

$$F^j(\phi) = -\int_{S_1} [K_3^j(x,\phi)f_1(x)+K_4^j(x,\phi)f_3(x)]dl_x -$$

$$-\int_{S_2} [K_1^j(x,\phi)g_1(x)+K_2^j(x,\phi)g_3(x)]dl_x$$

$$K_1^j(x,\phi) = p_{11}^j(\phi)e^{ik\zeta^j(\phi)(\eta,x)}, \qquad K_2^j(x,\phi) = p_{12}^j(\phi)e^{ik\zeta^j(\phi)(\eta,x)}$$

$$K_3^j(x,\phi) = -ik[p_{11}^j(\phi)(\gamma_1\zeta_1^j(\phi)n_1+\gamma_5\zeta_3^j(\phi)n_3)+$$

$$+p_{13}^j(\phi)(\gamma_7\zeta_3^i(\phi)n_1+\gamma_5\zeta_1^j(\phi)n_3)]e^{ik\zeta^j(\phi)(\eta,x)}$$

$$K_4^j(x,\phi) = -ik[p_{11}^j(\phi)(\gamma_5\zeta_3^j(\phi)n_1+\gamma_7\zeta_1^j(\phi)n_3)+$$

$$+p_{13}^j(\phi)(\gamma_5\zeta_1^j(\phi)n_1+\zeta_3^j(\phi)n_3)]e^{ik\zeta^j(\phi)(\eta,x)}$$

$$(\eta,x) = \cos(\phi)x_1+\sin(\phi)x_3$$

$$p_{km}^j(\phi) = p_{km}(\zeta^j(\phi)\cos(\phi),\zeta^j(\phi)\sin(\phi))$$

$$\zeta_1^j = \zeta^j\cos(\phi), \qquad \zeta_3^j = \zeta^j\sin(\phi)$$

Уравнения (8) представляют собой систему уравнений Фредгольма 1-го рода с гладкими ядрами. Известно, что в общем случае процедура их обращения представляет собой некорректную задачу в силу неограниченности обратного оператора, и при этом необходимо использовать регуляризационные алгоритмы [9]. Однако для конкретной системы ГИУ и специального вида правых частей, определяемых (8), этот оператор ограничен, что следует из однозначной разрешимости краевой задачи на нерезонансных частотах.

При практическом использовании уравнений (8) можно применить основные идеи классического варианта МГЭ [10], в частности использовать линейные элементы для аппроксимации криволинейной границы. Разобьем контур S на элементы: $S_1 = \cup_{q=1}^{N_1} L_q$, $S_2 = \cup_{q=N_1+1}^{N_2} L_q$. Удовлетворение системе уравнений (8) производится на основе метода коллокаций, причем число точек коллокации может выбираться большим или равным числа узловых неизвестных, а интегралы по S переходят в интегралы по прямолинейным отрезкам L_q.

В случае линейных элементов, считая неизвестные постоянными на элементе, можно получить линейную алгебраическую систему относительно узловых неизвестных, причем коэффициенты системы записываются в явном виде.

Обозначим

$$X_j|_{l_q} = X_{jq} \quad (j=1,2,3,4,\ q=1,2,\ldots,N)$$

Пусть x_{jq}^- и x_{jq}^+ соответственно координаты начала и конца q-го элемента. Введем параметризацию на q-м элементе

$$x_j = x_{jq}+\beta_{jq}t \quad (j=1,3,\ q=1,2,\ldots,N)$$

$$x_{jq} = \tfrac{1}{2}(x_{jq}^+ + x_{jq}^-), \qquad \beta_{jq} = \tfrac{1}{2}(x_{jq}^+ - x_{jq}^-), \qquad t\in[-1,1]$$

Учтем, что

$$n_1 = \frac{\beta_{3q}}{|\beta_q|}, \qquad n_3 = -\frac{\beta_{1q}}{|\beta_q|}, \qquad |\beta_q| = \sqrt{\beta_{1q}^2+\beta_{3q}^2}$$

Тогда, интегрируя по t и вычисляя соответствующие интегралы, находим

$$J^j_{pq} = \int_{L_q} e^{(ik(\zeta^j(\phi_p),x_q)} dl = |\beta_q| \int_{-1}^{+1} e^{ik\zeta^j(\phi_p)(\eta_p, x_q+\beta_q t)} dt =$$

$$= 2|\beta_q| \sin k\zeta^j_p(\eta_p,\beta_q) / k\zeta^j_p(\eta_p,\beta_q) e^{ik\zeta^j_p(\eta_p,x_q)} \quad (j=1,2;\ q=1,\ldots,N)$$

$$\beta_q = (\beta_{1q},\beta_{3q}), \quad x_q = (x_{1q}, x_{3q}), \quad \eta_p = (\cos(\phi_p), \sin(\phi_p))$$

При этом задача сводится к решению следующей алгебраической системы уравнений (возможно переопределенной) для определения неизвестных в соответствии с граничными условиями (3):

$$\sum_{q=1}^{N_1} [A^j_{pq} X_{1q} + B^j_{pq} X_{1q}] + \sum_{q=N_1+1}^{N_2} [C^j_{pq} X_{3q} + D^j_{pq} X_{4q}] = F^j_p \tag{9}$$

$$(p = 1,2,\ldots,N,\ N \geqslant N_2)$$

$$F^j_p = -\sum_{q=1}^{N_1} [C^j_{pq} f_{1q} + D^j_{pq} f_{3q}] - \sum_{q=N_1+1}^{N_2} [A^j_{pq} q_{1q} + B^j_{pq} g_{3q}]$$

$$A^j_{pq} = p^j_{11}(\phi_p) J^j_{pq}, \quad B^j_{pq} = p^j_{13}(\phi_p) J^j_{pq}$$

$$C^j_{pq} = -ik[p^j_{11}(\phi_p)(\gamma_1 \zeta^j_1(\phi_p) n_{1q} + \gamma_5 \zeta^j_2(\phi_p) n_{3q}) +$$

$$+ p^j_{13}(\phi_p)(\gamma_7 \zeta^j_2(\phi_p) n_{1q} + \gamma_5 \zeta^j_1(\phi_p) n_{3q})] J^j_{pq}$$

$$D^j_{pq} = -ik[p^j_{11}(\phi_p)(\gamma_5 \zeta^j_2(\phi_p) n_{1q} + \gamma_7 \zeta^j_1(\phi_p) n_{3q}) +$$

$$+ p^j_{13}(\phi_p)(\gamma_5 \zeta^j_1(\phi_p) n_{1q} + \zeta^j_2(\phi_p) n_{3q})] J^j_{pq} \quad (j=1,2)$$

Пример 1. Продемонстрируем описанный выше алгоритм на тестовом примере для ортотропного прямоугольника $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$:

$$S_1 = \{|x_1| \leqslant a, x_3 = -b\}, \quad S_2 = \{x_1 = a, |x_3| \leqslant b\}$$

$$S_3 = \{|x_1| \leqslant a, x_3 = b\}, \quad S_4 = \{x_1 = -a, |x_3| \leqslant b\}$$

Зададим граничные условия в этом случае в виде

$$u_3|_{S_{1,3}} = 0, \quad \sigma_{11}|_{S_{2,4}} = -1, \quad \sigma_{13}|_{S_{1,2,3,4}} = 0$$

Соответственно неизвестными на границе будут $u_1, t_3|_{S_{1,3}}, u_1, u_3|_{S_{2,4}}$. Нетрудно найти точное решение этой задачи

$$u_1 = \frac{\cos(k_1 x_1)}{c_{11} \sin(k_1 a)}, \quad k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{c_{11}}$$

Для решения системы (9) использовался проекционно-итерационный алгоритм Пейджа – Саундерса [11], позволяющий решать переопределенные и плохообусловленные алгебраические системы, в основе которого лежит идея о минимизации функционала невязки в сочетании с идеями метода Ланцоша [12]. Отметим, что описанный выше алгоритм позволяет также решать вопрос о нахождении собственных частот области. Для этого следует лишь учесть, что узловые значения неизвестных при прохождении через собственные частоты терпят разрыв и меняют свой знак на противоположный.

Для тестирования данного алгоритма составлена программа на языке Borland Pascal, реализующая предложенный подход. Результаты расчета собственных частот для примера продольных колебаний ортотропного прямоугольника показаны в

Таблица 1

N	ω_1	ω_2	ω_3
24	3,141	6,272	–
40	3,142	6,285	9,417
56	3,142	6,285	9,428
72	3,142	6,285	9,428
	3,142	6,283	9,424

Таблица 2

N	ω_1	ω_2	ω_3
24	9,424	13,639	15,805
40	9,449	13,549	15,708
56	9,449	13,349	15,749
72	9,424	13,336	15,711

табл. 1. В первой колонке приведено число граничных элементов N прямоугольника, а в следующих трех – три первые собственные частоты (ω_1, ω_2, ω_3), посчитанные с помощью описанного выше алгоритма и метода дихотомии при точности 10^{-3}. В последней строке табл. 1 приведены точные значения собственных частот для прямоугольной области.

Пример 2. Рассмотрим задачу о колебаниях неканонической Г-образной области S: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6$

$$S_1 = \{-a \leqslant x_1 \leqslant 0, x_3 = -b\}, \quad S_2 = \{x_1 = 0, -b \leqslant x_3 \leqslant 0\}$$

$$S_3 = \{0 \leqslant x_1 \leqslant a, x_3 = 0\}, \quad S_4 = \{x_1 = a, 0 \leqslant x_3 \leqslant b\}$$

$$S_5 = \{|x_1| \leqslant a, x_3 = b\}, \quad S_6 = \{x_1 = -a, |x_3| \leqslant b\}$$

Зададим граничные условия в этом случае в виде

$$\sigma_{33}|_{S_{1,3}} = 0, \quad u_1|_{S_{2,4,6}} = u_3|_{S_{2,4,6}} = 0$$

$$\sigma_{33}|_{S_5} = 1, \quad \sigma_{13}|_{S_{1,3,5}} = 0$$

В табл. 2 приведены первые три собственные частоты Г-образной области, посчитанные с помощью данного алгоритма. В первой колонке указано общее число элементов на всей границе области.

Отметим, что для нахождения последующих собственных частот необходимо увеличение числа граничных элементов. Так, например, при $N = 24$ в задаче о колебаниях прямоугольной области находятся только две первые собственные частоты, а при $N =$ $= 40$ находится и третья. С увеличением числа элементов можно посчитать и большее число собственных частот.

В случае колебаний Г-образной области отмечается стабильность нахождения собственных частот при увеличении N от 24 до 72. В результате серии расчетов установлено появление и побочных частот, обусловленных сопряженной краевой задачей. Однако при увеличении числа элементов они пропадают, а истинные резонансные частоты стабилизируются.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
2. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
3. *Ватульян А.О., Гусева И.А., Сюнякова И.М.* О фундаментальных решениях для ортотропной среды и их применении // Изв. СКНЦ ВШ. Сер. естеств. науки. 1989. № 2. С. 81–85.
4. *Ватульян А.О.* О граничных интегральных уравнениях 1-го рода в динамических задачах анизотропной теории упругости // ДАН. 1993. Т. 333. № 3. С. 312–314.
5. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
6. *Савелов А.А.* Плоские кривые. М.: Физматгиз, 1960. 293 с.
7. *Будаев В.С.* Корни характеристического уравнения и классификация упругих анизотропных сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 33–40.
8. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной плоскости. М.: Наука, 1964. 267 с.
9. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.
10. *Бреббия Л., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
11. *Paige C.C., Saunders M.A.* Algorithm 583. LSQR: sparse linear equations and least sguarses problems // ASM Trans. Math. Softw. 1982. V. 8. No. 2. P. 195–209.
12. *Lanczos C.* Iterative solution of large-scale linear systems // J. Soc. Indust. and Appl. Math. 1958. V. 6. No. 1. P. 91–109.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
5.01.1997