

УДК 539.3

© 1999 г. Н.А. ЕРЕМИНА

**МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ
С НЕКАНОНИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА**

В качестве объектов исследования рассматриваются кусочно-однородные тела, поверхности раздела или граничные поверхности которых в одном или двух координатных направлениях являются неканоническими. Одним из примеров таких объектов будут слоистые горные массивы, образующие различные типы складчатых структур.

Под неканоническими поверхностями здесь принимаются поверхности, являющиеся однозначными и не имеющие разрывов. Для простоты изложения первоначально рассмотрим применение модифицированного полуаналитического метода конечных элементов на примере плоской задачи теории упругости для симметричных областей.

Согласно полуаналитическому методу конечных элементов (ПМКЭ) [1], используя разложение узловых перемещений в ряды ортогональных функций в направлении одной из координат, можно снизить размерность задачи. В отличие от традиционной полуаналитической схемы, при которой свойства материала и геометрия не зависят от координаты разложения, данный модифицированный ПМКЭ позволяет учесть как неоднородность упругих характеристик среды, так и изменение узловых координат в этом направлении.

Для симметричной задачи функции формы линейного конечного элемента (фиг. 1, а), используя ряды Фурье, запишем в следующем виде:

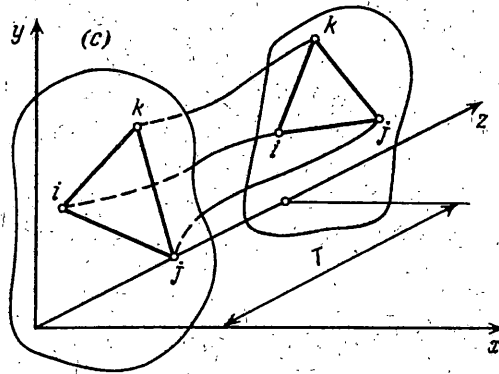
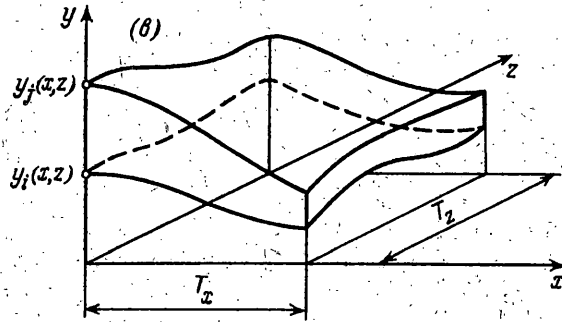
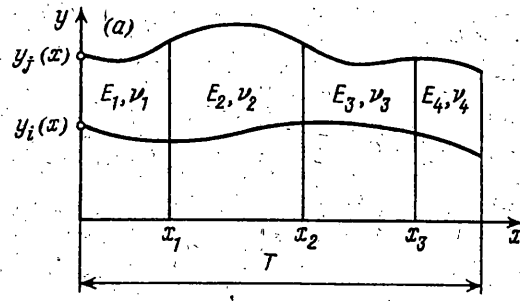
$$\{f\} = \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = [\bar{N}] \{\delta\} = \sum_n [SN_i(x, y), SN_j(x, y)] \{\delta^n\} \quad (1)$$

$$N_i(x, y) = \frac{y_j(x) - y}{y_j(x) - y_i(x)}, \quad N_j(x, y) = \frac{y - y_i(x)}{y_j(x) - y_i(x)}$$

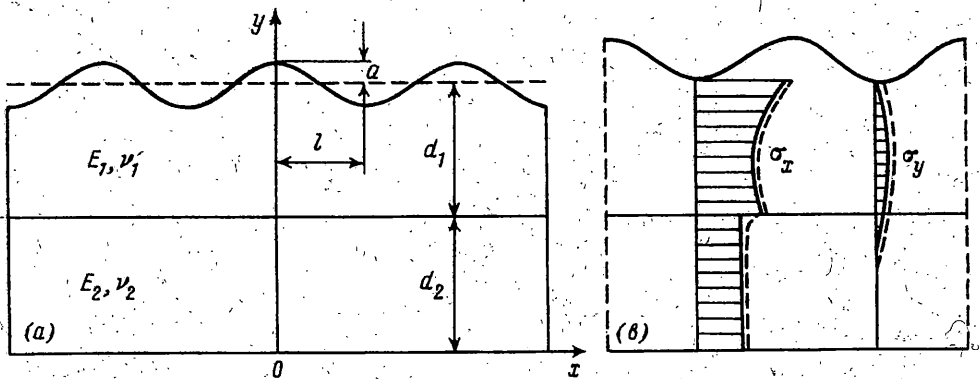
где U, V – горизонтальное и вертикальное перемещения в произвольной точке конечного элемента; S – диагональная матрица размерности 2×2 , элементы которой для симметричной задачи $s_{11} = \cos n\pi x/T, s_{22} = \sin n\pi x/T$; а для антисимметричной – $s_{11} = \sin n\pi x/T, s_{22} = \cos n\pi x/T, \{\delta^n\} = \text{col}\{U_i^n, V_i^n, U_j^n, V_j^n\}$ – n -я компонента узловых перемещений элемента.

Для плоской задачи полная деформация в любой точке элемента характеризуется тремя составляющими, которые представим через компоненты узловых перемещений следующим образом:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_n [B_i^n, B_j^n] \{\delta^n\}$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$$[B_i^n] = \begin{pmatrix} (\partial N_i / \partial x) \sin n\pi x / T + 0 \\ +N_i(n\pi / T) \cos n\pi x / T & (\partial N_i / \partial y) \cos n\pi x / T \\ 0 & (\partial N_i / \partial x) \cos n\pi x / T - \\ (\partial N_i / \partial y) \sin n\pi x / T & -N_i(n\pi / T) \sin n\pi x / T \end{pmatrix} \quad (2)$$

В отличие от традиционной схемы ПМКЭ компоненты в выражении (2) содержат производные $\partial N_i / \partial x$ и $\partial N_j / \partial x$, поскольку $y_{i,x}(x) \neq 0$ и $y_{j,x}(x) \neq 0$.

Типичная подматрица жесткости элемента имеет вид

$$[k_{ij}^{nm}] = \int_0^{x_j} \int_{y_i}^{y_j} [B_i^n]^T [D] [B_j^m] dy dx \quad (3)$$

где $[D]$ – матрица упругости, значения компонентов которой в направлении оси разложения, в общем случае, примем кусочно-непрерывными, что сводит вычисления по формуле (3) к сумме интегралов

$$[k_{ij}^{nm}] = \sum_k \int_{x_{n-1}}^{x_n} \int_{y_1}^{y_j} [B_i^n]^T [D^k] [B_j^m] dy dx$$

Тогда подынтегральные выражения примут вид

$$\begin{pmatrix} D_{11}^k \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} ss + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{n\pi}{T} sc + \right. \\ \left. + N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{n\pi}{T} cs + N_i N_j \frac{n\pi^2}{T^2} cc \right] + \\ + G_{12}^k \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} sc \\ D_{12}^k \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} cs + \frac{\partial N_j}{\partial y} N_j \frac{n\pi}{T} cc \right] + \\ + G_{12}^k \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} cs - N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{n\pi}{T} ss \right] \\ D_{12}^k \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} sc + N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{n\pi}{T} cs \right] + \\ + G_{12}^k \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} sc - \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j \frac{n\pi}{T} ss \right] \\ D_{22}^k \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} cc + \\ + G_{12}^k \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} cc - N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{n\pi}{T} sc - \right. \\ \left. - \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j \frac{n\pi}{T} cs + N_i N_j \frac{n\pi^2}{T^2} ss \right] \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$ss = \sin \frac{n\pi x}{T} \sin \frac{n\pi x}{T}, \quad sc = \sin \frac{n\pi x}{T} \cos \frac{n\pi x}{T}$$

$$cs = \cos \frac{n\pi x}{T} \sin \frac{n\pi x}{T}, \quad cc = \cos \frac{n\pi x}{T} \cos \frac{n\pi x}{T}$$

Выражения в соотношении (4), зависящие от y , после их интегрирования по этой координате примут следующий вид:

$$\int N_i N_j dy = \int N_j N_j dy = \int N_i N_i dy = \Delta(x) / 3$$

$$\int N_i \frac{\partial N_i}{\partial y} dy = - \int N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} dy = \int N_j \frac{\partial N_i}{\partial y} dy = - \int N_j \frac{\partial N_j}{\partial y} dy = -0,5$$

$$\int \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} dy = \int \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} dy = - \int \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} dy = \frac{1}{\Delta(x)}$$

$$\int \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} dy = \int \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dy = - \int \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dy = \frac{[y_{i,x}^2(x) + y_{i,x}(x)y_{j,x}(x) + y_{j,x}^2(x)]}{3\Delta(x)}$$

$$\int \frac{\partial N_i}{\partial x} dy = - \int \frac{\partial N_j}{\partial x} dy = \frac{y_{i,x}(x) + y_{j,x}(x)}{2} \quad (5)$$

$$\int \frac{\partial N_i}{\partial x} N_i dy = - \int \frac{\partial N_j}{\partial x} N_i dy = \frac{y_{j,x}(x) + 2y_{i,x}(x)}{6}$$

$$\int \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j dy = - \int \frac{\partial N_j}{\partial x} N_j dy = \frac{y_{i,x}(x) + 2y_{j,x}(x)}{6}$$

$$\int \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} dy = \int \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} dy = \int \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} dy =$$

$$= - \int \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} dy = \frac{y_{i,x}(x) + y_{j,x}(x)}{2\Delta(x)}, \quad \Delta(x) = y_j(x) - y_i(x)$$

Если $y_i(x)$ и $y_j(x)$ являются кусочно-линейными функциями, то соответствующие соотношения с учетом (5) после интегрирования по x выразятся через интегральные синусы и косинусы. В том числе, когда функция имеет другой вид, вычисление компонентов матрицы жесткости проводилось с помощью численного интегрирования.

Задание узловых сил, обусловленных распределенными нагрузками, проводится по стандартной схеме [1]:

$$\{F^n\} = \int_0^{y_j} \int_{y_i}^{y_j} [\bar{N}]^T \{p\} dy dx$$

при вычислении которых необходимо учесть зависимость функции формы от координаты разложения, предварительно представив нагрузку в виде рядов Фурье.

Таким образом, предложенный модифицированный ПМКЭ позволяет учесть как неоднородность механических свойств, так и изменение значений координат узлов конечных элементов в направлении оси разложения. И хотя каждый из этих факторов в отдельности связывает искомые амплитуды перемещений по гармоникам между собой, что не позволяет разбить полную систему уравнений на N отдельных подсистем относительно неизвестных амплитуд для каждой гармоники, как это было в традиционном ПМКЭ, применение данной модификации для некоторого класса задач в вычислительном отношении будет целесообразным. В частности, для задач горной механики, для которых линейный размер исследуемого массива превышает толщину породных слоев в несколько порядков, получение достоверных результатов методом конечных элементов плоской задачи теории упругости при аппроксимации исследуемой области равномерной сеткой конечных элементов приводит к необходимости решать задачу с очень большим числом неизвестных узловых перемещений.

Применение же модифицированного ПМКЭ позволяет решать эти задачи с гораздо меньшим числом неизвестных, адекватно отражая при этом геомеханические и геометрические параметры породных массивов.

Трехмерную задачу можно свести как к совокупности двумерных задач, используя разложение в ряды Фурье по одной координате, так и к совокупности одномерных задач, разложение в ряды Фурье здесь будет происходить в двух координатных направлениях.

В последнем случае функции формы линейного конечного элемента (фиг. 1, б) для симметричной задачи представим в следующем виде:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \sum_n \sum_m [S^n(x) S^m(z) N_i(x, y, z), S^n(x) S^m(z) N_j(x, y, z)] \{\delta^{nm}\} \quad (6)$$

где S – диагональная матрица размерности 3×3 , элементы которой для симметричной задачи следующие:

$$s_{11}^n(x) = s_{22}^n(x) = \cos(n\pi x / T), \quad s_{33}^n(x) = \sin(n\pi x / T),$$

$\{\delta^{nm}\} = \text{col}\{U_i^{nm}, V_i^{nm}, W_i^{nm}, U_j^{nm}, V_j^{nm}, W_j^{nm}\}$ – nm -е компоненты перемещений элемента.

Сведение трехмерной задачи к совокупности одномерных задач проведем по процедуре, аналогичной вышеописанной, но учитывая, что теперь $y_i = y_i(x, z)$, выражения интегралов по y в (5) дополним следующими соотношениями:

$$\int \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial z} dy = \int \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} dy = - \int \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} dy = - \int \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial z} dy =$$

$$= \frac{y_{j,x}(x, z)[2y_{j,z}(x, z) + y_{i,z}(x, z)] + y_{i,x}(x, z)[2y_{i,z}(x, z) + y_{j,z}(x, z)]}{6\Delta(x, z)}$$

а соответствующие интегралы от производных по z будут иметь вид, аналогичный (5).

В том случае, когда упругие свойства среды являются кусочно-однородными в двух координатных направлениях разложения, типичную подматрицу жесткости конечного элемента представим как двойную сумму интегралов

$$[k_{ij}^{nmpq}] = \sum_r \sum_k \int_{x_{r-1}}^{x_r} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{y_i}^{y_j} [B_i^{nm}]^T [D^{rk}] [B_j^{pq}] dy dz dx$$

Теперь рассмотрим вариант, когда трехмерная задача сводится к совокупности двумерных задач. В качестве двумерной задачи используем задачу в перемещениях с конечноэлементной аппроксимацией исследуемой области треугольными элементами первого порядка (фиг. 1, с). Функции формы в этом случае запишем в виде

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \sum_n [S(z)N_i, S(z)N_j, S(z)N_k] \{\delta^{ln}\} \quad (7)$$

где $S(z)$ – диагональная матрица того же вида, что и в выражении (6);

$\{\delta^n\} = \text{col}\{U_i^n, V_i^n, W_i^n, U_j^n, V_j^n, W_j^n, U_k^n, V_k^n, W_k^n\}$ – n -е компоненты вектора перемещений конечного элемента

$$N_i = (a_i(z) + b_i(z) + c_i(z)) / (2\Delta(z))$$

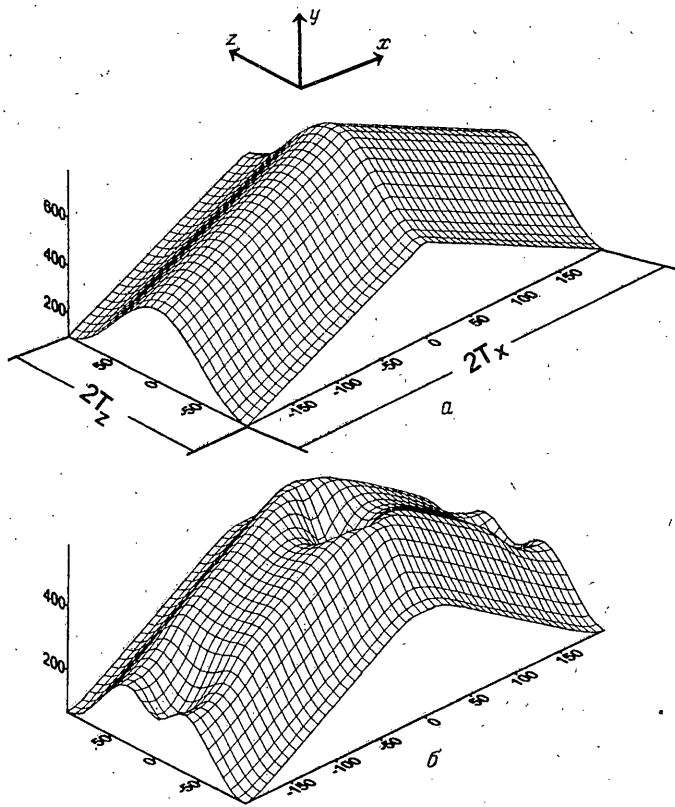
где $\Delta(z)$ – площадь конечного элемента и коэффициенты a_i, b_i, c_i определяется через узловые координаты: $a_i(z) = x_j(z)y_k(z) - x_k(z)y_j(z)$; $b_i(z) = y_j(z) - y_k(z)$; $c_i(z) = x_k(z) - x_j(z)$; остальные коэффициенты $a_j, b_j, c_j, a_k, b_k, c_k$ для определения N_j, N_k получаются циклической подстановкой индексов i, j, k .

Порядок необходимых вычислений при формировании матрицы жесткости конечного элемента и определении узловых усилий тот же, что и для плоской задачи.

Вид компонентов матрицы жесткости конечных элементов для трехмерной задачи ввиду их громоздкости здесь не приводится.

Рассмотрим примеры по определению напряженно-деформированного состояния плоской и трехмерной задач теории упругости.

Плоская задача. На основе разработанной модификации ПМКЭ было определено напряженное состояние бесконечной в направлениях z, x двухслойной пластины при действии на нее равномерно распределенных растягивающих в направлении оси x усилий P ; одна из поверхностей пластины описывается уравнением $y = a \cos \pi x / l$ (фиг. 2, а). Так как решение будет зависеть только от координат x и y , то оно ищется в виде (1) и, кроме того, должно удовлетворять следующим граничным условиям: для горизонтальных перемещений должно выполняться равенство $U(l, y) = U^*$, где



Фиг. 3

$U^* = Pl/(E_1d_1 + E_2d_2)$ – такое перемещение, которое соответствует распределенному усилию P ; $V(0,0) = 0$ – это условие, исключающее вертикальное смещение области как жесткого целого. Каждый слой разбивался на 10 элементов, при разложении перемещений в ряды Фурье ограничили 11 гармониками, так как дальнейшее увеличение числа гармоник уже не сказывалось на точности решения. Таким образом, модифицированный ПМКЭ позволил свести плоскую задачу теории упругости к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных компонент узловых перемещений линейных конечных элементов с ограничениями в виде равенств. Поле напряжений (фиг. 2, б), соответствующее найденным перемещениям (штриховая линия), сравнивалось с результатами, полученными с помощью метода возмущения формы границы (сплошная линия) [2]. Совпадение представленных результатов подтверждает достоверность решений, полученных модифицированным ПМКЭ.

Трехмерная задача. В качестве модельной трехмерной задачи рассматривалась задача по определению деформированного состояния кусочно-однородной криволинейной пластины постоянной толщины h находящейся на жестком основании, при действии на нее вертикального давления $p = \text{const}$. Геометрия нижней поверхности пластины S_H описывалась уравнением $Y_H = 550 - 2|x| + 150 \cos \pi x / T_x$; основные геометрические параметры были следующие: $h = 100$, $T_x = 2T_z = 100$. По краям пластины находились зоны с ослабленными в два раза по сравнению с остальной областью упругими характеристиками. Положение ослабленных зон определялось следующими неравенствами $|x| \geq 0,7T_x$, $|z| \leq 0,5T_z$. Граничные условия были следующими: $V|_{S_H} = U|_{S_H} = W|_{S_H} = 0$, $U|_{|x|=T_x} = 0$, $W|_{|z|=T_z} = 0$.

Геометрия верхней поверхности пластины до и после деформирования представлена соответственно на фиг. 3, *a*, *b*; прогиб, расположенный в центре пластины, обусловлен геометрией пластины, а впадины по краям пластины – наличием ослабленных зон. Результаты решения задачи, когда она сводилась к совокупности двумерных задач на основании соотношения (7), совпадают с решением, полученным разложением перемещений в двух координатных направлениях при использовании одномерных конечных элементов (6).

Приведенные решения иллюстрируют возможности разработанных модификаций ПМКЭ, с помощью которых можно решать широкий класс задач об упругом деформировании кусочно-однородных сред.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 96-05-64849).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
2. *Немиш Ю.Н.* Элементы механики кусочно-однородных тел с неканоническими поверхностями раздела. Киев: Наук. думка, 1989. 312 с.

Пермь

Поступила в редакцию
4.12.1996