

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ

Предлагается вариационный метод, который позволяет в рамках единого алгоритма исследовать как прямые, так и обратные задачи теории упругости для полуполосы со свободными от нагрузки продольными сторонами. В качестве исходных данных можно использовать точные значения компонент вектора перемещений и вектора самоуравновешенной внешней нагрузки, заданных на торце полуполосы, или же результаты физических измерений различными методами (например поляризационно-оптическим) параметров искомого поля напряжений на торце или внутри полуполосы.

Рассматриваются конкретные примеры применения разработанного подхода для исследования напряженно-деформированного состояния полосы при разных условиях нагружения ее торца, а также исходя из результатов измерения некоторых параметров искомого поля напряжений поляризационно-оптическим методом.

1. Многие приложения приводят к плоской задаче теории упругости для полосы $L = \{0 \leq x \leq \infty, -1 \leq y \leq 1\}$ со свободными продольными сторонами. Здесь x и y – декартовы координаты, отнесенные к полутолщине полосы. На торце $x = 0, y \in [-1, 1]$ задана самоуравновешенная нагрузка $\mathbf{p} = \{\sigma(y), \tau(y)\}$, вектор перемещения $\mathbf{u} = \{u(y), v(y)\}$ либо условия смешанного типа

$$\sigma_{xx}|_{x=0} = \sigma(y), \sigma_{xy}|_{x=0} = \tau(y) \quad (1.1)$$

$$u_x|_{x=0} = u(y), u_y|_{x=0} = v(y) \quad (1.2)$$

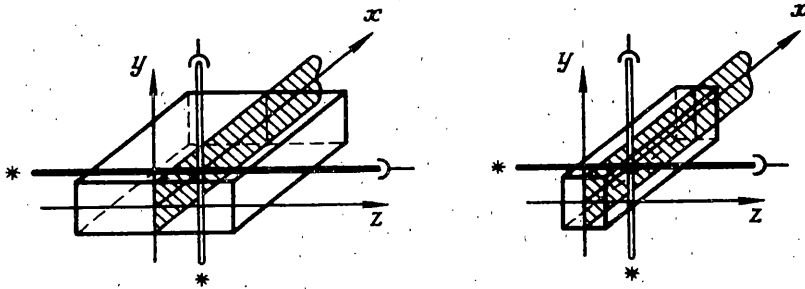
$$\sigma_{xx}|_{x=0} = \sigma(y), u_y|_{x=0} = v(y) \quad (1.3)$$

$$u_x|_{x=0} = u(y), \sigma_{xy}|_{x=0} = \tau(y) \quad (1.4)$$

Задача о полосе исследовалась многими авторами, например, [1–6]. Обзоры по этому вопросу можно найти, в частности, в [4, 7].

В отличие от прямых задач, в которых функции $\sigma(y), \tau(y), u(y), v(y)$ заданы, можно рассматривать также задачи, в которых условия нагружения или закрепления априори неизвестны либо заданы в неполном объеме. В последнем случае может быть известна, например, лишь одна из функций (1.1)–(1.4) вместо двух или/и сами эти функции заданы не на всем отрезке $[-1, 1]$. При этом, кроме исходных соотношений имеем некоторую дополнительную информацию об искомом поле напряжений (перемещений), происхождение которой выходит за рамки теории упругости. В результате решения такой задачи могут быть восстановлены в полном объеме условия на торце, например, вектор внешней нагрузки, которая является причиной возникновения напряжений. Поэтому такие задачи относятся к обратным.

Если источником дополнительной информации являются результаты физических измерений некоторых параметров $\delta_{(n)}$, $n \in \{1, \dots, N_\delta\}$, то ввиду того, что при измерениях неизбежны погрешности, каждую измеренную зависимость $\delta_{(n)}^{(l)}(\eta)$, $l \in \{1, \dots, N_{(n)}\}$ параметра $\delta_{(n)}$ от координат η следует интерпретировать как выборочную



Фиг. 1

функцию случайного процесса $R_{\langle n \rangle}(\eta)$, соответствующего данному методу измерений. Здесь $N_{\langle n \rangle}$ – число независимых измерений параметра $\delta_{\langle n \rangle}$ как функции координат η . Уравнения соответствующих методов измерения, т.е. зависимости $\delta_{\langle n \rangle} = \delta_{\langle n \rangle}(\sigma_{ij}; u_i)$, предполагаются заданными для всех n .

Можно рассматривать, например, информацию, полученную оптическими методами. При этом имеем данные оптических измерений с одной стороны и аналитические представления измеряемых параметров через компоненты искомого поля напряжений; полученные в рамках теории интегральной фотоупругости [8, 9], с другой.

Так, измерив независимо несколько раз как функцию координаты x изменение разности фаз δ поляризованного света при просвечивании объекта в направлениях, лежащих в плоскости симметрии xOy (фиг. 1), получим, вообще говоря, несовпадающие зависимости $\delta^{(l)}(x)$, $x \in d_{\delta}^{(l)} \subset [0, \infty)$, которые можно рассматривать как различные реализации случайного процесса $R_{\langle \delta \rangle}(x)$, соответствующего такому методу измерений. Вместе с тем, теория интегральной фотоупругости предоставляет зависимость между разностью фаз δ и распределением напряжений вдоль светового луча, которая для плоской деформации имеет вид [9]:

$$\delta(\sigma_{ij}) = c \frac{2\pi}{\lambda} \int_{-1}^1 (\sigma_{xx}(x, y) - \sigma_{zz}(x, y)) dy \quad (1.5)$$

Здесь c – пьезооптическая постоянная материала, λ – длина волны зондирующего света.

Просвечивая объект поляризованным светом в направлениях z (фиг. 1) и измеряя семейство изоклин, а также разность фаз, приобретенную светом, можно экспериментально установить угол ориентации φ главных осей тензора напряжений и разность главных напряжений $\Delta = \sigma_1 - \sigma_2$ как функции координат x, y . Производя указанные измерения независимо несколько раз, получаем некоторые множества выборочных функций $\varphi^{(l)}(x, y)$, $(x, y) \in d_{\varphi}^{(l)} \subset L$ и $\Delta^{(l)}(x, y)$, $(x, y) \in d_{\Delta}^{(l)} \subset L$ двумерных случайных процессов $R_{\langle \varphi \rangle}(x, y)$ и $R_{\langle \Delta \rangle}(x, y)$ и тем самым определяем приближенные значения для параметров поля напряжений φ и Δ , которые, как известно, выражаются через компоненты тензора напряжений σ_{ij} так

$$\varphi(\sigma_{ij}) = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}, \quad \Delta(\sigma_{ij}) = \pm \sqrt{4\sigma_{xy}^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2} \quad (1.6)$$

Если функции, определяющие внешние воздействия, вводятся исходя из физических измерений, то граничные условия на торце могут быть заданы лишь приближенно, а именно: вместо точных значений компонент внешней нагрузки или вектора перемещений доступны лишь выборочные функции $\vartheta_{\langle m \rangle}^{(l)}(y) \in \{\sigma^{(l)}(y), \tau^{(l)}(y), u^{(l)}(y), v^{(l)}(y)\}$, $y \in d_{\langle m \rangle}^{(l)}$, одномерных случайных процессов $R_{\langle m \rangle}(y)$, $m \in$

$\in \{\sigma, \tau, u, v\}$. Следовательно, в этих случаях условия на торце не обеспечивают корректной постановки прямой краевой задачи.

2. Функция напряжений W плоской задачи удовлетворяет бигармоническому уравнению [10]:

$$\Delta \Delta W = 0 \quad (2.1)$$

которое допускает решения вида

$$W_k = \exp(-\gamma_k x) F_k(y) \quad (2.2)$$

где $F_k(y)$ – решения дифференциального уравнения (функции Папковича):

$$F_k^{(4)} + 2\gamma_k^2 F_k'' + \gamma_k^4 F_k = 0 \quad (2.3)$$

Исходную задачу можно разделить на симметричную и антисимметричную относительно оси y части. Тогда с точностью до неопределенных мультипликативных констант имеем [10]:

$$\begin{aligned} F_k &= \kappa_k \cos(\gamma_k y) + \gamma_k y \sin(\gamma_k y) \text{ (симметрия)} \\ F_k &= \kappa_k \sin(\gamma_k y) + \gamma_k y \cos(\gamma_k y) \text{ (антисимметрия)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Функции (2.4) можно подчинить однородным граничным условиям

$$F_k|_{y=\pm 1} = 0, \quad F_k'|_{y=\pm 1} = 0 \quad (2.5)$$

которые обеспечивают условия ненагруженности продольных боковых сторон полуполосы. При этом константы κ_k выражаются так

$$\begin{aligned} \kappa_k &= -\gamma_k \operatorname{tg} \gamma_k \text{ (симметрия)} \\ \kappa_k &= -\gamma_k \operatorname{ctg} \gamma_k \text{ (антисимметрия)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

где γ_k – корни уравнений

$$\begin{aligned} \sin(2\gamma_k) + 2\gamma_k &= 0 \text{ (симметрия)} \\ \sin(2\gamma_k) - 2\gamma_k &= 0 \text{ (антисимметрия)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Бесконечной последовательности комплексных корней γ_k соответствуют последовательности комплекснозначных функций W_k , их действительные и мнимые части – линейно независимые последовательности, поэтому действительную функцию напряжений Φ представим в виде

$$\Phi = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k \bar{W}_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{Re}(W_k) + B_k \operatorname{Im}(W_k)) \quad (2.8)$$

Здесь C_k – неопределенные комплексные константы, $A_k = \operatorname{Re}(C_k)$, $B_k = \operatorname{Im}(C_k)$.

Если γ_k – корень уравнения (2.7), то $-\gamma_k$, $\bar{\gamma}_k$ и $-\bar{\gamma}_k$ – тоже корни. Для получения затухающего при $x \rightarrow \infty$ решения, суммирование в формуле (2.8) проводим по корням с положительной действительной частью. Так как справедливо соотношение $W_{k'} = \bar{W}_k$, где k' – индекс такой, что $\gamma_{k'} = \bar{\gamma}_k$, то достаточно суммировать по индексам, которые соответствуют корням с положительными и действительными, и мнимыми частями.

Полагая ряд в формуле (2.8) равномерно сходящимся, получаем следующие представления для напряжений и перемещений в полуполосе:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp(-\bar{\gamma}_k x) \bar{\sigma}_k \right), \quad \sigma_{xy} = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp(-\bar{\gamma}_k x) \bar{\tau}_k \right) \\ \sigma_{yy} &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k \bar{\gamma}_k^2 \exp(-\bar{\gamma}_k x) \bar{F}_k \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$u_x = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{E} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp(-\bar{\gamma}_k x) \bar{u}_k \right) + u_0$$

$$u_y = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{E} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp(-\bar{\gamma}_k x) \bar{v}_k \right) + v_0$$
(2.10)

В формулах (2.9), (2.10) использованы обозначения

$$\sigma_k = \gamma_k^2 ((2 - \kappa_k) \cos(\gamma_k y) - \gamma_k y \sin(\gamma_k y))$$

$$\tau_k = \gamma_k^2 ((1 - \kappa_k) \sin(\gamma_k y) + \gamma_k y \cos(\gamma_k y))$$

$$u_k = \gamma_k (\kappa_k (v+1) - 2) \cos(\gamma_k y) + \gamma_k^2 y (v+1) \sin(\gamma_k y)$$

$$v_k = -\gamma_k^2 y (v+1) \cos(\gamma_k y) + \gamma_k (\kappa_k (v+1) + 1 - v) \sin(\gamma_k y)$$
(2.11)

для симметрических задач и

$$\sigma_k = -\gamma_k^2 ((2 + \kappa_k) \sin(\gamma_k y) - \gamma_k y \cos(\gamma_k y))$$

$$\tau_k = \gamma_k^2 ((1 + \kappa_k) \cos(\gamma_k y) - \gamma_k y \sin(\gamma_k y))$$

$$u_k = \gamma_k (\kappa_k (v+1) + 2) \sin(\gamma_k y) + \gamma_k^2 y (v+1) \cos(\gamma_k y)$$

$$v_k = \gamma_k^2 y (v+1) \sin(\gamma_k y) - \gamma_k (\kappa_k (v+1) - 1 + v) \cos(\gamma_k y)$$
(2.12)

для антисимметрических. Слагаемые $u_0 = -ay + c_1$, $v_0 = ax + c_2$, где a , c_1 , c_2 – константы, определяют поворот и трансляцию полосы, как абсолютно твердого тела; $a = 0$, $c_2 = 0$ при симметрии и $c_1 = 0$ при антисимметрии.

Решение (2.9), (2.10) удовлетворяет уравнениям теории упругости в полосе L , условиям ненагруженности ее боковых сторон $y = \pm 1$ и самоуравновешенности напряжений при произвольных константах C_k . Для получения частного решения необходимо выбрать константы C_k так, чтобы согласовать поле напряжений и/или перемещений с условиями на торце (если они заданы) и/или другими заданными условиями, определяющими параметры искомых полей напряжений и перемещений в области L .

Вследствие того, что область L содержит угловые точки ($x = 0$, $y = \pm 1$), некоторые условия нагружения могут приводить к сингулярности напряжений в этих точках [4, 11]. Требования ограниченности поля напряжений, а также затухания перемещений в бесконечно удаленных точках, конечно, сужает множество возможных функций $\sigma(y)$ и $\tau(y)$, $u(y)$ и $v(y)$, которым могут быть подчинены решения (2.9), (2.10). Соответствующие ограничения на эти функции получены в [8, 9].

3. В [1, 2, 5, 6] получены решения задачи для условий (1.1)–(1.4), которые точно удовлетворяют заданным условиям. Однако, если функции, представляющие исходные данные, известны лишь приближенно, стремление точно удовлетворить граничные условия вряд ли можно считать оправданным. К тому же, точное удовлетворение граничных условий часто практически неосуществимо, так как при вычислениях все же приходится ограничиваться конечным числом членов в суммах (2.9), (2.10).

Рассмотрим альтернативный путь, который состоит в удовлетворении условий нагружения в соответствии с нормой функционального пространства. С этой целью рассмотрим квадратичные функционалы

$$F_I = \int_{-1}^1 ((\sigma_{xx}|_{x=0} - \sigma(y))^2 + (\sigma_{xy}|_{x=0} - \tau(y))^2) dy$$
(3.1)

$$F_{II} = \int_{-1}^1 ((u_x|_{x=0} - u(y))^2 + (u_y|_{x=0} - v(y))^2) dy$$
(3.2)

$$F_{III} = \int_{-1}^1 ((\sigma_{xx}|_{x=0} - \sigma(y))^2 + (u_y|_{x=0} - \nu(y))^2) dy \quad (3.3)$$

$$F_{IV} = \int_{-1}^1 ((u_x|_{x=0} - u(y))^2 + (\sigma_{xy}|_{x=0} - \tau(y))^2) dy \quad (3.4)$$

где $\sigma(y)$, $\tau(y)$, $u(y)$, $\nu(y)$ – заданы, а σ_{xx} , σ_{xy} , u_x , u_y определяются в соответствии с (2.9), (2.10). Функционалы F_I, \dots, F_{IV} обращаются в нуль если выполняются (1.1)–(1.4) соответственно. Выберем в качестве частного решения задач (1.1)–(1.4) то, которое обеспечивает минимум соответствующему функционалу. Это требование приводит к бесконечной системе линейных уравнений на A_k, B_k :

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{mk}^{11} A_k + \sum_{k=1}^{\infty} M_{mk}^{12} B_k = K_m^1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} M_{mk}^{21} A_k + \sum_{k=1}^{\infty} M_{mk}^{22} B_k = K_m^2 \quad (3.5)$$

в которой для функционала (3.1):

$$M_{mk}^{ij} = \int_{-1}^1 (\sigma_m^i \sigma_k^j + \tau_m^i \tau_k^j) dy, \quad K_m^j = \int_{-1}^1 (\sigma(y) \sigma_m^j + \tau(y) \tau_m^j) dy \quad (i, j = 1, 2) \quad (3.6)$$

а в случае функционалов (3.2), (3.3), (3.4) имеем формулы (3.7), (3.9), (3.11) – для симметрической и (3.8), (3.10), (3.12) – для антисимметрической составляющих соответствующих задач:

$$M_{mk}^{ij} = \int_{-1}^1 (u_m^i u_k^j + \nu_m^i \nu_k^j) dy - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_m^i dy \int_{-1}^1 u_k^j dy \quad (3.7)$$

$$K_m^j = \int_{-1}^1 (u(y) u_m^j + \nu(y) \nu_m^j) dy - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(y) dy \int_{-1}^1 u_m^j dy$$

$$M_{mk}^{ij} = \int_{-1}^1 (u_m^i u_k^j + \nu_m^i \nu_k^j) dy - \frac{3}{2} \int_{-1}^1 y u_m^i dy \int_{-1}^1 y u_k^j dy - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \nu_m^i dy \int_{-1}^1 \nu_k^j dy \quad (3.8)$$

$$K_m^j = \int_{-1}^1 (u(y) u_m^j + \nu(y) \nu_m^j) dy - \frac{3}{2} \int_{-1}^1 y u(y) dy \int_{-1}^1 y u_m^j dy - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \nu(y) dy \int_{-1}^1 \nu_m^j dy$$

$$M_{mk}^{ij} = \int_{-1}^1 (\sigma_m^i \sigma_k^j + \nu_m^i \nu_k^j) dy, \quad K_m^j = \int_{-1}^1 (\sigma(y) \sigma_m^j + \nu(y) \nu_m^j) dy \quad (3.9)$$

$$M_{mk}^{ij} = \int_{-1}^1 (\sigma_m^i \sigma_k^j + \nu_m^i \nu_k^j) dy - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \nu_m^i dy \int_{-1}^1 \nu_k^j dy \quad (3.10)$$

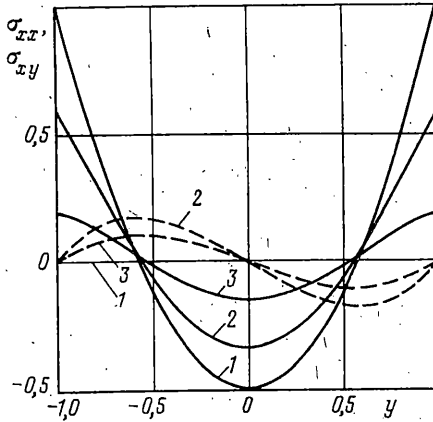
$$K_m^j = \int_{-1}^1 (\sigma(y) \sigma_m^j + \nu(y) \nu_m^j) dy - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \nu(y) dy \int_{-1}^1 \nu_m^j dy$$

$$M_{mk}^{ij} = \int_{-1}^1 (u_m^i u_k^j + \tau_m^i \tau_k^j) dy - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_m^i dy \int_{-1}^1 u_k^j dy \quad (3.11)$$

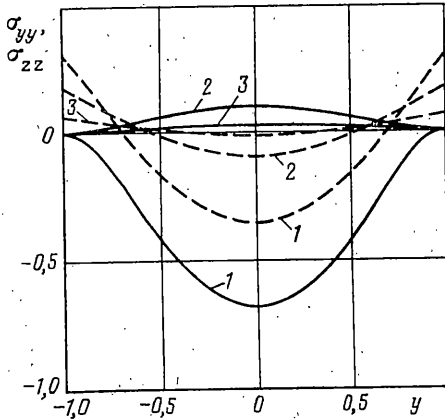
$$K_m^j = \int_{-1}^1 (u(y) u_m^j + \tau(y) \tau_m^j) dy - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(y) dy \int_{-1}^1 u_m^j dy$$

$$M_{mk}^{ij} = \int_{-1}^1 (u_m^i u_k^j + \tau_m^i \tau_k^j) dy - \frac{3}{2} \int_{-1}^1 y u_m^i dy \int_{-1}^1 y u_k^j dy \quad (3.12)$$

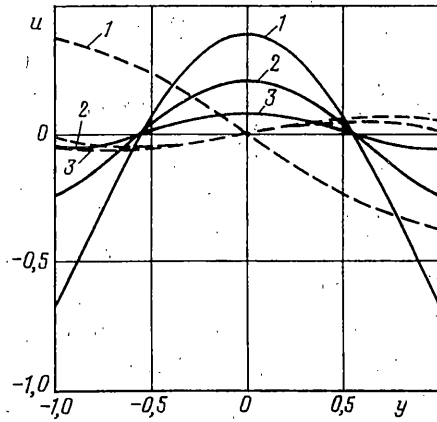
$$K_m^j = \int_{-1}^1 (u(y) u_m^j + \tau(y) \tau_m^j) dy - \frac{3}{2} \int_{-1}^1 y u(y) dy \int_{-1}^1 y u_m^j dy$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Кроме того, для F_{II} , F_{III} , F_{IV} имеем также соотношения, для определения u_0 и v_0 по заданным $u(y)$, $v(y)$ и коэффициентам A_k, B_k :

$$c_1 = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 u(y) dy - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_{-1}^1 u_k^1 dy - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_{-1}^1 u_k^2 dy \right) \text{ (симметрия)} \quad (3.13)$$

$$a = -\frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 y u(y) dy - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_{-1}^1 y u_k^1 dy - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_{-1}^1 y u_k^2 dy \right) \quad (3.14)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 v(y) dy - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_{-1}^1 v_k^1 dy - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_{-1}^1 v_k^2 dy \right) \text{ (антисимметрия)}$$

В формулах (3.6)–(3.8) использованы обозначения

$$\sigma_k^1 = \text{Re}(\sigma_k), \quad \sigma_k^2 = \text{Im}(\sigma_k), \quad \tau_k^1 = \text{Re}(\tau_k), \quad \tau_k^2 = \text{Im}(\tau_k)$$

$$u_k^1 = \text{Re}(u_k), \quad u_k^2 = \text{Im}(u_k), \quad u_k^1 = \text{Re}(u_k), \quad u_k^2 = \text{Im}(u_k)$$

Таким образом, задача сведена к исследованию бесконечных систем линейных ал-

гебраических уравнений. Методы анализа таких систем можно найти, в частности, в [12].

Если в представлениях (2.9), (2.10) ограничиться конечным числом слагаемых N , то получим конечную (редуцированную) систему с $2N$ неизвестными. К редуцированной системе приходим, если в функционалах (3.1)–(3.4) вместо бесконечных сумм использовать конечные отрезки рядов (2.9), (2.10). Решая усеченную систему, получаем приближенное решение исходной задачи. При этом значение соответствующего функционала F_I^N , F_{II}^N , F_{III}^N или F_{IV}^N определяет среднеквадратическое отклонение полученного при данном N решения от условий, заданных на торце. Вклад в решение слагаемого с индексом k экспоненциально уменьшается с ростом координаты x , причем, чем больше k , тем меньше вклад этого слагаемого при данном x . Отсюда следует, что погрешность решения, обусловленная усечением рядов (2.9), (2.10); монотонно убывает с ростом x . Следовательно, значение функционала определяет погрешность полученного решения во всей полуполосе, а не только на ее торце.

Удовлетворение граничных условий "в среднем", когда минимизируется среднеквадратическое отклонение полученного решения от условий, заданных на торце, позволяет сгладить влияние случайных флуктуаций в исходных данных.

Если последовательность решений редуцированных систем сходится при $N \rightarrow \infty$, а значения соответствующего функционала при этом неограниченно убывают, то это означает, что предел последовательности приближенных решений удовлетворяет заданным условиям на торце по норме L_2 .

На фиг. 2–4 приведены результаты решения симметрической задачи при $N = 13$ для условий, когда заданы компоненты вектора внешней нагрузки (σ_0 – постоянная):

$$\sigma(y) = \sigma_0 \left(\frac{3}{2} y^2 - \frac{1}{2} \right), \quad \tau(y) = 0 \quad (3.15)$$

сплошные кривые соответствуют σ_{xx} , σ_{yy} и u_x ; а штриховые – σ_{xy} , σ_{zz} и u_y кривые 1–3 построены при $x = 0$; 0,5; 1. Погрешность решения $\varepsilon_1 = (F_I^N)^{1/2} / \sigma_0$ в зависимости от размерности N системы приведена в табл. 1.

Таблица 1

N	1	2	3	4	5	8	11	13
ε_1	7,3e-3	1,9e-4	5,65e-5	2,0e-5	6,6e-6	1,0e-6	2,9e-7	1,2e-7
ε_2	0,143	0,074	0,045	0,032	0,026	0,020	0,019	0,018

В этой же таблице для сравнения приведены значения параметра $\varepsilon_2 = (F_{II}^N)^{1/2} / \alpha$ для случая задания на торце перемещений вида (α – постоянная):

$$u(y) = 0, \quad v(y) = -\alpha y \quad (3.16)$$

Заметим, что функции (3.16) не удовлетворяют условиям существования ограниченного решения [2]. Тем не менее данный вариационный подход позволяет получить последовательность приближенных решений, которая, как можно предположить из проведенных численных экспериментов, сходится в полуполосе за исключением угловых точек, в которых компоненты напряжений σ_{xx} и σ_{xy} неограниченно возрастают. Такое поведение напряжений согласуется с результатами аналитических [11] и числовых [14] исследований поведения напряжений в угловых точках.

Возможны и другие формы функционалов. Например, при заданных $\sigma(y)$ и $\tau(y)$,

вместо F_I можно также использовать

$$F_V = \int_0^1 \left((\Phi|_{x=0} - m(y))^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0} + f(y) \right)^2 \right) dy \quad (3.17)$$

$$m(y) = \int_1^y d\xi \int_1^\xi \sigma(\zeta) d\zeta, \quad f(y) = \int_1^y \tau(\xi) d\xi$$

Условия экстремальности F_V также сводятся к системе (3.5), в которой

$$M_{mk}^{ij} = \int_{-1}^1 (m_m^i m_k^j + f_m^i f_k^j) dy, \quad K_m^j = \int_{-1}^1 (m(y) m_m^j + f(y) f_m^j) dy \quad (3.18)$$

$$m_k^1 = \text{Re}(F_k), \quad m_k^2 = \text{Im}(F_k), \quad f_k^1 = \text{Re}(\gamma_k F_k), \quad f_k^2 = \text{Im}(\gamma_k F_k)$$

Каждый из F_λ ($\lambda = I, II, \dots, V$) есть сумма двух квадратичных функционалов, обозначим их $F_{\lambda 1}$ и $F_{\lambda 2}$. Если решение соответствующей функционалу F_λ бесконечной системы (3.5) существует, единственно и обращает в нуль функционал F_λ , то при этом обращаются в нуль также функционалы $F_{\lambda 1}$ и $F_{\lambda 2}$. Следовательно, такое решение обеспечивает минимум и функционалу $\tilde{F}_\lambda = |F_{\lambda 1} - F_{\lambda 2}|$. Учитывая это, для условий (1.3), (1.4), в качестве альтернативы функционалам F_{III} и F_{IV} рассмотрим

$$F_{VI} = \left| \int_{-1}^1 \left((\Phi|_{x=0} - m(y))^2 - (Z - z(y))^2 \right) dy \right| \quad (3.19)$$

$$F_{VII} = \left| \int_{-1}^1 \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0} + f(y) \right)^2 - (W - w(y))^2 \right) dy \right| \quad (3.20)$$

$$z(y) = (2 + \nu)m(y) + \int_{-1}^1 \nu(y) dy, \quad w(y) = u(y) - \nu f(y)$$

$$Z = (2 + \nu)\Phi|_{x=0} + \int_{-1}^1 u_y|_{x=0} dy = -\text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\bar{F}_k''}{\bar{\gamma}_k^2}$$

$$W = u_x|_{x=0} - \nu \int_{-1}^1 \sigma_{xy}|_{x=0} dy = -\text{Re} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\bar{F}_k''}{\bar{\gamma}_k}$$

Функционалы F_{VI} и F_{VII} приводят к системам вида (3.5), в которых

$$M_{mk}^{ij} = \int_{-1}^1 (m_m^i m_k^j - z_m^i z_k^j) dy, \quad K_m^j = \int_{-1}^1 (m(y) m_m^j + z(y) z_m^j) dy \quad (3.21)$$

$$M_{mk}^{ij} = \int_{-1}^1 (f_m^i f_k^j - w_m^i w_k^j) dy, \quad K_m^j = \int_{-1}^1 (f(y) f_m^j + w(y) w_m^j) dy \quad (3.22)$$

$$z_{1k} = \text{Re} \left(\frac{F_k''}{\gamma_k} \right), \quad z_{2k} = \text{Im} \left(\frac{F_k''}{\gamma_k} \right), \quad w_{1k} = \text{Re} \left(\frac{F_k''}{\gamma_k} \right), \quad w_{2k} = \text{Im} \left(\frac{F_k''}{\gamma_k} \right)$$

Для функционалов F_{VI} , F_{VII} имеем соответственно

$$c_2 = \frac{3}{8} \int_{-1}^1 (y-1)z(y) dy \quad (\text{антисимметрия}) \quad (3.23)$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 w(y) dy \quad (\text{симметрия}), \quad a = -\frac{3}{2} \int_{-1}^1 yw(y) dy \quad (\text{антисимметрия}) \quad (3.24)$$

N	$u(y) = 0$ $\tau(y) = \sin(2\pi y)$			$u(y) \neq 0$ $\tau(y) = \sin(\pi y)$			$u(y) = 0$ $\tau(y) = y$		
	ε_4	$\tilde{\varepsilon}_4$	ε_7	ε_4	$\tilde{\varepsilon}_4$	ε_7	ε_4	$\tilde{\varepsilon}_4$	ε_7
1	0,698	0,743	0,748	0,105	0,109	0,122	0,371	0,387	0,445
2	0,114	0,221	0,356	0,084	0,232	0,155	0,221	0,333	0,354
3	0,063	0,071	0,265	0,031	0,032	0,122	0,184	0,187	0,308
4	0,028	0,063	0,219	0,023	0,027	0,1	0,164	0,195	0,281
5	0,023	0,479	0,176	0,02	0,283	0,077	0,141	2,121	0,265
6	0,017	0,028	0,145	0,019	0,02	0,071	0,122	0,141	0,253
7	0,013	0,015	0,122	0,017	0,018	0,055	0,114	0,118	0,243
8	0,012	0,012	0,109	0,016	0,017	0,055	0,109	0,118	0,237
9	0,01	0,012	0,095	0,016	0,017	0,045	0,1	0,126	0,23
10	0,01	0,017	0,084	0,016	0,017	0,045	0,095	0,197	0,226
11	0,0098	0,045	0,077	0,016	0,019	0,032	0,089	0,494	0,221
12	0,0095	0,011	0,071	0,016	0,017	0,032	0,084	0,114	0,219
13	0,0093	0,0093	0,063	0,016	0,017	0,032	0,084	0,089	0,214

Учитывая соотношения ортогональности функций F_k [1], находим, что матрицы систем (3.5), соответствующие функционалам F_{VI} и F_{VII} , обладают свойствами

$$M_{mn}^{ij} = 0 \text{ при } m \neq n \text{ (} i, j = 1, 2 \text{)} \quad (3.25)$$

Это позволяет для смешанных условий получить решение в замкнутой форме

$$A_m = \frac{K_m^1 M_{mm}^{22} - K_m^2 M_{mm}^{12}}{M_{mm}^{11} M_{mm}^{22} - M_{mm}^{12} M_{mm}^{21}}, \quad B_m = \frac{K_m^2 M_{mm}^{11} - K_m^1 M_{mm}^{21}}{M_{mm}^{11} M_{mm}^{22} - M_{mm}^{12} M_{mm}^{21}} \quad (3.26)$$

Для оценки сходимости метода одна и та же смешанная задача (1.4) решалась путем редукции систем (3.5) для функционалов F_4 и \tilde{F}_4 , а также путем вычисления коэффициентов разложений (2.9), (2.10) в соответствии с формулами (3.26). В табл. 2 показаны погрешности трех различных полученных решений в зависимости от числа N членов, удерживаемых в суммах (2.9), (2.10), для различных условий нагружения. Погрешности ε_4 , $\tilde{\varepsilon}_4$ и ε_7 во всех случаях вычислялись в соответствии со значениями функционала F_4^N .

Из полученных результатов следует, что среднеквадратическая погрешность решения, полученного путем минимизации функционала F_4 , значительно быстрее убывает с ростом N , чем при вычислении коэффициентов по формулам (3.26), которые определяют точное по норме L_2 решение смешанной задачи. Это объясняется тем, что при использовании функционала значения коэффициентов разложения A_k, B_k каждый раз выбираются так, чтобы при данном N минимизировать среднеквадратическое отклонение полученного приближенного решения от условий, заданных на торце. Другой вывод состоит в том, что при данном N погрешность полученного решения зависит от конкретного вида функций, определяющих условия на торце. Если условия нагружения приводят к особенностям поля напряжений в угловых точках, то погрешность медленно убывает с ростом N . Из анализа численных результатов вытекает, что при достаточно больших N основной вклад в суммарную погрешность

при этом вносят небольшие окрестности угловых точек. Поэтому сходимость можно улучшить путем выделения сингулярной составляющей решения [13].

4. Рассмотрим теперь случай когда функции, определяющие условия нагружения на торце полуполосы неизвестны. Вместо них пусть заданы N_δ функций $\delta^{(l)}(x)$, $x \in d_\delta^{(l)} \subset [0, \infty)$, $l = 1, \dots, N_\delta$, которые, в соответствии с (1.5), представляют собой результаты N_δ независимых измерений параметра искомого поля напряжений δ как функции координаты x . Выберем коэффициенты разложения A_k, B_k в формулах (2.9), (2.10) так, чтобы обеспечить минимальное по норме L_2 отклонение найденного поля напряжений от измеренных значений $\delta^{(l)}(x)$ параметра этого поля $\delta(\sigma_{ij})$. С этой целью введем в рассмотрение функционал

$$F_{V_{III}} = \frac{1}{N_\delta} \sum_{l=1}^{N_\delta} \int_{d_\delta^{(l)}} (\delta(\sigma_{ij}) - \delta^{(l)}(x))^2 dx \quad (4.1)$$

где $\delta(\sigma_{ij})$ определяется в соответствии с формулой (1.5). Условия минимума функционала $F_{V_{III}}$ по отношению к постоянным A_k, B_k опять приводят к системе (3.5).

При проведении численного эксперимента принималось $N_\delta = 1$ и функция $\delta^{(1)}(x)$, необходимая для решения обратной задачи, вычислялась по формуле (1.5) с использованием полученного решения прямой задачи для условий (3.15). Кроме погрешности $\epsilon_8 = (F_{V_{III}})^{1/2}$, определяющей степень согласования полученного приближенно решения обратной задачи с заданной функцией $\delta^{(1)}(x)$, вычислялась также "истинная" погрешность $\epsilon_1 = (F_1)^{1/2}$, которая определяет отклонение решения от действительных условий нагружения.

В результате установлено, что хотя погрешность ϵ_8 быстро уменьшается с ростом N (при $N = 1$ $\epsilon_8 = 2,8 \cdot 10^{-4}$, а при $N = 4$ $\epsilon_8 = 2,3 \cdot 10^{-7}$), "истинная" погрешность ϵ_1 с ростом N увеличивается ввиду резкого ухудшения обусловленности матрицы редуцированной системы (3.5). Фактически решение обратной задачи в такой постановке позволяет определить с достаточной точностью лишь коэффициенты A_1 и B_1 . Заметим что, хотя "истинная" точность ухудшается с ростом N , точность определения первых коэффициентов при этом возрастает.

Такое поведение решения вполне объяснимо, если учесть, что вклад в решение (2.9), (2.10) слагаемого с индексом k при $x > 0$ тем меньше, чем больше k , причем, с ростом x этот вклад экспоненциально уменьшается. Поэтому вклад в функционал $F_{V_{III}}$ слагаемых с коэффициентами A_1 и B_1 значительно преобладает над вкладом остальных членов, что и приводит к плохой обусловленности матрицы, соответствующей функционалу $F_{V_{III}}$ системы уравнений.

Другой вывод состоит в том, что сужение интервала d_δ задания функции $\delta^{(1)}(x)$ приводит к ухудшению точности решения. Так, для $d_\delta = [0; 0,1]$ получены значения $\epsilon_8 = 0,011$, $\epsilon_1 = 0,126$ (значения, приведенные ранее, получены при $d_\delta = [0,2]$).

Следует ожидать, что сходимость решения обратной задачи повысится, если кроме функции $\delta^{(1)}(x)$ имеется какая-либо информация о поведении решения на торце. Пусть, например, известно, что выполняется условие $\sigma_{xy}|_{x=0} = 0$. Тогда вместо (4.1) используем функционал

$$F_{IX} = \frac{1}{N_\delta} \sum_{l=1}^{N_\delta} \int_{d_\delta^{(l)}} (\delta(\sigma_{ij}) - \delta_{mes}^{(l)}(x))^2 dx + \int_{-1}^1 (\sigma_{xy}|_{x=0})^2 dy \quad (4.2)$$

Результаты численных экспериментов для функции $\delta_{mes}(x)$, такой же как и в предыдущем случае, приведены в табл. 3.

N	1	2	3	4	5	7	9	11
ε_φ	0,061	0,003	0,001	0,00014	0,00004	0,00002	0,00001	0,00001
ε_t	0,103	0,018	0,016	0,007	0,014	0,04	0,028	0,058

Пусть теперь задано N_φ функций $\varphi^{(l)}(x, y), \{x, y\} \in d_\varphi^{(l)} \subset L, l = 0, \dots, N_\varphi$ и N_Δ функций $\Delta^{(p)}(x, y), \{x, y\} \in d_\Delta^{(p)} \subset L, p = 0, \dots, N_\varphi$, которые представляют результаты независимых измерений параметров поля напряжений $\varphi(\sigma_{ij})$ и $\Delta(\sigma_{ij})$.

Предположим $N_\varphi = N_\Delta, d_\varphi^{(l)} = d_\Delta^{(p)}$, и преобразуем формулы (1.6) к виду

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \Delta \cos(2\varphi), \quad \sigma_{xy} = -\Delta/2 \sin(2\varphi) \quad (4.3)$$

Исходя из (4.3), образуем функционал

$$F_X = \frac{1}{N_\Delta} \sum_{l=1}^{N_\Delta} \int_{d_\Delta^{(l)}} ((\sigma_{xy} - \omega^{(l)}(x, y))^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \lambda^{(l)}(x, y))^2) dx dy \quad (4.4)$$

$$\omega^{(l)}(x, y) = -\frac{\Delta^{(l)}(x, y)}{2} \sin(2\varphi^{(l)}(x, y))$$

$$\lambda^{(l)}(x, y) = \Delta^{(p)}(x, y) \cos(2\varphi^{(l)}(x, y))$$

Требование минимума функционала F_X опять приводит к линейной системе вида (3.5).

5. Рассмотрим функционал

$$F = \sum_{m=1}^4 \frac{1}{N_{(m)}} \sum_{k=1}^{N_{(m)}} \int_{d_{(m)}^{(k)}} H_{(m)}^{(k)}(y) (\vartheta_{(m)}(\sigma_{ij}; u_i) - \vartheta_{(m)}^{(k)}(y))^2 dy +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N_S} \frac{1}{N_{(n)}} \sum_{l=1}^{N_{(n)}} \int_{d_{(n)}^{(l)}} H_{(n)}^{(l)}(\eta) (\delta_{(n)}(\sigma_{ij}; u_i) - \delta_{(n)}^{(l)}(\eta))^2 d\eta \quad (5.1)$$

$$\vartheta_{(m)}(\sigma_{ij}; u_i) \in \{\sigma_{xx}|_{x=0}, \sigma_{xy}|_{x=0}, u_x|_{x=0}, u_y|_{x=0}\}, \quad m \in \{\sigma, \tau, u, v\}$$

$$H_{(n)}^{(l)}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi \in d_{(n)}^{(l)} \\ 0 & \text{при } \xi \notin d_{(n)}^{(l)} \end{cases}$$

Считаем, что если какая-либо из функций $\vartheta_{(m)}^{(l)}(y), \delta_{(m)}^{(l)}(\eta)$ не задана, то ее область определения $d_{(m)}^{(l)}$ – пустое множество и наоборот.

При заданных C_k первая двойная сумма в (5.1) определяет отклонение поля напряжений (перемещений) от функций $\vartheta_{(m)}^{(l)}(y)$, заданных на торце, а вторая – устанавливает степень согласованности этого поля с дополнительной информацией, представленной функциями $\delta_{(m)}^{(l)}(\eta)$.

Если соотношения, определяющие зависимости измеряемых параметров $\delta_{(n)}$ от компонент напряжений (перемещений), линейны, – требование минимальности функционала F приводит к линейной системе вида (3.5). В противном случае, например, при использовании соотношений (1.6), получаем нелинейную систему уравнений на коэффициенты C_k .

Функционал (5.1) обобщает подход, который развивался до сих пор. Особенность подхода – возможность учета разнообразной информации о решении: данных, о поведении искомого поля напряжений (перемещений) как на торце полуполосы, так и внутри области L , априорной информации и результатов физических измерений различными методами. Вторая особенность состоит в том, что этот подход позволяет учитывать данные о поведении решения на торце, представляемые функциями, области определения которых не совпадают с отрезком $[-1, 1]$. Вообще, области определения $d_{(n)}^{(l)}$ функций, представляющих исходные данные задачи и на торце, и внутри области, могут быть многосвязными, даже дискретными. В последнем случае интегралы в (5.1) заменяются суммами.

Принимая те или иные предположения относительно областей определения функций $\vartheta_{(m)}^{(l)}(y)$ и $\delta_{(n)}^{(l)}(\eta)$, получаем частные случаи, в том числе рассмотренные ранее. Так, если в (46) ограничиться лишь функциями $\vartheta_{(m)}^{(l)}(y)$, полагая, что области определения функций $\delta_{(n)}^{(l)}(\eta)$ – пустые множества, то придем к некоторому обобщению задач (1.1)–(1.4) для случаев, когда вместо детерминированных функций $\sigma(y)$, $\tau(y)$, $u(y)$, $v(y)$, заданных в сочетаниях (1.1)–(1.4), располагаем соответствующими сочетаниями множеств выборочных функций $\sigma^{(l)}(y)$, $\tau^{(l)}(y)$, $u^{(l)}(y)$, $v^{(l)}(y)$.

Таким образом, разработанный подход позволяет в рамках единого алгоритма исследовать как прямые, так и обратные задачи теории упругости для полубесконечной полосы. Реализация такого алгоритма не требует значительных машинных ресурсов, поэтому мы считаем, что данный метод является перспективным для использования в составе интегрированных программных систем, предназначенных для решения инженерных задач, которые предполагают определение напряженного состояния в том числе и с использованием результатов оптических, магнитных и других методов измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прокопов В.К. О соотношении обобщенной ортогональности П.Ф. Папковича для прямоугольной пластины // ПММ. 1964. Т. 29. Вып. 2. С. 351–355.
2. Гусейн-Заде М.И. О необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 752–760.
3. Ворович И.И., Копасенко В.В. Некоторые задачи теории упругости для полуполосы // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 109–115.
4. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наук. думка, 1985. 280 с.
5. Васильев В.В., Лурье С.А. Плоская задача теории упругости для ортотропной консольной полосы // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 125–135.
6. Lurie S.A., Vasiliev V.V. The biharmonic Problem in the theory of elasticity. Gordon and Breach Publishers, 1995. 265 p.
7. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
8. Александров А.Я., Ахметзянов М.Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1973. 576 с.

9. *Абен Х.К.* Интегральная фотоупругость. Таллин: Валгус, 1975. 218 с.
10. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
11. *Vogy D.B.* On the problem of edge-bonded elastic quarter-planes loaded at the boundary // *Int. J. Solid Struct.* 1970. V. 6. No. 9. P. 1287-1313.
12. *Коялович Б.М.* Исследования о бесконечных системах линейных уравнений // *Изв. физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова.* 1930. № 3. С. 41-167.
13. *Чекурин В.Ф., Шпакович Р.С.* К исследованию концентрации напряжений и краевого эффекта в пластинах // *Изв. АН. МТТ.* 1997. № 4. С. 159-166.
14. *Mi nz D., Yang Y.* Stress singularities at the interface in bonded dissimilar materials under mechanical and thermal loading // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1992. V. 59. No. 4. P. 857-861.

Львов

Поступила в редакцию
4.06.1996