

УДК 593.3

© 1999 г. Л.И. ФРИДМАН

О РАЦИОНАЛЬНОЙ ФОРМЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Связь уравнений Гельмгольца, описывающих стационарные колебания упругих тел, с задачей Штурма–Лиувилля [1, 2] предопределяет переход граничных условий в бесконечные системы линейных алгебраических уравнений [3, 4].

Объем вычислений при численной реализации аналитических решений для тел и конструкций, аппроксимируемых каноническими телами тем меньше, чем более полно проведены аналитические преобразования. Во многих случаях построение аналитическими методами бесконечных систем возможно только на основе приведенных в статье дополнительных условий ортогональности ограниченного класса задач Штурма – Лиувилля и обусловленной ими форме граничных условий.

В частности, такой подход весьма эффективен при применении первой из двух возможных схем аппроксимации тел вращения цилиндрическими телами [5] и позволяет расширить класс конструкций, собственные частоты которых могут определяться методами теории упругости.

Приведенное сравнение собственных частот тела вращения, вычисленных по двум схемам аппроксимации его цилиндрическими телами, определяет область применения каждой из них в зависимости от конфигурации тела.

Решения нестационарных задач могут быть построены разложением в ряд по собственным формам, однако известны другие эффективные методы построения решений стационарных и нестационарных задач [6–8].

Задача Штурма – Лиувилля на отрезке $a \leq x \leq b$ описываемая уравнением [9]:

$$\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x)y + \lambda \rho(x)y = 0, \quad (k(x) > 0, \rho(x) > 0) \quad (1)$$

и граничными условиями

$$\alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = 0, \quad \alpha y(b) + \beta y'(b) = 0 \quad (2)$$

имеет решением ортогональную систему функций $y_n(x)$ с собственными значениями λ_n , удовлетворяющую условию ортогональности

$$\int_a^b y_n(x) y_m(x) \rho(x) dx = 0 \quad (m \neq n) \quad (3)$$

Ограничим класс рассматриваемых задач условиями $\alpha_0 = \alpha = 0$ либо $\beta_0 = \beta = 0$. Для этого класса задач справедливо дополнительное условие ортогональности [10]:

$$\int_a^b \left[k(x) \frac{dy_m}{dx} \frac{dy_n}{dx} + q(x) y_m y_n \right] dx = 0 \quad (m \neq n) \quad (4)$$

Если ограничить класс рассматриваемых задач условиями

$$\beta = \beta_0 = 0, \quad k(x)q(x) = A = \text{const} \quad (5)$$

то справедливо третье условие ортогональности

$$\int_a^b \left(\frac{dy_m}{dx} \pm \frac{\sqrt{A}}{k(x)} y_m \right) \left(\frac{dy_n}{dx} \pm \frac{\sqrt{A}}{k(x)} y_n \right) k(x) dx = 0 \quad (m \neq n) \quad (6)$$

что подтверждается раскрытием скобок в (6) с учетом (5), (4).

Умножая уравнение (1), записанное относительно y_n на $y_n dx$ и интегрируя от a до b , получим для класса задач Штурма – Лиувилля, ограниченного условиями $\alpha = \alpha_0 = 0$ либо $\beta = \beta_0 = 0$:

$$\int_a^b \left[k(x) \left(\frac{dy_n}{dx} \right)^2 + q(x) y_n^2 \right] dx = \lambda_n \int_a^b \rho(x) y_n^2 dx \quad (7)$$

Для класса задач, соответствующего условиям (5), зависимость (7) принимает вид

$$\int_a^b \left[k(x) \left(\frac{dy_n}{dx} \right)^2 + \frac{A}{k(x)} y_n^2 \right] dx = \lambda_n \int_a^b \rho(x) y_n^2 dx \quad (8)$$

откуда следует

$$\int_a^b \left(\frac{dy_n}{dx} \pm \frac{\sqrt{A}}{k(x)} y_n \right)^2 k(x) dx = \lambda_n \int_a^b \rho(x) y_n^2 dx \quad (9)$$

Если в решения уравнений Гельмгольца, описывающих стационарную динамическую задачу теории упругости для канонического тела в цилиндрических координатах ρ, θ, z ($\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, 0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq z \leq z_0$) [3, 4, 11] внести условия периодичности собственных форм по угловой координате θ при построении решения для кругового цилиндра ($\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, 0 \leq z \leq z_0$), то собственные формы упрощаются, каждой собственной форме будут соответствовать два индекса j и m (m – число узловых плоскостей, j – порядковый номер собственной формы при фиксированном m) и потенциалы перемещений примут вид

$$\begin{aligned} \Phi_{jm}(\rho, z) &= \sum_n R_n^{(0)}(\rho) v_n(z) + \sum_k Z_k^{(0)}(z) w_k(\rho) \\ \Psi_{jm}^{(1)}(\rho, z) &= \sum_n R_n^{(1)}(\rho) \frac{1}{v_n} \frac{dv_n}{dz} + \sum_k Z_k^{(1)}(z) w_k(\rho) \\ \Psi_{jm}^{(2)}(\rho, z) &= \sum_n R_n^{(2)}(\rho) \dot{v}_n(z) + \sum_k Z_k^{(2)}(z) w_k(\rho) \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $v_n(z)$ и $w_k(\rho)$ – ортогональные системы функций из решения задач Штурма – Лиувилля.

Функция $w_k(\rho)$ является решением уравнения Бесселя, которое может быть записано в форме уравнения (1):

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dw_k}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho} w_k + h_k^2 \rho w_k = 0 \quad (11)$$

Вместе с граничными условиями

$$w_k(\rho_1) = 0, \quad w_k(\rho_2) = 0 \quad (12)$$

уравнение (11) описывает задачу Штурма – Лиувилля.

Если функцию $w_k(\rho)$ записать в виде

$$w_k(\rho) = Y_m(\rho_2 h_k) J_m(\rho h_k) - J_m(\rho_2 h_k) Y_m(\rho h_k) \quad (13)$$

то второе условие (12) удовлетворяется, а первое условие (12) переходит в уравнение собственных значений h_k ($k = 1, 2, 3, \dots$). В (13) $J_m(\rho h_k)$ и $Y_m(\rho h_k)$ функции Бесселя соответственно первого и второго рода порядка m . Задача, описываемая уравнением (11) и граничными условиями (12) относится к классу задач Штурма – Лиувилля, соответствующих зависимостям (5) и решение ее (13) удовлетворяет условиям ортогональности вида (3) и (6):

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} w_k(\rho) w_l(\rho) \rho d\rho = 0$$

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\frac{dw_k}{d\rho} \pm \frac{m}{\rho} w_k \right) \left(\frac{dw_l}{d\rho} \pm \frac{m}{\rho} w_l \right) \rho d\rho = 0 \quad (k \neq l) \quad (14)$$

Функция v_n является решением уравнения тригонометрических функций

$$d^2 v_n / dz^2 + v_n^2 = 0 \quad (15)$$

которое можно рассматривать как частный случай уравнения (1). Решение уравнения (15) при граничных условиях вида (2) дает ортогональную систему функций на отрезке $0 \leq z \leq z_0$ (осевая координата z отсчитывается от одной из плоских границ цилиндра):

$$v_n = C_n \cos v_n z + D_n \sin v_n z \quad (16)$$

Условия (2) дают систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_n и D_n . Условие разрешимости системы переходит в уравнение собственных значений v_n :

$$(\alpha \alpha_0 + v_n^2 \beta \beta_0) \sin v_n z_0 + v_n (\alpha_0 \beta - \alpha \beta_0) \cos v_n z_0 = 0 \quad (17)$$

При этом постоянные C_n и D_n связаны простой зависимостью

$$\alpha_0 C_n + \beta_0 v_n D_n = 0 \quad (18)$$

Ниже будет показано, что произвол в выборе постоянных $\alpha_0, \alpha, \beta_0, \beta$ позволяет строить функцию v_n для аппроксимирующего цилиндра в виде, позволяющем сократить объем вычислений.

Помимо уравнений (11) и (15) процедура разделения переменных в уравнениях Гельмгольца дает также уравнения модифицированных функций Бесселя от радиуса ρ и уравнения экспоненты от z , решение которых записывается в виде

$$R_n^{(0)} = A_n^{(0)} \frac{I_m(\rho \gamma_n)}{I_m(\rho_2 \gamma_n)} + B_n^{(0)} \frac{K_m(\rho \gamma_n)}{K_m(\rho_1 \gamma_n)}$$

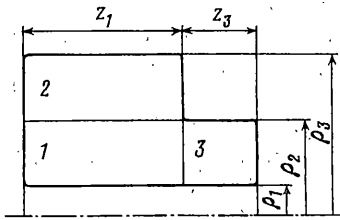
$$R_n^{(l)} = A_n^{(l)} \frac{I_k(\rho \delta_n)}{I_k(\rho_2 \delta_n)} + B_n^{(l)} \frac{K_m(\rho \delta_n)}{K_m(\rho_1 \delta_n)} \quad (l = 1, 2) \quad (19)$$

$$\gamma_n^2 = v_n^2 - (\lambda_{jm} / c_1)^2, \quad \delta_n^2 = v_n^2 - (\lambda_{jm} / c_2)^2$$

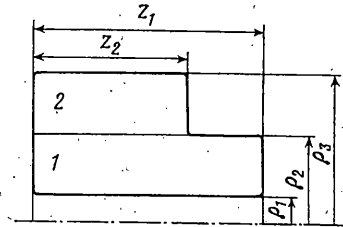
Здесь λ_{jm} – безразмерная частота, отнесенная к c/R ; c – скорость звука в материале цилиндра, R – внешний радиус

$$c_1^2 = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad c_2^2 = \frac{1}{2(1 + \nu)}$$

безразмерные скорости распространения волн расширения и волн сдвига, ν – коэффициент Пуассона



Фиг. 1



Фиг. 2

$$Z_k^{(0)} = C_k^{(0)} e^{-\omega_k(z_0 - z)} + D_k^{(0)} e^{-\omega_k z} \quad (20)$$

$$Z_k^{(l)} = C_k^{(l)} e^{-\Omega_k(z_0 - z)} + D_k^{(l)} e^{-\Omega_k z} \quad (l=1, 2)$$

$$\omega_k^2 = h_k^2 - (\lambda_{jm} / c_1)^2, \quad \Omega_k^2 = h_k^2 - (\lambda_{jm} / c_2)^2$$

$$A_n^{(0)}, B_n^{(0)}, C_k^{(0)}, D_k^{(0)}, A_n^{(l)}, B_n^{(l)}, C_k^{(l)}, D_k^{(l)} \quad (l=1, 2)$$

последовательности произвольных постоянных.

При $\gamma_n^2 < 0$ или $\delta_n^2 < 0$ модифицированные функции Бесселя переходят в функции Бесселя, а при $\omega_k^2 < 0$ или $\Omega_k^2 < 0$ экспоненты переходят в тригонометрические функции.

Безразмерные компоненты перемещений даются зависимостями:

$$U_{\rho jm} = u_{\rho jm} \cos m\theta, \quad U_{\theta jm} = u_{\theta jm} \sin m\theta, \quad U_{zjm} = u_{zjm} \cos m\theta$$

$$u_{\rho jm} = \sum_n \left(\frac{dR_n^{(0)}}{d\rho} - v_n \frac{dR_n^{(1)}}{d\rho} + \frac{m}{\rho} R_n^{(2)} \right) v_n + \sum_k \left[\left(Z_k^{(0)} + \frac{dZ_k^{(1)}}{dz} \right) \frac{dw_k}{d\rho} + Z_k^{(2)} \frac{m}{\rho} w_k \right]$$

$$u_{\theta jm} = \sum_n \left(-\frac{m}{\rho} R_n^{(0)} + \frac{m}{\rho} v_n R_n^{(1)} - \frac{dR_n^{(2)}}{d\rho} \right) v_n + \sum_k \left[-\left(Z_k^{(0)} + \frac{dZ_k^{(1)}}{dz} \right) \frac{m}{\rho} w_k - Z_k^{(2)} \frac{dw_k}{d\rho} \right] \quad (22)$$

$$u_{zjm} = \sum_n \left[v_n R_n^{(0)} - \left(v_n^2 - \frac{\lambda_{jm}^2}{c_2^2} \right) R_n^{(1)} \right] \frac{1}{v_n} \frac{dv_n}{dz} + \sum_k \left(\frac{dZ_k^{(0)}}{dz} + h_k^2 Z_k^{(1)} \right) w_k$$

Приведенное решение стационарной динамической задачи теории упругости для конечного цилиндра совпадает с решением [12], отличаясь от последнего обозначениями. Изменение обозначений и дальнейшие преобразования, в отличие от [12], сделаны с целью приведения решения к форме, удобной при применении кругового цилиндра в качестве аппроксимирующего тела в стационарной динамической задаче теории упругости для конструкций в форме тел вращения [5].

Зависимости (22) полностью определяют компоненты напряжений в цилиндре. Рассмотрим граничные условия и условия стыковки аппроксимирующих цилиндров при аппроксимации тела вращения по первой схеме (фиг. 1), при этом осевая координата z отсчитывается от левой плоской границы цилиндра. Для свободных границ $z = \text{const}$ граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{zjm} = 0, \quad \tau_{z\theta jm} = 0, \quad \tau_{\rho z jm} = 0 \quad (23)$$

Для свободных поверхностей $\rho = \text{const}$

$$\sigma_{\rho jm} = 0, \quad \tau_{\rho\theta jm} = 0, \quad \tau_{\rho z jm} = 0 \quad (24)$$

Условия на стыке $\rho = \rho_2$ первого и второго цилиндров

$$\sigma_{\rho jm(1)} = \sigma_{\rho jm(2)}, \quad \tau_{\rho \theta jm(1)} = \tau_{\rho \theta jm(2)}, \quad \tau_{\rho z jm(1)} = \tau_{\rho z jm(2)} \quad (25)$$

$$u_{\rho jm(1)} = u_{\rho jm(2)}, \quad u_{\theta jm(1)} = u_{\theta jm(2)}, \quad u_{z jm(1)} = u_{z jm(2)}$$

Условия на стыке $z' = z_1, z'' = 0$ (z' – осевая координата первого цилиндра, z'' – третьего цилиндра):

$$\sigma_{z jm(1)} = \sigma_{z jm(3)}, \quad \tau_{\rho z jm(1)} = \tau_{\rho z jm(3)}, \quad \tau_{\theta z jm(1)} = \tau_{\theta z jm(3)} \quad (26)$$

$$u_{\rho jm(1)} = u_{\rho jm(3)}, \quad u_{\theta jm(1)} = u_{\theta jm(3)}, \quad u_{z jm(1)} = u_{z jm(3)}$$

Индексы 1, 2 и 3 в скобках являются номерами цилиндров (фиг. 1). Все записанные условия на поверхности $\rho = \text{const}$ переходят в последовательности линейных однородных алгебраических уравнений относительно последовательностей произвольных постоянных. На плоских границах $z = \text{const}$ в аналогичные последовательности уравнений переходят условия для $\sigma_{z jm}$ и $u_{z jm}$. Остальные условия, как видно из первых двух зависимостей (22) и из зависимостей:

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z jm} \frac{1+v}{E} = & \sum_n \left[v_n \frac{dR_n^{(0)}}{d\rho} \left(v_n^2 - \frac{\lambda_{jm}^2}{2c_2^2} \right) \frac{dR_n^{(1)}}{d\rho} + \frac{1}{2} v_n \frac{m}{\rho} R_n^{(2)} \right] \frac{1}{v_n} \frac{dv_n}{dz} + \\ & + \sum_k \left\{ \left[\frac{dZ_k^{(0)}}{dz} + \left(h_k^2 - \frac{\lambda_{jm}^2}{2c_2^2} \right) Z_k^{(1)} \right] \frac{dw_k}{d\rho} + \frac{1}{2} \frac{dZ_k^{(2)}}{dz} \frac{m}{\rho} w_k \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z jm} \frac{1+v}{E} = & \sum_n \left[-v_n \frac{m}{\rho} R_n^{(0)} + \left(v_n^2 - \frac{\lambda_{jm}^2}{2c_2^2} \right) \frac{m}{\rho} R_n^{(1)} - v_n \frac{1}{2} \frac{dR_n^{(2)}}{d\rho} \right] \frac{1}{v_n} \frac{dv_n}{dz} + \\ & + \sum_k \left\{ - \left[\frac{dZ_k^{(0)}}{dz} + \left(h_k^2 - \frac{\lambda_{jm}^2}{2c_2^2} \right) Z_k^{(1)} \right] \frac{m}{\rho} w_k - \frac{1}{2} \frac{dZ_k^{(2)}}{dz} \frac{dw_k}{d\rho} \right\} \end{aligned}$$

переходят в алгебраические уравнения при численном вычислении определенных интегралов, определяющих коэффициенты разложения функций $\rho^2 dw_k / d\rho$, $\rho^2 dR_n^{(l)} / d\rho$ ($l = 0, 1, 2$) в ряды по $w_k(\rho)$. Вычисления эти производятся многократно и приводят к существенным затратам машинного времени. Последнее сокращается более чем на порядок, если от условий для $\tau_{\rho z jm}$, $\tau_{\theta z jm}$, $u_{\rho jm}$, $u_{\theta jm}$ перейти к их сумме и разности:

$$u_{\rho jm} \pm u_{\theta jm} = \sum_n \left[\left(\frac{dR_n^{(0)}}{d\rho} \mp \frac{m}{\rho} R_n^{(0)} \right) - v_n \left(\frac{dR_n^{(1)}}{d\rho} \mp \frac{m}{\rho} R_n^{(1)} \right) \mp \right. \quad (28)$$

$$\left. \mp \left(\frac{dR_n^{(2)}}{d\rho} \mp \frac{m}{\rho} R_n^{(2)} \right) \right] v_n + \sum_k \left(Z_k^{(0)} + \frac{dZ_k^{(1)}}{dZ} \mp Z_k^{(2)} \right) \left(\frac{dw_k}{d\rho} \mp \frac{m}{\rho} w_k \right)$$

$$(\tau_{\rho z jm} \pm \tau_{\theta z jm}) \frac{1+v}{E} = \sum_n \left[v_n \left(\frac{dR_n^{(0)}}{d\rho} \mp \frac{m}{\rho} R_n^{(0)} \right) - \left(v_n^2 - \frac{\lambda_{jm}^2}{2c_2^2} \right) \left(\frac{dR_n^{(1)}}{d\rho} \mp \frac{m}{\rho} R_n^{(1)} \right) \mp \right.$$

$$\left. \mp \frac{1}{2} v_n \left(\frac{dR_n^{(2)}}{d\rho} \mp \frac{m}{\rho} R_n^{(2)} \right) \right] \frac{1}{v_n} \frac{dv_n}{dz} + \sum_k \left[\frac{dZ_k^{(0)}}{dz} + \left(h_k^2 - \frac{\lambda_{jm}^2}{2c_2^2} \right) Z_k^{(1)} \mp \frac{1}{2} \frac{dZ_k^{(2)}}{dz} \right] \left(\frac{dw_k}{d\rho} \mp \frac{m}{\rho} w_k \right) \quad (29)$$

В этом случае переход к алгебраическим уравнениям обусловлен разложениями вида

$$\frac{dI_m}{d\rho}(\rho\gamma_n) \pm \frac{m}{\rho} I_m(\rho\gamma_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{dw_k}{d\rho} \pm \frac{m}{\rho} w_k \right) \quad (30)$$

коэффициенты которых вычисляются аналитически

$$\begin{aligned} a_k &= 1 / \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\frac{dw_k}{d\rho} \pm \frac{m}{\rho} w_k \right)^2 \rho d\rho \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\frac{dI_m}{d\rho} \pm \frac{m}{\rho} I_m \right) \left(\frac{dw_k}{d\rho} \pm \frac{m}{\rho} w_k \right) \rho d\rho = \\ &= \frac{\pi\gamma_n^2}{h_k^2 + \gamma_n^2} \left[-I_m(\rho_2\gamma_n) + I_m(\rho_1\gamma_n) \frac{J_m(\rho_2 h_k)}{J_m(\rho_1 h_k)} \right] / \left[1 - \left(\frac{J_m(\rho_2 h_k)}{J_m(\rho_1 h_k)} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (31)$$

Аналогично записываются разложения $dK_m/d\rho \pm (m/\rho)K_m$. Если собственные функции $v_n(z)$ строить для граничных условий вида (2) при $\alpha_0 = \alpha = 0$, $\beta_0 = \beta = 1$, то в (18) $D_n = 0$ ($C_n = 1$), а зависимость (17) дает уравнение собственных значений $\sin v_n z_0 = 0$, откуда $v_n = n\pi/z_0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). В этом случае на плоских границах $z = \text{const}$ граничные условия для τ_{zjm} , $\tau_{\theta zjm}$, u_{zjm} , как видно из (27) и (22), удовлетворяются точно и позволяют исключить ряд последовательностей произвольных постоянных. Для тела вращения, показанного на фиг. 1, общее число последовательностей произвольных постоянных сокращается с 36 до 25. При удержании в рядах (10) по каждому индексу суммирования N слагаемых, остальные граничные условия, в том числе для $u_{\rho jm} \pm u_{\theta jm}$ переходят в систему линейных однородных алгебраических уравнений порядка $25N$ относительно произвольных постоянных. Условие разрешимости ее дает частотное уравнение.

Вторая схема аппроксимации отличается от первой тем, что с целью сокращения числа аппроксимирующих цилиндров и, вследствие этого, порядка усеченной системы линейных алгебраических уравнений, тело вращения аппроксимируется концентричными цилиндрами различной протяженности по оси z , при этом условия сопряжения неоднородны: часть цилиндрической поверхности одного из сопрягаемых цилиндров свободна. Переход к квазиоднородным условиям осуществляется разложением в тригонометрические ряды по координате z на поверхности сопряжения напряжений меньшего по длине цилиндра и перемещений большего, после чего условия сопряжения становятся квазиоднородными [5], что вносит дополнительную погрешность на каждом радиусе сопряжения.

Тело вращения, показанное на фиг. 2, по второй схеме аппроксимируется двумя цилиндрами, порядок усеченной системы при удержании в рядах (10) N слагаемых равен $16N$ (по первой схеме $25N$).

Дополнительное разложение в ряды на стыке двух цилиндров напряжений и перемещений вносит погрешность вычислений, которая, очевидно, тем больше, чем больше отношение $(z_1 - z_2)/z_1$ (фиг. 2). Эта тенденция подтверждается вычислениями безразмерных частот λ_{jm} . В таблице приведены частоты λ_{jm} , вычисленные по двум схемам аппроксимации (I, II) и приведена относительная ошибка вычислений, подсчитанная по формуле

$$\Delta = |\lambda_{jm}^{(1)} - \lambda_{jm}^{(2)}| / \lambda_{jm}^{(1)} \times 100$$

где $\lambda_{jm}^{(1)}$ — частота по первой схеме аппроксимации, а $\lambda_{jm}^{(2)}$ — по второй.

Если тело вращения аппроксимируется большим числом цилиндрических тел, то ошибка возрастает.

Применение второй схемы аппроксимации оправдано для тел вращения типа дисков с плавно меняющейся толщиной по радиусу. Для более сложных конструкций, например, роторов целесообразно сочетание первой и второй схемы аппроксимации.

j	m	N	I	II	Δ
1	2	3	$z_1 = 0,4, z_3 = 0,41$ $\lambda_{jm} = 0,7576$	$z_1 = 0,81, z_2 = 0,4$ $\lambda_{jm} = 0,7375$	2,7%
1	3	6	$\lambda_{jm} = 1,4711$	$\lambda_{jm} = 1,4246$	3,5%
1	2	8	$z_1 = 0,4, z_3 = 0,15$ $\lambda_{jm} = 0,6195$	$z_1 = 0,55, z_2 = 0,4$ $\lambda_{jm} = 0,6286$	1,5%

Конструкции, элементы которых имеют большую протяженность по оси z , могут быть аппроксимированы только по первой схеме.

При решении стационарных динамических задач теории упругости для канонического тела общего вида в цилиндрических координатах [3, 4, 11], а так же при решении статических задач [11], переход к граничным условиям для суммы и разности касательных напряжений столь же эффективен, что и для кругового цилиндра.

При решении стационарной динамической задачи теории упругости для канонического тела в сферических координатах ρ, χ, φ [3, 4], уравнение соединенных функций Лежандра

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dv_n}{dx} \right] - \frac{\mu_m^2}{1-x^2} v_n + v_n (1+v_n) v_n = 0$$

удовлетворяет условию (5).

Если решение этого уравнения подчинить граничным условиям (2) с учетом (5), то оно удовлетворяет дополнительному условию ортогональности

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dv_n}{dx} \pm \frac{\mu_m^2}{1-x^2} v_n \right) \left(\frac{dv_l}{dx} \pm \frac{\mu_m^2}{1-x^2} v_l \right) (1-x^2) dx = 0 \quad (l \neq n)$$

Последнее предопределяет переход от граничных условий $\tau_{\rho\chi j} = 0, \tau_{\varphi\rho j} = 0$ на сферических границах к более рациональным граничным условиям $\tau_{\rho\chi j} \pm \tau_{\varphi\rho j} = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морс Ф., Фейсбах Г. Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.
2. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
3. Фридман Л.И. Динамическая задача теории упругости для тел канонической формы // ДАН СССР, 1986. Т. 289. № 4. С. 825-828.
4. Фридман Л.И. Динамическая задача теории упругости для тел канонической формы // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 12. С. 102-108.
5. Кузнецов Н.Д., Фридман Л.И., Колотников М.Е. Расчетные методы определения собственных частот конструкций в форме тел вращения и близких к ним // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1993. № 3. С. 98-106.
6. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
7. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэроупругость тел сферической формы. М.: Наука, 1990. 260 с.
8. Сеницкий Ю.Э. Исследования упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985. 175 с.
9. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974. 303 с.
10. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 575 с.
11. Фридман Л.И. О представлении решений динамических задач теории упругости в цилиндрических координатах // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 71-80.
12. Фридман Л.И. Динамическая задача теории упругости для цилиндра конечных размеров // Прикл. механика. 1981. Т. 17. № 3. С. 37-43.