

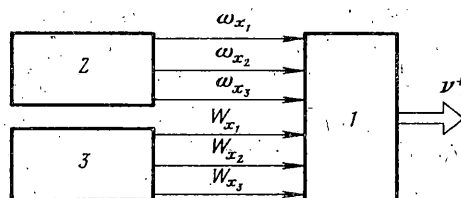
УДК 531.38

© 1999 г. П.К. ПЛОТНИКОВ

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ КВАТЕРНИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ БЕСПЛАТФОРМЕННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Под задачей ориентации твердого тела будем понимать задачу определения кватерниона ориентации, задающего поворот системы координат, связанной с твердым телом, относительно сопровождающей горизонтной системы координат. Этому кватерниону соответствуют углы рыскания, тангажа и крена. Задача решается путем интегрирования кватернионных дифференциальных уравнений ориентации с помощью бортового вычислительного устройства (БЦВУ-1), входящего в систему, по составу одинаковую с бесплатформенной инерциальной навигационной системой (БИНС) (фиг. 1). В системе используется информация от трехкомпонентного гироскопического измерителя угловой скорости (ГИУС-2) и трехкомпонентного измерителя кажущегося ускорения (ИКУ-3) центра масс твердого тела. В отличие от классических БИНС в данном случае задача ориентации решается отдельно от навигационной путем интегрирования с помощью БЦВУ многоступенчатых кватернионных кинематических уравнений с введенными в них корректирующими членами. Задачи с использованием кинематических корректируемых уравнений решались, но либо применительно к кинематической задаче управления ориентацией твердого тела [1–3], либо к задаче согласования приборных трехгранников [4], либо к задаче навигации [5]. В классических БИНС [2] решение задачи ориентации осуществлялось путем интегрирования кинематических уравнений, описывающих повороты трехгранника, связанного с телом, относительно инерциально невращающегося трехгранника, с последующим перепроецированием компонентов вектора кажущегося ускорения, измеренных ИКУ, к осям инерциально невращающегося трехгранника. Затем интегрируют дифференциальные уравнения движения точки тела и определяют географические долготу и широту местоположения этой точки, после чего из геометрических соотношений определяют углы ориентации твердого тела.

В [6] предложен несколько иной подход к решению задач навигации и ориентации. Вначале, как и в [2], интегрируются кинематические уравнения и перепроецируются сигналы ИКУ к осям инерциально невращающегося трехгранника. Затем, на основе уравнений либо гиромаятника, либо гирогоризонткомпаса, либо гирорама определяются по кажущимся ускорениям сопутствующего трехгранника, одна из осей которого направлена по геоцентрической вертикали, его абсолютные угловые скорости. В результате интегрируются кинематические уравнения, определяющие кватернион поворота указанного трехгранника относительно инерциально невращающегося, после чего по геометрическим соотношениям определяют кватернион и углы ориентации твердого тела.



Фиг. 1

В [7] задача ориентации решается путем интегрирования некорректируемых кинематических уравнений либо Эйлера, либо Пуассона, либо других, а учет переносной угловой скорости географического трехгранника осуществляется путем использования сигналов от гироскопаса и навигационной системы. В [7] система, решающая задачу ориентации, названа бесплатформенной инерциальной системой ориентации [БИСО].

Характерным для задач ориентации, решаемых в [2, 6, 7], является интегрирование некорректируемых кинематических дифференциальных уравнений, решения которых являются устойчивыми неасимптотически [8]. Значит, при реализации в БЦВУ за счет дискретизации математической модели их решения будут расходящимися. В [9] решен вопрос обеспечения асимптотической устойчивости алгоритмов БИСО путем введения в кинематические уравнения Эйлера корректирующих членов позиционной радиальной коррекции.

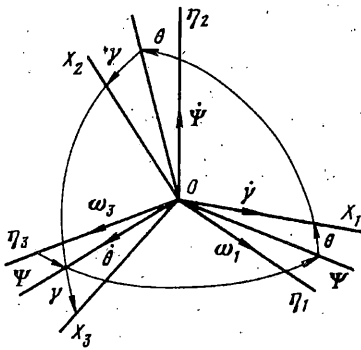
В данной работе строятся многоступенчатые кватернионные уравнения БИСО с введенными в них членами горизонтальной радиальной позиционно-интегральной коррекции, формируемой по сигналам ИКУ. В отличие от [2, 6, 7], показано, каким путем решениям этих уравнений можно придать свойство асимптотической устойчивости в зависимости от структуры коррекции, и тем самым обеспечить применимость в БИСО ГИУС и ИКУ умеренной точности, а также использование только одной ступени ориентации. Задачу навигации в этом случае можно решать путем комплексирования БИСО с датчиками скорости или пути неинерциальной природы. В то же время при использовании точных ГИУС и ИКУ предложенный в статье подход позволяет применением двух или трех ступеней ориентации моделировать в БЦВУ горизонтный свободный в азимуте трехгранник, определять его угловые скорости, а затем, интегрируя обычные кинематические уравнения [5], [10], решать задачу навигации. При одной ступени ориентации, в силу конечных поворотов твердого тела, не удается при использовании в БИСО кватернионных уравнений обеспечить условия Шулера.

1. Постановка задачи. Введем в рассмотрение следующие правые ортогональные системы координат (фиг. 2, фиг. 3): ξ – инерциальная; η – опорная азимутально-свободная горизонтная; ось $o\eta_2$ которой направлена по вертикали места, а оси $o\eta_1$ и $o\eta_3$ лежат в плоскости горизонта; x – система координат, связанная с твердым телом, причем ox_1 – продольная, ox_2 – нормальная, ox_3 – поперечная (направленная на правый борт) оси. Полагаем, что o совпадает с центром масс твердого тела. Взаимную ориентацию введенных систем координат (базисов, трехгранников) зададим собственными, нормированными кватернионами [1], причем λ, μ определяют ориентацию твердого тела относительно базисов ξ и η соответственно, а кватернион ϵ определяет ориентацию базиса η относительно базиса ξ в соответствии со следующей схемой поворотов:

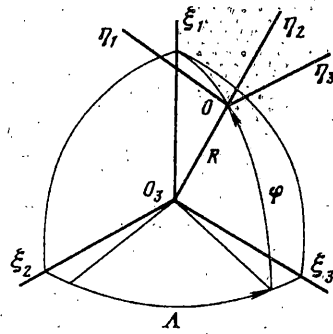
$$\xi \xrightarrow{\epsilon(\lambda, \varphi)} \eta \xrightarrow[\psi, \theta, \gamma]{\mu} X \propto \xi \xrightarrow[\omega]{\lambda, \omega_x} X \quad (1.1)$$

Здесь ω – вектор абсолютной угловой скорости вращения твердого тела; ψ, θ, γ – углы рыскания, тангажа и крена, ω_x – кватернион абсолютной угловой скорости, определенный своими компонентами в базисе X ; λ, φ – абсолютная долгота и географическая широта места. Выше оговорено, что кватернион μ – собственный, то есть задан своими компонентами в базисе X , а, следовательно, и в базисе η : он соответствует углам ψ, θ, γ и является кватернионом ориентации твердого тела относительно горизонтального трехгранника η . Для этого случая задания кватерниона использование приема введения корректирующих членов, изложенного в [1, 3], в уравнение вида $2\lambda^* = \lambda^* \circ \omega_x$ приводит к нарушению его нормы. Учитывая также, что для рассматриваемой здесь задачи корректирующие члены имеют другой вид по отношению к задаче управления ориентацией твердого тела [3], уравнение задачи ориентации твердого тела представим в следующем виде:

$$2N^* = N \circ \Omega_x - M \circ (\Omega_x - \Omega_\mu) + k \circ (M - N) + I \circ \int_{t_0}^t (M - N) d\tau \quad (1.2)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

где N, M – ненормированные кватернионы, соответствующие нормированным кватернионам ν и μ , при этом ν – оценка кватерниона μ , определяемая интегрированием уравнения (1.2) с учетом начального условия $\nu(t_0)$; k, l – кватернионные константы, имеющие смысл коэффициентов усиления позиционной и интегральной коррекции; $\Omega_x(\omega_x)$, $\Omega_\mu(\omega_\mu)$ – кватернионы угловых скоростей, причем кватерниону Ω_x соответствует кватернион угловой скорости ω_x , а кватерниону Ω_μ – кватернион ω_μ угловой скорости изменения ориентации твердого тела. Они определяются из следующих дифференциальных уравнений:

$$2\dot{\mu} = \mu \circ \omega_\mu, \quad 2\dot{M} = M \circ \Omega_\mu \quad (1.3)$$

Будем различать два варианта формирования кватерниона M :

1). При начальной выставке БИНС носимого твердого тела от другой системы ориентации и навигации (например, установленной на несущем теле), когда кватернион ориентации твердого тела может быть задан точно, так что $M = \mu$.

2). При автономной выставке и работе БИНС, когда используется только инерциальная информация ГИУС и ИКУ. В этом случае кинематический член коррекции $M \circ (\Omega_x - \Omega_\mu)$ можно из уравнения (1.2) исключить. Как видно из рассмотрения в п. 3 свойств второй ступени ориентации, этот компонент коррекции присутствует в членах, формируемых по сигналу ИКУ. По этой причине аналогичный член коррекции не введен в уравнение (2.1) второй ступени ориентации. Данный вариант рассмотрен в п. 5 при моделировании работы 1-й и 2-й ступеней ориентации. При этом кватернион M может быть сформирован несколькими способами. В первую очередь, этот кватернион может быть составлен из компонентов W_{xj} ($j = 1, 3$) вектора кажущегося ускорения точки O (он не имеет смысла кватерниона поворота):

$$M = \sum_{r=1}^3 n_{xr} \mathbf{i}_r, \quad n_{xr} = W_{xj} / g \quad (r, j = \overline{1, 3}) \quad (1.4)$$

где g – ускорение силы тяжести; n_{xr} – перегрузка по r -й компоненте кватерниона M ; $\mathbf{i}_r$ – орт гиперкомплексного пространства. Индексы r и j могут не совпадать. Естественно, что коррекция по кватерниону (1.4) является для уравнения (1.2) неполной, часть компонентов уравнения (1.2) не корректируется. В соответствии с [1], [2], вводится нормировка как кватерниона, так и в целом уравнения (1.2), которое приобретает следующий вид:

$$2\dot{\nu} = \nu \circ \omega_x + \mu^+ \circ (\omega_\mu - \omega_x) + k \circ (\mu^+ - c\nu) + l \circ \int_{t_0}^t (\mu^+ - c\nu) d\tau + \rho(1 - \nu^2)\nu \quad (1.5)$$

$$\mu^+ = M / M, \quad \omega_\mu = 2\bar{\mu}^+ \circ \mu^{++}, \quad M^2 = \sum_{r=0}^3 M_r^2, \quad \nu^2 = \sum_{r=0}^3 \nu_r^2 \quad (1.6)$$

где ρ – коэффициент, положительное число; M^2, v^2 – нормы кватернионов $\mathbf{M}, \mathbf{v}$. В [1], [2] показано, что последний член в уравнении (1.5) обеспечивает асимптотически устойчивую нормировку кватерниона $\mathbf{v}$. Входными воздействиями в уравнениях (1.5) являются кватернионы $\omega_x, \omega_\mu, \mu^+$, а подлежащим определению – кватернион $\mathbf{v}$ оценки параметров ориентации твердого тела с учетом кватерниона $\mathbf{v}(t_0)$ начальной ориентации, который должен быть известен. В (1.5) фигурирует разность кватернионов $\mu^+ - c\mathbf{v}$, определяемая способом формирования кватерниона μ^+ ; если он формируется по первому варианту, то $c = 1$; $\mu^+ = \mu$ и берется разность $\mu - \mathbf{v}$, если же он формируется по второму варианту, то $c = 2$ и берется разность $\mu^+ - 2\mathbf{v}$, что следует из структур кватернионов $\mathbf{v}$ и μ^+ (например, из формул (3.7)); оба этих подхода использованы в п. 3.

Еще один способ во втором варианте формирования кватерниона $\mathbf{M}$ по сигналам ИКУ базируется на следующих соображениях. Коррекция должна сохранять эффективность не только при малых, но и при конечных углах поворотов ψ, θ, γ , поэтому сигналы коррекции должны формироваться по кватернионам, компоненты которых определяются по параметрам ориентаций, пересчитанным от сигналов ИКУ. Матрица направляющих косинусов $\mathbf{A}$ в соотношении $\mathbf{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}$ (фиг. 2) имеет двоякое представление [1]. Одно из них – через углы Крылова, второе – через компоненты кватерниона μ :

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \cos\psi \cos\theta & \sin\theta & -\sin\psi \cos\theta \\ -\cos\psi \sin\theta \cos\gamma + \sin\psi \sin\gamma & \cos\theta \cos\gamma & +\sin\psi \sin\theta \cos\gamma + \cos\psi \sin\gamma \\ \sin\psi \cos\gamma + \sin\gamma \sin\theta \cos\psi & -\cos\theta \sin\gamma & \cos\psi \cos\gamma - \sin\psi \sin\theta \sin\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mu_0^2 + \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2 & 2(\mu_1\mu_2 + \mu_0\mu_3) & 2(\mu_1\mu_3 - \mu_0\mu_2) \\ 2(\mu_1\mu_2 - \mu_0\mu_3) & \mu_0^2 + \mu_2^2 - \mu_1^2 - \mu_3^2 & 2(\mu_2\mu_3 + \mu_0\mu_1) \\ 2(\mu_1\mu_3 + \mu_0\mu_2) & 2(\mu_2\mu_3 - \mu_0\mu_1) & \mu_0^2 + \mu_3^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

компоненты ускорения силы тяжести в базисе X равны

$$W_{x1}^+ = g \sin\theta, \quad W_{x2}^+ = g \cos\theta \cos\gamma, \quad W_{x3}^+ = -g \cos\theta \sin\gamma \quad (1.8)$$

Для того, чтобы выразить матрицу направляющих косинусов через компоненты (1.8) ускорения силы тяжести, в матрице $\mathbf{A}$ положим $\psi = 0$. После этого находим

$$\sin\gamma = -n_{x3}/h, \quad \cos\gamma = -n_{x2}/h, \quad n_{xi} = W_{xi}^+/g \quad (i=\overline{1,3})$$

$$h = (n_{x2}^2 + n_{x3}^2)^{1/2}, \quad n = (n_{x1}^2 + n_{x2}^2 + n_{x3}^2)^{1/2} \quad (1.9)$$

$$\sin\theta = n_{x1}/n, \quad \cos\theta = n_{x2}/n \cos\gamma = h/n$$

С учетом (1.9) и условия $\psi = 0$ из (1.7) определяем компоненты кватерниона μ с учетом элементов a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$:

$$\mu_0 = 0,5(1 + a_{11} + a_{22} + a_{33})^{1/2} = 0,5(h/n + n_{x2}/n + n_{x2}/h + 1)^{1/2}$$

$$\mu_1 = (a_{23} - a_{32})/4\mu_0 = -(n_{x3}/n + n_{x3}/h)/4\mu_0$$

$$\mu_2 = -(a_{13} - a_{31})/4\mu_0 = -n_{x1}n_{x3}/4\mu_0nh$$

$$\mu_3 = (a_{12} - a_{21})/4\mu_0 = (n_{x1}n_{x2} + n_{x1})/4\mu_0nh \quad (1.10)$$

В реальных условиях работы БИНС вместо компонентов (1.8) в (1.9) и (1.10) будут использованы ускорения и перегрузки, определяемые в соответствии с формулой

учитывающей угол ψ :

$$[W_{x1}W_{x2}W_{x3}]^T = A[W_1W_2W_3]^T \quad (1.11)$$

где T – символ транспонирования; W_1, W_2, W_3 – компоненты вектора кажущегося ускорения по осям системы координат η ; A – матрица (1.7). Определенный таким образом кватернион M является ненормированным.

Отметим, что при первом варианте формирования кватерниона M уравнение (1.5) позволяет полностью решить задачу определения ориентации твердого тела, если только частное решение $v = \mu$ асимптотически устойчиво. Этот случай обычно соответствует начальной выставке. При втором варианте формирования M , соответствующем обычно автономной работе БИСО, вводится только горизонтальная коррекция от ИКУ, не только не по всем компонентам кватерниона, но и с погрешностями, вызванными абсолютными ускорениями центра масс твердого тела. Данное обстоятельство вызывает появление баллистических погрешностей в выходной информации.

Для этого случая кинематические члены коррекции в уравнения (1.2) и (1.5) не вводятся, баллистические погрешности устраняются за счет выполнения условий Шулера обычно на второй ступени ориентации, а асимптотическая устойчивость может быть обеспечена только по части компонентов кватерниона ориентации.

2. Построение многоступенчатых кватернионных дифференциальных уравнений задачи ориентации. Уравнения (1.5), (1.6) рассматриваем, как уравнения первой ступени задачи определения ориентации твердого тела. Уравнениями второй ступени являются следующие соотношения:

$$2v_1^* = v_1 \circ \omega_{\eta(1)} + k^{(1)} \circ (\mu_1^+ - 2v_1) + l^{(1)} \circ \int_{t_0}^t (\mu_1^+ - 2v_1) dt - p^{(1)}(v_1^2 - 1)v_1 \quad (2.1)$$

$$\mu_1^+ = v \circ \mu^+ \circ \bar{v}, \quad \omega_{\eta(1)} = v \circ (\omega_x - \omega_x^{(1)}) \circ \bar{v}, \quad \omega_x^{(1)} = 2\bar{v} \circ v^* \quad (2.2)$$

Здесь v_1 – оценка кватерниона ориентации базиса $\eta^{(1)}$ относительно базиса η ; $\omega_{\eta(1)}$ – кватернион абсолютной угловой скорости вращения горизонтального трехгранника $\eta^{(1)}$; $\omega_x^{(1)}$ – кватернион угловой скорости поворота базиса X относительно базиса $\eta^{(1)}$. Индекс (1) у кватернионных констант и коэффициента означает, что на этой ступени ориентации коэффициенты усиления могут быть другими по отношению к первой ступени ориентации, v_1^2 – норма кватерниона; $\bar{v}$ – сопряженный кватернион. Входными воздействиями для второй ступени ориентации являются абсолютные угловые скорости (кватернион $\omega_{\eta(1)}$) моделируемого на первой ступени трехгранника $\eta^{(1)}$, а также кажущиеся ускорения твердого тела, перепроецированные на базис $\eta^{(1)}$, входящие в кватернион μ_1^+ . Уравнения последующих ступеней ориентации имеют такой же вид, что и уравнение (2.1) с заменой в нем индекса у переменных и констант на (2), (3) и т.д. Так, соотношения (2.2) для третьей, четвертой и последующих ступеней ориентации преобразуются к следующему виду:

$$\mu_2^+ = v_1 \circ \mu_1^+ \circ \bar{v}_1; \quad \omega_{\eta(2)} = v_1 \circ (\omega_{\eta(1)} - \omega_{\eta(1)}^{(1)}) \circ \bar{v}_1; \quad \omega_{\eta(1)}^{(1)} = 2\bar{v}_1 \circ v_1^* \quad (2.3)$$

$$\mu_3^+ = v_2 \circ \mu_2^+ \circ \bar{v}_2; \quad \omega_{\eta(3)} = v_2 \circ (\omega_{\eta(2)} - \omega_{\eta(2)}^{(1)}) \circ \bar{v}_2; \quad \omega_{\eta(2)}^{(1)} = 2\bar{v}_2 \circ v_2^* \quad (2.4)$$

$$\mu_4^+ = \dots$$

Изоляция от угловых движений твердого тела осуществляется с помощью соотношений (2.2)–(2.4). Взаимосвязь кватернионов и моделируемых в БЦВУ систем координат $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots$ поясняется следующей условной схемой поворотов:

$$\eta \rightarrow \eta^{(m)} \xrightarrow{v_{m-1}} \eta^{(m-1)} \rightarrow \dots \rightarrow \eta^{(3)} \xrightarrow{v_2} \eta^{(2)} \xrightarrow{v_1} \eta^{(1)} \xrightarrow{v} X \quad (2.5)$$

Нетрудно видеть, что после m -ой ступени ориентации оценка результирующего кватерниона $\mathbf{v}^+$ ориентации будет определяться следующей формулой:

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}_{m-1} \circ \mathbf{v}_{m-2} \circ \dots \circ \mathbf{v}_2 \circ \mathbf{v}_1 \circ \mathbf{v} \quad (2.6)$$

Переход к углам ориентации от кватернионов производится по известным формулам [1].

3. Анализ свойств решений уравнений задачи ориентации. Исследуем устойчивость невозмущенного движения для уравнений (1.5), имея в виду первый вариант формирования кватерниона $\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu}$, являющегося частным решением указанного уравнения. Будем учитывать возмущения начальных условий, в силу чего возмущенное движение определяется кватернионом $\mathbf{v}$, равным $\boldsymbol{\mu} + \mathbf{z}$, где $\mathbf{z}$ – кватернион возмущения. Подставив $\mathbf{v}$ в (1.5), полагая, что $\mathbf{v}^2 - 1 = 0$, после очевидных преобразований получили следующие уравнения возмущенного движения:

$$2\mathbf{z}^* = \mathbf{z} \circ \boldsymbol{\omega}_x - \mathbf{k} \circ \mathbf{z} - \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}^* = \mathbf{l} \circ \mathbf{z} \quad (3.1)$$

Для исследования устойчивости невозмущенного движения воспользуемся вторым методом Ляпунова [8], [11], для чего для $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ – скаляров сформируем следующую знакоположительную квадратичную форму:

$$V = \mathbf{l} \circ \bar{\mathbf{z}} + 0,5 \mathbf{y} \circ \bar{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{l} > 0 \quad (3.2)$$

где $\bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{y}}$ – сопряженные кватернионы. Полная производная по времени от этой формы, вычисленная в силу уравнений (1.5), после простейших преобразований имеет вид:

$$2V^* = -2lk\mathbf{z} \circ \bar{\mathbf{z}} + \mathbf{l} \circ (\bar{\boldsymbol{\omega}}_x \circ \bar{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\omega}_x \circ \bar{\mathbf{z}}) \quad (3.3)$$

Учитывая, что $\boldsymbol{\omega}_x = \Sigma \omega_{x_i} \mathbf{i}_i$, $\bar{\boldsymbol{\omega}}_x = -\boldsymbol{\omega}_x$ [1], убеждаемся в том, что сумма членов в круглой скобке правой части выражения равна нулю. Следовательно, при $\mathbf{k} > 0, \mathbf{l} > 0$ справедливо неравенство:

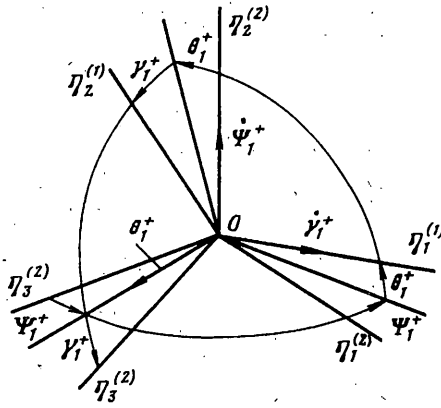
$$V^* = -lk\mathbf{z} \circ \bar{\mathbf{z}} = -lk \circ \sum_{r=0}^3 z_r^2 < 0 \quad (3.4)$$

Нетрудно видеть, что невозмущенное движение устойчиво асимптотически по переменной (кватерниону) $\boldsymbol{\mu}$ в силу выполнения условий соответствующей теоремы Ляпунова [11], и эти условия обеспечены за счет введения в кинематические уравнения корректирующих членов.

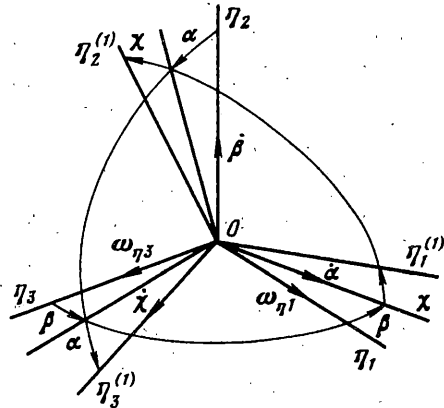
При втором варианте формирования можно говорить об асимптотической устойчивости решения уравнения (1.5) по части компонентов кватерниона ориентации, именно по той, где вводится коррекция. По остальным компонентам наблюдается просто устойчивость невозмущенного движения.

Проанализируем уравнения задачи определения ориентации второй ступени (2.1), записав их в скалярной форме ($\rho^{(1)} = 0$):

$$\begin{aligned} 2\mathbf{v}_{10}^* &= -\mathbf{v}_{11}\omega_{\eta 1}^{(1)} - \mathbf{v}_{12}\omega_{\eta 2}^{(1)} - \mathbf{v}_{13}\omega_{\eta 3}^{(1)} \\ 2\mathbf{v}_{11}^* &= \mathbf{v}_{10}\omega_{\eta 1}^{(1)} + \mathbf{v}_{12}\omega_{\eta 3}^{(1)} - \mathbf{v}_{13}\omega_{\eta 2}^{(1)} + k^{(1)}(M_{11} - 2\mathbf{v}_{11}) + l^{(1)} \int_{t_0}^t (M_{11} - 2\mathbf{v}_{11}) d\tau \\ 2\mathbf{v}_{12}^* &= \mathbf{v}_{10}\omega_{\eta 2}^{(1)} - \mathbf{v}_{11}\omega_{\eta 3}^{(1)} + \mathbf{v}_{13}\omega_{\eta 1}^{(1)} \\ 2\mathbf{v}_{13}^* &= \mathbf{v}_{10}\omega_{\eta 3}^{(1)} + \mathbf{v}_{11}\omega_{\eta 2}^{(1)} - \mathbf{v}_{12}\omega_{\eta 1}^{(1)} + k^{(1)}(M_{13} - 2\mathbf{v}_{13}) + l^{(1)} \int_{t_0}^t (M_{13} - 2\mathbf{v}_{13}) d\tau \\ \mathbf{v}_{10} &= \cos 0,5\psi_1^+ \cos 0,5\theta_1^+ \cos 0,5\gamma_1^+ - \sin 0,5\psi_1^+ \sin 0,5\theta_1^+ \sin 0,5\gamma_1^+ \end{aligned} \quad (3.5)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

$$\begin{aligned}
 v_{11} &= \sin 0,5\psi_1^+ \sin 0,5\theta_1^+ \cos 0,5\gamma_1^+ + \cos 0,5\psi_1^+ \cos 0,5\theta_1^+ \sin 0,5\gamma_1^+ \\
 v_{12} &= \sin 0,5\psi_1^+ \cos 0,5\theta_1^+ \cos 0,5\gamma_1^+ + \cos 0,5\psi_1^+ \sin 0,5\theta_1^+ \sin 0,5\gamma_1^+ \\
 v_{13} &= \cos 0,5\psi_1^+ \sin 0,5\theta_1^+ \cos 0,5\gamma_1^+ - \sin 0,5\psi_1^+ \cos 0,5\theta_1^+ \sin 0,5\gamma_1^+
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Кватернион v_1 соответствует изображенной на фиг. 4 последовательности поворотов базиса $\eta^{(1)}$ относительно $\eta^{(2)}$ на углы ψ_1^+ , θ_1^+ , γ_1^+ . Кватернион M_1 сформирован в соответствии с формулой (1.4). Обозначив малые углы поворотов базиса $\eta^{(1)}$ относительно η , вызванные погрешностями первой ступени ориентации, через α , β , χ (фиг. 5), для параметров движения имеем следующие линейаризованные выражения:

$$v_{10} = 1, v_{11} = 0,5\gamma_1^+, v_{12} = 0,5\psi_1^+, v_{13} = 0,5\theta_1^+, k^{(1)} = k \quad (3.7)$$

$$l^{(1)} = l, \quad \omega_{\eta 1}^{(1)} = \omega_1 + \alpha^*, \quad \omega_{\eta 2}^{(1)} = \omega_2 + \beta^*, \quad \omega_{\eta 3}^{(1)} = \omega_3 + \chi^*, \quad \omega_2 = 0$$

$$W_1^{(1)} = W_1 + g\chi - W_3\beta, \quad W_2 = W_2^{(1)} = g, \quad W_3^{(1)} = W_3 - g\alpha - W_1\beta$$

$$M_{10} = M_{12} = 0, \quad M_{11} = n_{\eta 3}^{(1)} = -W_3^{(1)} / g = \alpha - n_3 - n_1\beta$$

$$M_{13} = n_{\eta 1}^{(1)} = W_1^{(1)} / g = n_1 + \chi - n_3\beta$$

Здесь ω_1 , ω_2 , ω_3 — компоненты вектора абсолютной угловой скорости базиса η по его осям. Индекс (1) для переменных означает их принадлежность к базису $\eta^{(1)}$. Уравнения (3.5) с учетом соотношений (3.7), при сохранении только членов первого порядка малости, преобразуются к следующим скалярным уравнениям, характеризующим малые движения:

$$\psi_1^{+*} = \beta^* \quad (3.8)$$

$$\theta_1^{+*} = \chi^* + \omega_3 + k(\chi + n_1 - \theta_1^+ - n_3\beta) + l \int_{t_0}^t (\chi + n_1 - \theta_1^+ - n_3\beta) d\tau$$

$$\gamma_1^{+*} = \alpha^* + \omega_1 + k(\alpha - n_3 - \gamma_1^+ - n_1\beta) + l \int_{t_0}^t (\alpha - n_3 - \gamma_1^+ - n_1\beta) d\tau$$

Представив решения второго и третьего уравнений системы (3.8) в виде сумм

$\theta_1^+ = \Delta\theta_1^+ + \delta\theta_1^+$, $\gamma_1^+ = \Delta\gamma_1^+ + \delta\gamma_1^+$, запишем данные уравнения в виде двух подсистем:

$$\Delta\theta_1^{+\bullet} + k\Delta\theta_1^+ + l \int_{t_0}^t \Delta\theta_1^+ d\tau = -kn_3\beta - l \int_{t_0}^t n_3\beta d\tau \quad (3.9)$$

$$\Delta\gamma_1^{+\bullet} + k\Delta\gamma_1^+ + l \int_{t_0}^t \Delta\gamma_1^+ d\tau = -kn_1\beta - l \int_{t_0}^t n_1\beta d\tau$$

$$\delta\theta_1^{+\bullet} + k\delta\theta_1^+ + l \int_{t_0}^t \delta\theta_1^+ d\tau = \omega_3 + k(n_1 + \chi) + \chi^\bullet + l \int_{t_0}^t (n_1 + \chi) d\tau \quad (3.10)$$

$$\delta\gamma_1^{+\bullet} + k\delta\gamma_1^+ + l \int_{t_0}^t \delta\gamma_1^+ d\tau = \omega_1 + \alpha^\bullet + k(\alpha - n_3) + l \int_{t_0}^t (\alpha - n_3) d\tau$$

Первое уравнение системы (3.8) имеет устойчивое решение $\psi_1^+ = \beta(t) + \text{const}$, где $\text{const} = \psi_1^+(t_0) - \beta(t_0)$, получаемое его интегрированием независимо от двух других уравнений. Отсюда следует, что правые части уравнений (3.9) есть функции времени. Частные решения этих уравнений, определяемые видом правых частей, устойчивы асимптотически при $k > 0$, $l > 0$. Аналогичным свойством обладают частные решения уравнений (3.10), определяемые видом их правых частей. Нетрудно видеть, что для систем (3.8), (3.9), (3.10) могут быть выполнены условия Шулера; имея в виду $V_j^* = W_j$; $\omega_3 = -V_1/R$; $\omega_1 = V_3/R$ (R – радиус Земли) и задав $l = g/R = \Omega^2$, где Ω – частота Шулера, обеспечиваем выполнение условий инвариантности к действию линейных ускорений. При отключении позиционной коррекции, то есть при $k = 0$ имеем:

$$\delta\theta_1^{+\bullet} + \Omega^2 \int_{t_0}^t \delta\theta_1^+ d\tau = \chi^\bullet + \Omega^2 \int_{t_0}^t \chi d\tau, \quad \delta\gamma_1^{+\bullet} + \Omega^2 \int_{t_0}^t \delta\gamma_1^+ d\tau = \alpha^\bullet + \Omega^2 \int_{t_0}^t \alpha d\tau \quad (3.11)$$

При точном задании начальных условий, когда $\delta\theta_1^+(t_0) = \chi(t_0)$, $\delta\gamma_1^+(t_0) = \alpha(t_0)$, решения для (3.11) равны

$$\delta\theta_1^+ = \chi(t), \quad \delta\gamma_1^+ = \alpha(t)$$

Итак, при выполнении условий Шулера решения уравнений (3.8) можно представить следующим образом:

$$(a) \quad \psi_1^+ = \beta(t) + \text{const}, \quad \theta_1^+ = \chi(t) + \Delta\theta_1^+(t), \quad \gamma_1^+ = \alpha(t) + \Delta\gamma_1^+(t)$$

$$\alpha = -\Delta\gamma \cos \psi \cos \theta - \Delta\theta \sin \psi, \quad \beta = -\Delta\psi - \Delta\gamma \sin \theta$$

$$(b) \quad \chi = -\Delta\theta \cos \psi + \Delta\gamma \cos \theta \sin \psi \quad (3.12)$$

то есть решения уравнений первого приближения для второй ступени ориентации, при выполнении в них условий Шулера и при отсутствии позиционной коррекции, состоят из погрешностей первой ступени ориентации и добавок, обусловленных перекрестными линейными ускорениями. Обобщая, относительно решения полных уравнений второй ступени ориентации можно утверждать, что они состоят из погрешностей первой ступени ориентации и добавок, характеризующих погрешности второй ступени ориентации от перекрестных связей и от нелинейных членов уравнений. В этом случае добавки $\Delta\theta_1^+$, $\Delta\gamma_1^+$, и теперь $\Delta\psi_1^+ \neq 0$ в (3.12) трактуются шире, чем те, которые определяются путем интегрирования уравнений (3.9).

На основании соотношений (2.5), (2.6) после двух ступеней ориентации кватернион результирующей ориентации ν_2^+ представляется в виде:

$$\nu_2^+ = \nu_1 \circ \nu \quad (3.13)$$

Для выявления компонентов кватерниона ν представим следующую условную схему поворотов трехгранников:

$$\eta^{(1)} \xrightarrow{\nu} X \sim \eta^{(1)} \xrightarrow{\Delta \bar{\nu}} \eta \xrightarrow{\mu} X \quad (3.14)$$

где $\Delta \bar{\nu}$ – сопряженный кватернион погрешности первой ступени ориентации, соответствующий углам $-\alpha, -\beta, -\chi$. Согласно (3.14) имеем

$$\nu = \Delta \bar{\nu} \circ \mu \quad (3.15)$$

Углом $\psi_1^+, \theta_1^+, \gamma_1^+$ ставится в соответствие кватернион ν_1 , причем с учетом (3.12) и по аналогии с (3.15) его можно представить следующим образом:

$$\nu_1 = \Delta \bar{\nu}_1 \circ \delta \nu_1 \quad (3.16)$$

где кватернион $\Delta \nu_1$ соответствует углам $\Delta \psi_1^+, \Delta \theta_1^+, \Delta \gamma_1^+$, а кватернион $\delta \nu_1$ – углам α, β, χ согласно решению (3.11). Подставив (3.15) и (3.16) в формулу (3.13), получим

$$\nu_2^+ = \Delta \bar{\nu}_1 \circ \delta \nu_1 \circ \Delta \bar{\nu}_1 \circ \mu = \Delta \bar{\nu}_1 \circ \mu \quad (3.17)$$

т.к. на основе вышеизложенного $\delta \nu_1 = \Delta \bar{\nu}$. Судя по формуле (3.17), кватернион $\Delta \bar{\nu}_1$ является сопряженным по отношению к кватерниону $\Delta \nu_1$ перехода от базиса η к базису $\eta^{(2)}$. На основе (3.17) уравнения первого приближения третьей ступени ориентации отличаются от уравнений второй ступени ориентации только индексами углов: вместо $\psi_1^+, \theta_1^+, \gamma_1^+, \alpha, \beta, \chi$ в уравнениях третьей степени ориентации фигурируют $\psi_2^+, \theta_2^+, \gamma_2^+, \alpha_1, \beta_1, \chi_1$.

Учитывая идентичность уравнений второй и третьей ступеней ориентации, заключаем, что при выполнении условий Шулера, при отсутствии позиционной коррекции и точном задании начальных условий решениям уравнений третьей ступени ориентации ставится в однозначное соответствие кватернион:

$$\nu_2 = \Delta \bar{\nu}_2 \circ \delta \nu_2 \quad (3.18)$$

а результирующий кватернион после третьей ступени ориентации приобретает вид:

$$\nu_3^+ = \nu_2 \circ \nu_1 \circ \nu = \Delta \bar{\nu}_2 \circ \mu \quad (3.19)$$

Произведя выкладки, аналогичные проделанным выше, получаем для m -ой ступени ориентации:

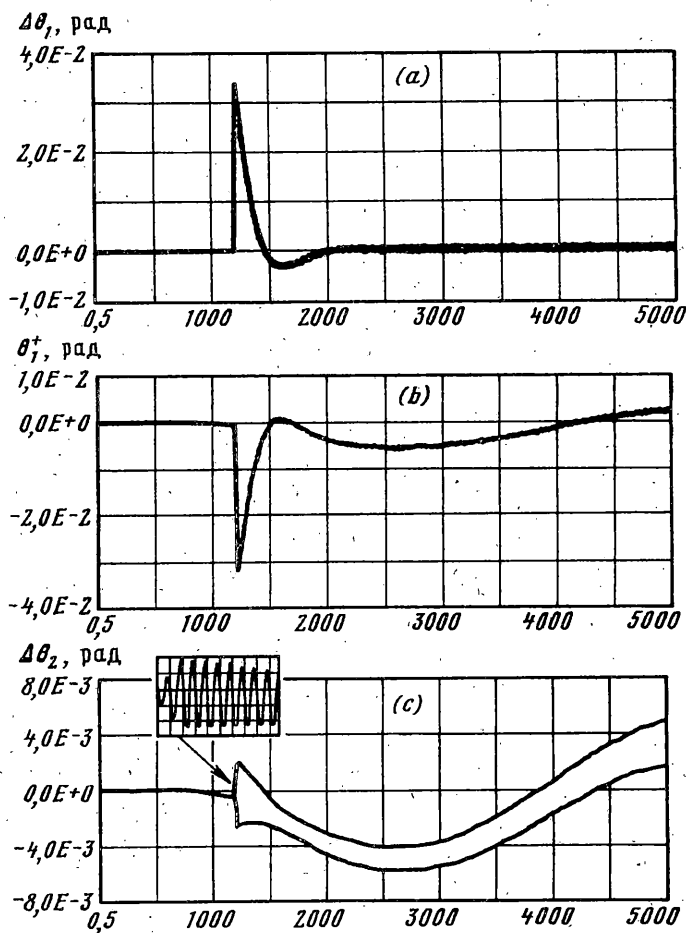
$$\nu_m^+ = \Delta \bar{\nu}_{m-1} \circ \mu \quad (m = 2, 3, 4 \dots) \quad (3.20)$$

Кватернион $\Delta \nu_{m-1}$ характеризует поворот базиса $\eta^{(m-1)}$ по отношению к базису η . Вид формул (3.20) свидетельствует о том, что на точность определения результирующего кватерниона ориентации после m -й ступени влияют погрешности только этой ступени, погрешности предыдущих ступеней компенсируются.

В связи с тем, что $\Delta \nu_m = \Delta \nu_m (\Delta \psi_m^+, \Delta \theta_m^+, \Delta \gamma_m^+, \dots)$, при $|\Delta \theta_m^+| < |\Delta \theta_{m-1}^+|$, $|\Delta \gamma_m^+| < |\Delta \gamma_{m-1}^+|$, $|\Delta \psi_m^+| < |\Delta \psi_{m-1}^+|$ усматривается следующая асимптотика решений:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta \nu_m = 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \nu_m^+ = \mu \quad (3.21)$$

4. Построение уравнений определения координат местоположения объекта. Фигурирующие в выражениях (2.3), (2.4) угловые скорости $\omega_{\eta(2)}, \omega_{\eta(3)}, \dots$ являются кватер-



Фиг. 6

нионами абсолютных угловых скоростей вращений моделирующих в БЦВУ горизонтных трехгранников $\eta^{(2)}, \eta^{(3)}, \dots$. Выше показано, что чем больше m , тем точнее базис $\eta^{(m)}$ моделирует η . Следовательно, базис $\eta^{(m)}$ аналогичен базису $\chi_{\text{уз}}$ в [10, с. 462]. Это означает, что навигационная задача решается по уравнениями, изложенным в [10] для углов Эйлера – Крылова, в [5], [8] – для параметров Родрига-Гамильтона, в [5], [6] – для кватернионов. В данном случае решению навигационной задачи соответствует кватернионное уравнение [2], [5], [6]:

$$2\dot{\epsilon}^{+*} = \epsilon^{+*} \omega_{\eta^{(m)}}, \quad t = t_0, \quad \epsilon^{+*}(t_0) = \epsilon_0 \quad (4.1)$$

Свойства решений этих или им аналогичных уравнений исчерпывающие изложены в [5], [8], [10] и других трудах, посвященных теории полуаналитических инерциальных навигационных систем.

5. Пример. Произведено математическое моделирование работы первой и второй ступеней БИСО по уравнениям (1.5), (1.6), (1.8), (1.9), (1.10) и (2.2), (3.5), (3.6), (1.4) соответственно. Начальные условия для обеих ступеней $\nu(t_0) = \nu_1(t_0) = 1$. Кватернион результирующей ориентации определялся по формуле $\nu^{+} = \nu_1 \circ \nu$; оценки углов ориентации ψ_i^{+} , θ_i^{+} , γ_i^{+} ($i = 1, 2$), вычислялись на основе соотношений (1.7) по тригонометрическим формулам [1], [6]. Погрешности оценивания углов после первой и

второй ступеней ориентации определялись по формулам: $\Delta\psi_i = \psi_{i-1}^+ - \psi$; $\Delta\theta_i = \theta_{i-1}^+ - \theta$; $\Delta\gamma_i = \gamma_{i-1}^+ - \gamma$ ($i = 1, 2$) (для первой ступени для углов ориентации нижний 0 не пишем). Движение центра масс твердого тела задавалось в географической системе координат $o\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ (ось $o\zeta_1$ направлена на север, ось $o\zeta_2$ – вверх по вертикали места) следующим образом: $t = 0...1000$ с – твердое тело неподвижно относительно Земли ($\varphi = 45^\circ$), $t = 1000...5000$ с – твердое тело совершает качку: $\psi = 0,2E \sin(\pi t + 0,5\pi)$, $\theta = 0,1E \sin \pi t$, $\gamma = 0,1E \sin \pi t$, $E = \exp(-0,1(t - 600))$; $t = 1200...1220$ с – равноускоренное движение $\dot{V}_{\zeta_1} = 20$ м/с², затем – с постоянной скоростью. С момента включения БИСО и до $t = 600$ с коэффициенты передачи коррекции были заданы равными: $k = 0,01$ с⁻¹; $l = 0,5 \cdot 10^{-4}$ с⁻²; $k^{(1)} = 1,5 \cdot 10^{-2}$ с⁻¹; $l^{(1)} = 1,25 \cdot 10^{-4}$ с⁻². От $t = 600$ с и до конца моделирования для второй ступени ориентации оставлена только интегральная коррекция с выполнением в ней условий Шулера: $k^{(1)} = 0$; $l^{(1)} = (1,24 \cdot 10^{-3})$ с⁻². Коэффициенты передачи для первой ступени ориентации оставлены неизменными. Погрешности коэффициентов передачи ГИУС и ТИКУ были заданы равными 10⁻³%, дрейф нуля в ГИУС $0,5 \cdot 10^{-7}$ с⁻¹, с разными знаками по компонентам скорости, сдвиги нулей ТИКУ 10^{-3} м/с² с разными знаками по компонентам ускорения.

На фиг. 6, *a* представлен график изменения во времени погрешности оценки угла тангажа после первой ступени ориентации, на фиг. 6, *b* – график изменения во времени оценки угла второй ступени ориентации, на фиг. 6, *c* – суммарная погрешность оценки угла тангажа после двух ступеней ориентации. Из фиг. 6, *a* следует, что максимальная погрешность $\Delta\theta = 3,4 \cdot 10^{-2}$ рад. Оценка угла для второй ступени ориентации, как видно из фиг. 6, *b*, для этого же промежутка времени равна $\approx -3,3 \cdot 10^{-2}$ рад, и этот результат согласуется с теорией, определяемой формулами (3.12, *a, b*). Как следствие, в соответствии с теорией, суммарная погрешность после двух ступеней ориентации не превосходит значения $4,5 \cdot 10^{-3}$ рад., что в восемь раз меньше погрешности первой ступени ориентации. На фиг. 6, *b* прослеживаются колебания с периодом Шулера, а на начальном участке асимптотически устойчивые движения. Аналогичный качественный результат получен для угла крена, суммарная погрешность после второй ступени ориентации снижена вдвое по сравнению с первой; по углу рыскания погрешность снижена с $-3 \cdot 10^{-2}$ рад. до $-3,5 \cdot 10^{-3}$ рад. после второй ступени ориентации. Результаты моделирования подтверждают полученные в статье теоретические результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
3. Плотников П.К., Сергеев А.Н., Челноков Ю.Н. Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 1991. № 5. С. 9–18.
4. Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И. Задача коррекции в инерциальной навигации. М.: Изд-во МГУ, 1982. 175 с.
5. Климов Д.М. Инерциальная навигация на море. М.: Наука, 1984. 117 с.
6. Челноков Ю.Н. Определение местоположения и ориентации подвижных объектов по показаниям чувствительных элементов БИНС посредством решения на бортовом вычислителе кватернионных уравнений движения гироскопических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 3–12.
7. Ривкин С.С., Берман З.М., Окон И.М. Определение параметров ориентации объекта бесплатформенной инерциальной системой. СПб: ЦНИИ Электроприбор, 1996. 226 с.

8. Бойчук О.Ф., Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А. Построение функций Ляпунова для совокупности уравнений основной задачи инерциальной навигации // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 5. С. 13–18.
9. Плотников П.К., Лючев С.А. Об устойчивости алгоритмов определения углов поворотов объекта по сигналам гироскопической бесплатформенной системы ориентации // Изв. вузов. Приборостроение. 1991. Т. 34. № 10. С. 62–68.
10. Ишлинский А.Ю. Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 483 с.
11. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 531 с.

Саратов

Поступила в редакцию
10.01.1997