

УДК 531.36

© 1999 г. В.Ф. ИВАНОВА, Б.Н. СОКОЛОВ

## МАКСИМАЛЬНАЯ ГАРАНТИРОВАННАЯ ТОЧНОСТЬ РЕЛЕЙНОГО РЕГУЛЯТОРА В ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ

Рассматривается задача нахождения при наилучшей ограниченной помехе оптимального релейного управления одномерной динамической моделью, применимой, в частности, к стабилизации углового движения космических аппаратов с помощью релейных реактивных двигателей с запаздыванием отключения тяги. С использованием метода фазовой плоскости и подходов из теории дифференциальных игр [1–3] исследуется вопрос о возможности перевода системы из произвольного начального состояния в режим с абсолютной минимальной (по всем начальным положениям и рассматриваемым управлениям) гарантированной погрешностью стабилизации. Решение приводится для некоторой области в пространстве параметров указанной задачи.

В [4–6] были рассмотрены релейные законы управления, которые могут быть эффективно применены для стабилизации движения. В [3] изучены игровые задачи динамики при наличии ограниченной помехи, но без запаздывания управления. Результаты исследования некоторых минимаксных задач с запаздыванием управления, полученные ранее авторами данной статьи, приведены в [7, с. 253–270]. В частности, там содержится решение упрощенного варианта проблемы, рассматриваемой в данной статье.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = v, & x(t_0) = x_0, & v(t_0) = v_0, & t \geq t_0 \\ \dot{v} = u + F + \varepsilon, & F = \text{const}, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 = \text{const} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$(a) \quad u = \{0; \pm u_0\}, \quad u_0 = \text{const} > 0$$

$$(b) \quad |F| + \varepsilon_0 < u_0$$

где  $u$  – релейное управление,  $\varepsilon$  – ограниченная случайная помеха.

Если в некоторый момент  $t_\alpha$  произошло включение одного из ненулевых значений управления, то следующий момент  $t_\beta$  переключения на любое другое значение подчиняется неравенству

$$(c) \quad t_\beta - t_\alpha \geq \Delta t = \text{const} > 0$$

Требуется выбором алгоритма управления (a), (c) обеспечить переход системы (1.1) в режим наилучшей гарантированной стабилизации нулевого положения  $x = 0$  при всевозможных реализациях помехи  $\varepsilon(t)$ ,  $t \geq t_0$ .

Подобные задачи возникают, в частности, при построении алгоритма управления ориентацией космических объектов, стабилизируемых на орбите около программного квазистационарного углового положения. Конструкция реактивных двигателей системы ориентации такова, что отключение тяги может произойти не раньше, чем через время  $\Delta t$  после ее включения. При этом можно считать, что ограничений на момент включения нет, т.е. время выхода тяги на стационарный режим пренебрежимо

мало по сравнению с  $\Delta t$ . Применимость одноканальной модели обусловлена малостью отклонения от программы параметров углового движения [4], что делает возможным проведение декомпозиции [8, 9] исходных уравнений углового движения на линейные модели второго порядка вида (1.1), где фазовая переменная  $x$  – одно из угловых отклонений,  $F$  – известное квазистационарное воздействие, которое можно считать постоянным на некотором рассматриваемом промежутке времени.

Представленная выше задача оптимальной гарантированной стабилизации (1.1), (a) – (c) зависит от четырех параметров  $u_0, \Delta t, F, \varepsilon_0$ . Сведем ее к безразмерной задаче, имеющей фиксированные характеристики управления  $u'_0 = 1$  и  $\Delta t' = 1$  и зависящей только от двух параметров внешних воздействий  $F'$  и  $\varepsilon'_0$ , причем  $F' \geq 0$ . Для этого произведем замену величин

$$t' = \Delta t^{-1} t, \quad t'_0 = \Delta t^{-1} t_0, \quad x' = I(u_0 \Delta t^2)^{-1} x, \quad x'_0 = I(u_0 \Delta t^2)^{-1} x_0$$

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = I(u_0 \Delta t)^{-1} v, \quad v'_0 = I(u_0 \Delta t)^{-1} v_0$$

$$u' = I u_0^{-1} u, \quad \varepsilon' = I u_0^{-1} \varepsilon, \quad \varepsilon'_0 = u_0^{-1} \varepsilon_0, \quad F' = I u_0^{-1} F$$

$$I = 1 \text{ при } F \geq 0; \quad I = -1 \text{ при } F < 0.$$

Соотношения (1.1), (a) – (c) после замены отличаются от первоначальных лишь штрихами над всеми величинами. Далее штрихи будем опускать. Таким образом, будем рассматривать безразмерную систему (1.1) с условиями

$$u = \{0; \pm 1\} \tag{1.2}$$

$$F + \varepsilon_0 < 1; \quad F \geq 0 \tag{1.3}$$

$$t_\beta - t_\alpha \geq 1 \tag{1.4}$$

где  $t_\alpha, t_\beta$  – безразмерные моменты времени, определение которых дано в пояснении к соотношению (c).

Введем обозначения  $z = (x, v)$ ,  $z_0 = z(t_0)$ ;  $\tau$  – безразмерное время, прошедшее с момента  $t_\alpha = t - \tau$  последнего переключения управления в прошлом;  $n = u(t - \tau) = \{0; \pm 1\}$  – индекс, который определяет значение управления, установившееся в момент  $t_\alpha$  в результате переключения;  $y = (z, \tau, n)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ .

Назовем допустимым любой алгоритм управления  $u(\cdot)$ , удовлетворяющий условиям (1.2), (1.4). Возмущение  $\varepsilon$  можно рассматривать как игрока, стремящегося максимизировать погрешность стабилизации. Эффективность допустимого управления выразим с помощью функционала

$$K[y_0, u(\cdot)] = \sup_\varepsilon \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |x[t, y_0, u(\cdot), \varepsilon(\cdot)]| \tag{1.5}$$

где предел берется верхний, точки в записи  $u(\cdot), \varepsilon(\cdot)$  означают, что рассматривается зависимость от управления как от алгоритма и от помехи как от реализации  $\varepsilon(t)$ ,  $t \geq t_0$ . Ценой игры будет функция  $J(y_0) = \inf_u K[y_0, u(\cdot)]$  – максимальная гарантированная точность.

Сформулируем задачу.

**Задача А.** Пусть начальное положение  $y_0$  фиксировано. Требуется минимизировать функционал (1.5) на множестве допустимых управлений.

На основании (1.1) – (1.5) можно заключить [1], что текущее состояние системы в задаче А определяется только вектором  $y$ , т.е. при решении задачи А нельзя достичь более высокой эффективности (1.5), чем при решении следующей задачи, поставленной на множестве управлений вида  $u = u(y)$ .

**Задача 1.** Требуется найти управление, минимизирующее функционал (1.5) сразу

при всех значениях  $y_0$ , в классе  $D$  позиционных допустимых алгоритмов  $u = u(y)$ , определенных на всем фазовом пространстве  $y$ .

Отметим, между прочим, что все приведенные ниже рассуждения и соотношения не изменятся, если расширить класс  $D$  до множества произвольных допустимых управлений  $u(\cdot)$ .

Введем обозначения  $m = \inf J(y_0)$  – абсолютная максимальная гарантированная точность,  $X = \{(y_0, u)\}$  – декартово произведение фазового пространства  $\{y\}$  на множество  $D$ ,  $Y_1 = \{y: \tau < 1, n = \pm 1\}$ ,  $Y = \{y\} \setminus Y_1$ .

Заметим, что условие (1.4) эквивалентно равенству  $u(z, \tau, n) = n$  в области  $Y_1$ . Поэтому во всех дальнейших построениях конкретные алгоритмы управления задаются только для оставшейся части  $Y$  фазового пространства.

Наряду с задачей 1 будем рассматривать также следующую.

**Задача 2.** Минимизировать функционал (1.5) на множестве  $X$ . Определить значение  $m$ .

Разделим множество  $X$  на два подмножества  $X_{10}$  и  $X_1 = X \setminus X_{10}$ , где класс  $X_{10}$  определяется следующим условием. На любой траектории  $y = y(t)$ , соответствующей элементу  $w = (y_0, u)$  из  $X_{10}$ , реализуется зависимость  $u = u(t)$  такая, что  $u(t) = \{0; -1\}$  начиная с некоторого момента  $T(w) < \infty$ .

Введем обозначения  $X_0$  – подмножество класса  $X_{10}$ , на котором  $T(w) = t_0$ ;  $m_{01} = \inf K(w)$  на  $X_{10}$ ,  $m_0 = \inf K(w)$  на  $X_0$ ,  $m_1 = \inf K(w)$  на  $X_1$ .

Совокупность траекторий, соответствующих некоторому элементу из  $X$  при всевозможных помехах, будем называть трубкой.

Если на траектории  $y(t)$ , порожденной элементом  $w = (y_0, u)$  из  $X_{10}$ , взять точку  $y_1$ , соответствующую моменту  $t_1 > T(w)$ , и рассмотреть продолжения кривой  $y(t)$  на интервале  $t \geq t_1$  при всевозможных помехах, то получится трубка с началом  $y_1$ , в которой  $u = \{0; -1\}$ , т.е. соответствующая элементу из  $X_0$ . Поэтому, с учетом свойства  $X_0 \subset X_{10}$ , имеет место равенство  $m_0 = m_{10}$ . Следовательно

$$m = \min(m_0, m_1) \quad (1.6)$$

и задача 2 распадается на следующие две независимые задачи.

**Задача 2.0 (2.1).** Минимизировать функционал (1.5) на множестве  $X_0 (X_1)$ . Определить значение  $m_0 (m_1)$ .

**2. Оптимальная стабилизация при отсутствии помехи.** Рассмотрим задачи 1 и 2 в случае  $\varepsilon_0 = 0$ .

Прежде всего решим задачу 2 без помехи.

Будем для краткости называть участок траектории с управлением  $u(t) = \text{const} = \{0; \pm 1\}$  между двумя моментами переключения положительным, отрицательным или нулевым участком соответственно.

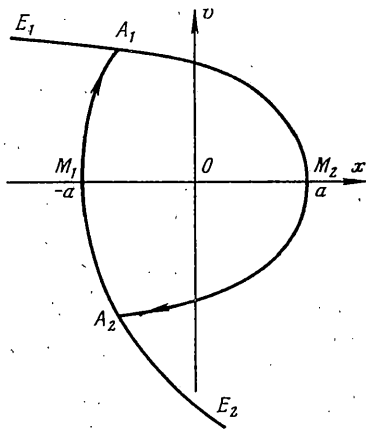
Под траекториями будем в дальнейшем понимать как кривые  $y(t) = \{z(t), \tau(t), n(t)\}$ , так и их проекции  $\dot{z}(t)$ , в зависимости от контекста.

На плоскости  $z$  построим две замкнутые траектории системы (1.1) – контур  $M_1A_1M_2A_2$  из нулевого и отрицательного участков (фиг. 1), являющихся параболами  $\ddot{x} = F$  и  $\ddot{x} = -1 + F$  с вершинами  $M_1(-a, 0)$  и  $M_2(a, 0)$ , и контур  $N_1C_1N_2C_2$  из положительного и отрицательного участков (фиг. 2), являющихся параболами  $\ddot{x} = 1 + F$  и  $\ddot{x} = -1 + F$  с вершинами  $N_1(-b, 0)$  и  $N_2(b, 0)$ . При этом пусть время движения  $\dot{x} = -1 + F$  по дуге  $A_1M_2A_2$  и время движения  $\dot{x} = 1 + F$  по дуге  $C_2N_1C_1$  равняются 1, т.е. выходят на ограничение (1.4).

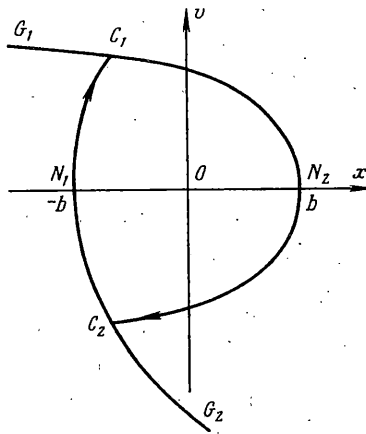
Имеют место соотношения

$$a = (1-F)F^{-1}/16, \quad b = (1+F)(1-F)^{-1}/8 \quad (2.1)$$

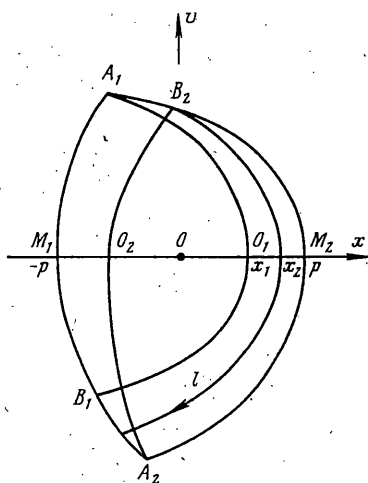
Из построения контуров следуют равенства  $a = m_0$ ,  $b = m_1$ . Действительно, пред-



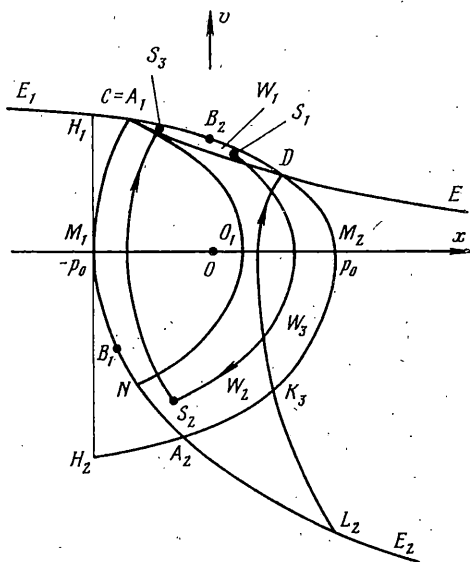
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

положим, что  $m_1 < b$ . Тогда существует такой элемент класса  $X_1$ , что соответствующая траектория начиная с некоторого момента времени содержится внутри полосы  $|x| < b$ . Следовательно, при  $t \geq t_1, t_1 < \infty$ , траектория будет находиться внутри контура  $N_1 C_1 N_2 C_2$  и содержать положительные участки. Но это невозможно, т.к. в силу (1.4) любой положительный участок с началом в указанной области пересекает контур. Аналогично докажем равенство  $a = m_0$ , рассматривая класс  $X_0$  вместо  $X_1$  и отрицательные участки вместо положительных.

Поэтому в силу (1.6)  $m = \min(a, b)$ .

Отметим, что согласно формулам (2.1): 1)  $a(F \rightarrow 0) = \infty, b(F = 0) = 1/8$ ; 2)  $a = b = (1 + \sqrt{5})/16$  при  $F = \sqrt{5} - 2$ ; 3)  $a(F \rightarrow 1) = 0, b(F \rightarrow 1) = \infty$ .

Итак, задача 2 при  $\epsilon_0 = 0$  решена.

Рассмотрим теперь задачу 1 без помехи.

Введем индексы  $i = \{1; 2\}, j = \{1; 2\}, i \neq j$ . Нетрудно убедиться, что существует

допустимый алгоритм управления  $u^0(y)$ , обеспечивающий выполнение равенства  $K(y_0, u^0) = J(y_0) = m$  для любого начального условия  $y_0$ . Действительно, рассмотрим сперва случай  $m = b$ . Пусть при условии  $y \in Y$  управление задано формулой  $u(z, n) = \{1, z$  левее линии  $G_1C_1N_1C_2G_2$  или  $z \in C_1N_1C_2G_2$ ;  $-1, z$  правее линии  $G_1C_1N_2C_2G_2$  или  $z \in C_2N_2C_1G_1$ ;  $n, z$  внутри контура  $N_1C_1N_2C_2\}$  (фиг. 2). Тогда сначала система будет приведена в состояние ( $z \in C_iG_i, i = 1, 2, \tau \geq 1$ ), а затем придет к движению по минимальному контуру  $N_1C_1N_2C_2$ . В случае  $m = a$  алгоритм строится аналогично с линиями переключения  $A_iM_iA_jE_j$  вместо  $C_iN_iC_jG_j$  и заменой значения  $u = 1$  на  $u = 0$  (фиг. 1).

**3. Абсолютная максимальная гарантированная точность при наличии помехи.** Пусть  $\varepsilon_0 > 0$ . Задача 2.1 далее в статье рассматриваться не будет. Рассмотрим задачу 2.0 при

$$0 < \varepsilon_0 < F \quad (3.1)$$

и затем укажем некоторую область в пространстве параметров  $(F, \varepsilon_0)$ , для которой решения задачи 2.0 в соответствии с равенством (1.6) являются решениями задачи 2.

*Замечание 3.1.* Очевидно, что  $m_0 = \infty$  в случае  $\varepsilon_0 \geq F, \varepsilon_0 > 0$ . Действительно, из последних неравенств и соотношений (1.1), (1.3), (1.4) следует, что для любого элемента  $(y_0, u)$  из  $X_0$  при помехе  $\varepsilon(v \geq 0) = \varepsilon_0, \varepsilon(v < 0) = -\varepsilon_0$  решение  $x(t)$  системы (1.1) будет либо бесконечно возрастать, либо, после перехода траектории в область  $v < 0$ , бесконечно убывать.

Построим контуры, состоящие из параболических траекторий (1.1) с управлением  $u = \{0; -1\}$  (фиг. 3); точки пересечения которых друг с другом и с осью  $Ox$  обозначены через  $A_i, B_i, O_i (i = 1, 2), M_1(-p, 0), M_2(p, 0)$ . Внешний контур  $M_1A_1M_2A_2$  соответствует помехе

$$\varepsilon(v) = \varepsilon_0 \operatorname{sign} v \quad (3.2)$$

а внутренние линии  $A_iO_iB_i$  – помехе

$$\varepsilon(v) = -\varepsilon_0 \operatorname{sign} v \quad (3.3)$$

Таким образом, линии  $A_2M_1A_1$  и  $A_1O_1B_1$  являются траекториями, максимально отклоняющимися влево, а  $A_1M_2A_2$  и  $A_2O_2B_2$  – вправо.

*Лемма 3.1.* На плоскости  $z$  рассмотрим множество  $V$  траекторий, выходящих из точки  $z$  и соответствующих одному постоянному ненулевому значению управления  $u(t) = \operatorname{const} = \pm 1$  при всевозможных помехах. Пусть любая траектория из  $V$  попадает на монотонно убывающую кривую  $v = v(x)$ . Тогда время движения от  $z$  до  $v = v(x)$  достигает минимума при помехе  $\varepsilon(t) = \operatorname{const} = \varepsilon_0 \operatorname{sign} u$ .

*Доказательство* основано на условии монотонности кривой  $v(x)$  и свойстве: для двух траекторий  $\dot{x} = v_1(x)$  и  $\dot{x} = v_2(x), 0 < v_1(x) < v_2(x), x_1 \leq x \leq x_2$ , время движения по  $\dot{x} = v_2(x)$  меньше, чем по  $\dot{x} = v_1(x)$ .

Лемма доказана.

Введем обозначения  $t_1[p, z, \varepsilon(\cdot)]$  – время движения в области  $M_1A_1M_2A_2$  ширины  $2p$  от точки  $z$  на дуге  $A_1B_2$  до дуги  $A_2B_1$  с управлением  $u(t) = -1$  и помехой  $\varepsilon(\cdot)$ ;  $t_*(p) = \min_{z, \varepsilon} t_1[p, z, \varepsilon(\cdot)], z$  на дуге  $A_1B_2$ .

*Лемма 3.2.* Имеет место равенство

$$t_*(p) = \min\{t_1[p, B_2, \varepsilon(t) = -\varepsilon_0], t_1[p, A_1, \varepsilon(t) = -\varepsilon_0]\}$$

*Доказательство.* Пусть значение  $p$  фиксировано.

Введем обозначения  $l$  – траектория  $\ddot{x} = -1 + F - \varepsilon_0$  с началом в  $B_2$  (фиг. 3);  $x_1$  –

абсцисса точки  $O_1$ ;  $x_2$  – абсцисса точки пересечения  $l$  с  $Ox$ ;  $t_2(x)$  – время движения  $\ddot{x} = -1 + F - \varepsilon_0$  от  $A_1B_2$  до  $A_2B_1$  через точку  $x$  на оси  $Ox$ .

Из леммы 3.1 следует, что для определения искомого минимума  $t_*$  достаточно найти значение  $\min t_2(x)$ ,  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Функция  $t_2(x)$  имеет свойство  $t_2''(x) < 0$ . Поэтому  $t_* = \min[t_2(x_1), t_2(x_2)]$ .

Лемма доказана.

Выпишем формулы для значений  $t_2(x_1)$ ,  $t_2(x_2)$ :

$$t_2(x_1) = \sqrt{p} \kappa_1(F, \varepsilon_0), \quad t_2(x_2) = \sqrt{p} \kappa_2(F, \varepsilon_0), \quad t_*(p) = \sqrt{p} \min(\kappa_1, \kappa_2) \quad (3.4)$$

$$\kappa_1 = 2(1 - F + \varepsilon_0)^{-1} \sqrt{1 - F - \varepsilon_0} \left[ \sqrt{(F - \varepsilon_0)(1 + 2\varepsilon_0)} + \sqrt{F + \varepsilon_0} \right]$$

$$\kappa_2 = \frac{2\sqrt{1 - F - \varepsilon_0}}{(1 - F + \varepsilon_0)} \left[ 1 - 2\varepsilon_0 \frac{(1 - F - \varepsilon_0)}{(F + \varepsilon_0)(1 - 2\varepsilon_0)} \right]^{1/2} \times \left\{ \sqrt{(F - \varepsilon_0)(1 + 2\varepsilon_0)} + \sqrt{F + \varepsilon_0} \left[ 1 + \right. \right. \\ \left. \left. + 4\varepsilon_0 \frac{(F - \varepsilon_0)(1 - F + \varepsilon_0)}{(F + \varepsilon_0)(1 - F - \varepsilon_0)} \right]^{1/2} \right\}$$

Отметим, что при любом фиксированном значении  $F \geq 1/2$  имеют место соотношения  $\kappa_1(\varepsilon_0 \rightarrow 0) > \kappa_2(\varepsilon_0 \rightarrow 0)$ ,  $\kappa_1(\varepsilon_0 \rightarrow 1 - F) < \kappa_2(\varepsilon_0 \rightarrow 1 - F)$ .

*Определение.*  $U_0(p)$  – подмножество класса  $X_0$ , состоящее из всех таких элементов, что все порожденные ими траектории содержатся в области  $M_1A_1M_2A_2$  ширины  $2p$ .

Обозначим через  $p_0$  корень уравнения  $t_*(p) = \Delta t = 1$ . Из (3.4) следует формула

$$p_0 = [\min(\kappa_1, \kappa_2)]^{-2} \quad (3.5)$$

Далее везде относительно контура  $M_1A_1M_2A_2$  будем полагать  $p = p_0$ .

*Замечание 3.2.* Множество  $U_0(p_0)$  не пусто. Действительно, в силу леммы 3.2 и равенства  $t_*(p_0) = 1$ , это множество содержит элемент  $(y_0, u)$ , где  $z_0 \in A_1B_2 \cup A_2B_1$ ,  $\tau_0 \geq 1$ ,  $n_0$  – любое; в области  $Y$   $u(y) = \{0, z \in A_2B_1; -1, z \in A_1B_2; n, z \notin A_1B_2 \cup A_2B_1\}$ .

Проведем линию  $CDE$  такую, что из любой ее точки траектория  $\ddot{x} = -1 + F - \varepsilon_0$  достигает параболической ветви  $M_1A_2E_2$  за время  $\Delta t = 1$  (фиг. 4). Эта кривая совпадает с параболой  $M_1A_2E_2$  при параллельном сдвиге. В силу леммы 3.2 точка  $D$  пересечения с  $A_1B_2M_2$  совпадает с  $B_2$  при  $\kappa_2 \leq \kappa_1$  или находится ниже  $B_2$  при  $\kappa_2 > \kappa_1$ , а точка  $C$  в этих двух случаях соответственно расположена на дуге  $M_1A_1$  или совпадает с  $A_1$  (фиг. 4,5).

*Замечание 3.3.* Согласно лемме 3.1 при любой помехе время движения по траектории  $\ddot{x} = -1 + F + \varepsilon$  от  $CDE$  до  $M_1A_2E_2$  будет не меньше  $\Delta t = 1$ .

Введем обозначения  $W_1$  – криволинейная фигура  $A_1B_2DC$ ;  $W_2$  – подмножество, остающееся от области  $M_1A_1M_2A_2$  после отбрасывания  $W_3$ ;  $W_3$  – те точки, из которых траектория  $\ddot{x} = F + \varepsilon$  при помехе (3.3) не попадает в  $W_1$  (фиг. 4).

*Лемма 3.3* (следует из построения и замечания 3.3). Элемент  $(y_0, u)$  принадлежит множеству  $U_0(p_0)$  в том и только в том случае, если включения  $u = -1$  и  $u = 0$  на всех порожденных этим элементом траекториях происходят только в областях  $W_1$  и  $W_2$  соответственно.

*Лемма 3.4.* Имеет место равенство  $m_0 = p_0$ .

*Доказательство.* Зафиксируем любой элемент  $(y_0, u)$  из множества  $U_0(p_0)$  (не пустого согласно замечанию 3.2) и любую соответствующую ему траекторию.

Рассмотрим сперва случай  $\kappa_1 > \kappa_2$ , т.е.  $t_2(x_1) = 1$  (3.4), (3.5). Пусть после некоторого включения  $u = -1$  в точке  $S_1$  действует помеха

$$\varepsilon(u = 0, v) = \varepsilon_0 \operatorname{sign} v, \quad \varepsilon(u = -1) = -\varepsilon_0 \quad (3.6)$$

Обозначим через  $S_2, S_3$  следующие точки переключения, через  $N$  – точку пересечения траектории  $A_1O_1N$   $\ddot{x} = -1 + F - \varepsilon_0$  с дугой  $A_2B_1M_1$  (фиг. 4). В силу леммы 3.3 точки  $S_1$  и  $S_3$  находятся в области  $W_1$ . Если  $S_1 \neq A_1$ , то согласно (1.4) ордината  $S_2$  меньше ординаты  $N$ , т.к. время движения по  $A_1O_1N$  равно 1. Кривая  $S_1S_2S_3$  и контур  $A_1O_1NM_1$  построены из одинаковых парабол. Поэтому из того, что  $S_2$  ниже  $N$ , следует, что точка  $S_3$  расположена левее точки  $S_1$ . Причем в силу отрицательности угла наклона линии  $A_1B_2M_2$  к оси  $Ox$  витки траектории  $S_1S_2S_3\dots$  при помехе (3.6) будут сколь угодно приближаться к точкам  $A_1$  и  $M_1$ . Если после очередного переключения в сколь угодно малой окрестности  $A_1$  помеха сменится на (3.2), то траектория пройдет сколь угодно близко и от  $M_2$ . Поэтому  $p_0 = m_0$ .

Рассмотрим теперь случай  $\kappa_2 \leq \kappa_1$ , т.е.  $t_2(x_2) = 1$  (3.4), (3.5). Пусть после некоторого включения  $u = -1$  в точке  $S_1$  действует помеха

$$\varepsilon(u = 0, v) = -\varepsilon_0 \operatorname{sign} v, \quad \varepsilon(u = -1, v) = \varepsilon_0 \operatorname{sign} v \quad (3.7)$$

Введем обозначения  $S_2, S_4$  – точки пересечения траектории с осью  $Ox$ ;  $S_3, S_6$  – точки переключения управления;  $S_5$  – пересечение траектории с параболической ветвью  $S_2S_1$  (фиг. 5). В силу леммы 3.3 точки  $S_1$  и  $S_6$  находятся в области  $W_1$ . Контур  $S_5S_2S_3S_4$  и  $B_2M_2A_2O_2$  построены из одинаковых парабол. Поэтому из того, что  $S_3$  выше  $A_2$ , следует, что  $S_5$  ниже  $B_2$ , и далее, что  $S_6$  правее  $S_7$ . Причем в силу отрицательности угла наклона линии  $CB_2E$  к оси  $Ox$  витки траектории  $S_1S_2\dots$  при помехе (3.7) будут сколь угодно приближаться к точкам  $B_2, M_2, A_2$ . Если после очередного переключения в сколь угодно малой окрестности  $A_2$  помеха сменится на (3.2), то траектория пройдет сколь угодно близко и от  $M_1$ . Поэтому опять же  $p_0 = m_0$ .

Лемма доказана.

В силу лемм 3.2–3.4 множество  $U_0(p_0)$  состоит из бесконечного количества оптимальных решений задачи 2.0. Элемент  $(y_0, u)$  из замечания 3.2 является примером такого решения.

Покажем теперь, что на подмножестве

$$F \geq 2/3, \quad \varepsilon_0 \leq (3/4)(1 - F) \quad (3.8)$$

области (3.1) решения задачи 2.0 являются решениями задачи 2. Другими словами, если точка  $(F, \varepsilon_0)$  принадлежит области (3.8), то для любого элемента класса  $X_1$  имеет место неравенство  $K(y_0, u) \geq p_0$  (1.5). Действительно, предположим, что

$$K(w_1) < p_0 \quad (3.9)$$

для некоторого элемента  $w_1 = (y_0, u)$  из  $X_1$ . Тогда  $z$  – компонента любой траектории, соответствующей элементу  $w_1$ , должна стягиваться внутрь полосы  $|x| \leq p_0$ . Рассмотрим одну из этих траекторий  $z(t)$  до момента  $t_1$  такого, что  $|x(t_1)| < p_0$ , трубку  $V_1$  продолжений кривой  $z(t)$  на интервале  $t \geq t_1$  при всевозможных помехах и область  $\Omega = H_1A_1M_2A_2H_2$ , ограниченную параболлами  $M_2A_1E_1, M_2A_2H_2$  и прямой  $x = -p_0$  (фиг. 4). В трубке  $V_1$  найдется траектория  $z_1(t)$ , которая выходит из полосы  $|x| \leq p_0$ . В самом деле, предположим, что кривой  $z_1(t)$  не существует. Тогда начиная с некоторого момента  $t'$  все кривые из  $V_1$  должны содержаться в области  $\Omega$ , поскольку после выхода из  $\Omega$  через дугу  $H_1A_1M_2$  траектория при помехе (3.2) вышла бы из полосы  $|x| \leq p_0$ . Продлим траекторию  $z(t)$  с любой помехой на отрезке  $t_1 \leq t \leq t_2, t_2 \geq t', n(t_2) \neq 1$ , и рассмотрим трубку  $V_2$  продолжений на интервале  $t \geq t_2$  при всевозможных помехах. В трубке  $V_2$  должна найтись кривая с положительным участком, т.к. в обратном случае  $V_2$  соответствовала бы некоторому элементу  $w_0$  из  $X_0$ , и в силу решения задачи 2.0 имели бы место соотношения  $K(w_1) \geq K(w_0) \geq m_0 = p_0$ , которые не согласуются с предположением (3.9). Но с помощью геометрических оценок можно устано-

вить, что в силу (1.4) никакой положительный участок не помещается гарантированно в  $\Omega$  при условии (3.8). Из этого противоречия следует, что траектория  $z_1(t)$  существует. Продолжим траекторию  $z(t)$  кривой  $z_1(t)$  до момента  $t_3$ ,  $|x(t_3)| > p_0$ . Бесконечно продолжая во времени схему построения на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_3$ , получим траекторию  $z(t)$ , выходящую из полосы  $|x| \leq p_0$  бесконечное число раз, т.е., с учетом (1.4), выходящую из этой полосы после сколь угодно большого момента времени. Следовательно, предположение (3.9) неверно. Т.о., согласно (1.6) в области параметров (3.8) выполняется равенство  $m = m_0$ .

Отметим, что на множестве (3.8) имеют место оба неравенства  $\kappa_1 > \kappa_2$ ,  $\kappa_1 < \kappa_2$ . В частности,  $\kappa_1(2/3, 1/4) < \kappa_2(2/3, 1/4)$ ,  $\kappa_1(\varepsilon_0 \rightarrow 0) > \kappa_2(\varepsilon_0 \rightarrow 0)$  при фиксированном значении  $F$ .

*Определение.* Контур  $M_1A_1M_2A_2$  при  $p = p_0$  – минимальный контур.

**4. Приведение системы к минимальному контуру.** Решим теперь задачу 1 в области (3.8) пространства параметров  $(F, \varepsilon_0)$ . Для этого покажем на двух примерах, как может быть построено допустимое управление  $u^0(y)$ , гарантированно стягивающее траекторию при любом начальном значении  $y_0$  к минимальному контуру.

*Пример 1.* В качестве линий переключения управления выберем кривые  $A_iM_iB_jA_jK_i$  ( $i = 1, 2$ ) (фиг. 6), где  $A_jK_j$  – бесконечное продолжение параболы  $OA_j$ . Пусть при условии  $y \in Y$   $u^0(y) = \{0, z \in A_1M_1A_2K_2$  и  $z$  левее  $K_1A_1M_1A_2K_2$ ;  $-1, z \in A_2M_2A_1K_1$  и  $z$  правее  $K_1A_1M_2A_2K_2$ ;  $n, z$  внутри контура  $M_1A_1M_2A_2\}$ .

Зафиксируем некоторую точку  $H$  на  $Ox$  слева от  $M_1$  и проведем от нее вверх траекторию с двумя переключениями управления на линиях  $A_jK_j$  до точки  $G$  на  $Ox$ . Пусть точка  $G$  находится в самом левом положении (фиг. 6), что соответствует помехе (3.2) и значению

$$\frac{|GM_1|}{|HM_1|} = k(F, \varepsilon_0) = \frac{4\varepsilon_0^2 \cdot (F + \varepsilon_0)(1 - F + \varepsilon_0)}{(1 + 2\varepsilon_0)^2 (F - \varepsilon_0)(1 - F - \varepsilon_0)}$$

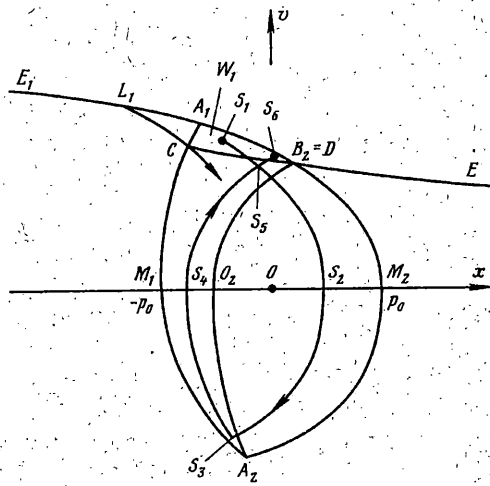
Если коэффициент  $k$  стягивания траектории от витка к витку меньше 1, например, при достаточно малых значениях  $\varepsilon_0$ , то любая траектория будет стремиться к минимальному контуру.

Рассмотрим теперь алгоритм, стягивающий траектории к контуру  $M_1A_1M_2A_2$  при любых значениях параметров  $(F, \varepsilon_0)$  из области (3.1).

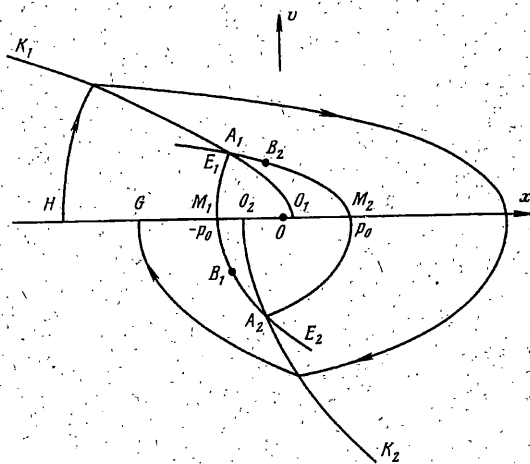
*Пример 2.* В качестве кривых переключения выберем  $E_1A_1B_2DE$  и  $MM_1B_1A_2E_2$  (фиг. 7), где  $M_1M$  – горизонтально перемещенная ветвь  $M_2A_1E_1$ . Описание алгоритма управления с этими линиями аналогично описанию управления в предыдущем примере с линиями  $A_jM_jB_jA_jK_i$  ( $i = 1, 2$ ) соответственно;  $u^0(y) = n, z$  внутри полосы  $E_1A_1B_2DEE_2A_2M_1M$ .

Зафиксируем на  $A_1E_1$  некоторую точку переключения  $P_1 \neq A_1$  и выпустим из нее вниз траектории  $P_1Q_1R_1$  и  $P_1Q'_1R'_1$  до следующего переключения на кривой  $B_2A_1E_1$  в точках  $R_1$  и  $R'_1$ , где  $Q_1$  и  $Q'_1$  – концы отрицательных участков, траектория  $P_1Q_1R_1$  соответствует помехе (3.6), а кривая  $P_1Q'_1R'_1$  – произвольной помехе. Прежде всего покажем, что, если  $Q'_1$  лежит ниже оси  $Ox$  и линии переключения  $M_1B_1A_2$ , то  $R_1$  не правее точки  $R'_1$  (фиг. 7). При указанном расположении  $Q'_1$  время движения по участку  $P_1Q'_1$ , согласно алгоритму управления, равно 1. Следовательно,  $Q_1$  не выше точки  $Q'_1$ , т.к. движение по участку  $P_1Q_1$  происходит с минимальным ускорением  $\ddot{v} = -1 + F - \varepsilon_0$ . Предположим, что  $R_1$  правее точки  $R'_1$ . Тогда дуга  $P_1Q'_1$  пересекала бы параболическую ветвь  $SQ_1$ , где  $S$  – точка пересечения нулевого участка  $Q_1R_1$  с осью  $Ox$ , и точка  $Q'_1$  находилась бы левее этой ветви. Поэтому время движения по  $P_1Q'_1$

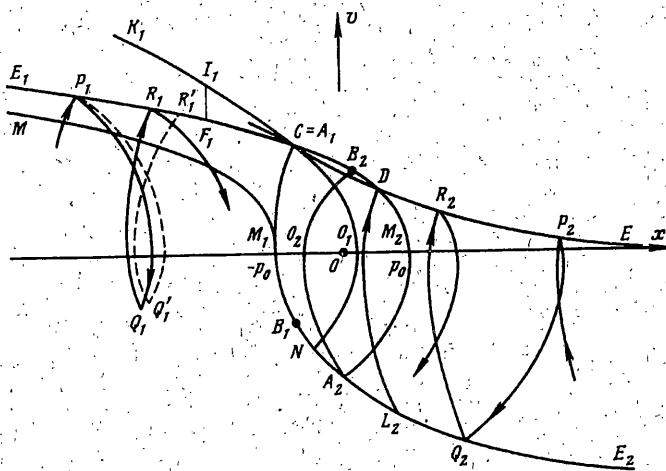




Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

превышало бы, в силу леммы 3.1, время движения по  $P_1Q_1$ . Но это невозможно, поскольку продолжительность  $P_1Q_1'$  равна 1. Требуемое утверждение доказано.

Заметим теперь, что точка  $N$  (фиг. 4, 7) расположена ниже  $Q_1$ , т.к., если  $Q_1$  не на кривой переключения  $NB_1M_1M$ , то продолжительность  $P_1Q_1$  равна 1, а время движения по дуге  $A_1O_1N$  не меньше 1.

Покажем, что  $R_1'$  правее  $P_1$ . Если  $Q_1'$  лежит в области  $u \geq 0$  или на линии переключения, это так. Пусть теперь точка  $Q_1'$  расположена ниже оси  $Ox$  и линии переключения. Тогда  $R_1'$  лежит не левее  $R_1$ , как было доказано. Контур  $A_1O_1NM_1$  построен из тех же парабол, что и кривая  $P_1Q_1R_1$ , т.к. тоже соответствует помехе (3.6). Следовательно, поскольку  $N$  ниже  $Q_1$ , точка  $R_1$  находится правее  $P_1$ , а точка  $R_1'$  — тем более. Причем в силу отрицательности угла наклона линии переключения  $A_1E_1$  к оси  $Ox$  петли траектории будут сколь угодно близко стягиваться к минимальному контуру.

Аналогично в полосе между линиями переключения справа от  $M_1A_1M_2A_2$  имеет место подобное же стягивание. При доказательстве этого утверждения следует учесть, что согласно замечанию 3.3 включения  $u = 0$  происходят на кривой  $M_1A_2E_2$ , и сравнивать траекторию  $P_2Q_2R_2$  при помехе (3.7) с контуром  $B_2M_2A_2O_2$ , который соответствует той же помехе (фиг. 7).

Если  $\kappa_1 \neq \kappa_2$  (3.4), можно в примерах 1 и 2 исключить бесконечно долгое асимптотическое стягивание к минимальному контуру, несколько изменив функции  $u^0(y)$ ,  $y \in Y$ . В примере 1 сделаем следующую поправку. Проведем траекторию  $\ddot{x} = -1 + F - \varepsilon_0$ , соединяющую точку  $C$  с точкой  $L_1$  на  $A_1E_1$  (фиг. 5), и траекторию  $\ddot{x} = F + \varepsilon$  с помехой (3.3), соединяющую точки  $D$  и  $L_2$  на  $A_2E_2$  (фиг. 4). Пусть в случае  $\kappa_1 > \kappa_2$  ( $L_2 = A_2$ )  $u^0(y) = -1$ ,  $z$  в области  $A_1L_1C$  (фиг. 5), а в случае  $\kappa_1 < \kappa_2$  ( $L_1 = A_1$ )  $u^0(y) = 0$ ,  $z$  в области  $A_2L_2K_3$ , где  $K_3$  — точка пересечения кривой  $L_2D$  с линией  $M_2A_2$  (фиг. 4). Тогда в силу леммы 3.3 любая траектория перейдет на движение в контуре  $M_1A_1M_2A_2$ , т.к. после переключения в криволинейном треугольнике  $A_1L_1C$  гарантировано попадание в область  $W_1$  со значением  $u = -1$ , а после переключения в  $A_2L_2K_3$  — в область  $W_2$  со значением  $u = 0$ . В примере 2, если  $\kappa_i > \kappa_j$ , рассмотрим криволинейный треугольник  $A_jF_jJ_j$ , где  $F_jJ_j$  — некоторый вертикальный отрезок, соединяющий линии  $A_jE_j$  и  $A_jK_j$  (фиг. 7). Пусть  $u^0(y) = n$ ,  $z$  в области  $A_jF_jJ_j$ . Данная поправка обеспечит приведение любой траектории к переключению на ветви  $B_jA_jE_j$ , чтобы затем, благодаря стягиванию, попасть на дугу  $B_jA_jL_j$ ,  $A_j \neq L_j$ . После этого, как уже было показано при рассмотрении первой поправки, произойдет переход на движение в области  $M_1A_1M_2A_2$ .

Управления  $u^0(y)$ , рассмотренные в примерах, являются решениями задачи 1 в области параметров (3.8) (в примере 1 добавляется условие  $k < 1$ ). При этом для любого значения  $y_0$  выполняются равенства

$$K(y_0, u^0) = J(y_0) = m = m_0 = p_0$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 98-01-00988).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 520 с.

4. *Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г.* Управление космическим летательным аппаратом. М.: Машиностроение, 1964. 402 с.
5. *Гаушус Э.В., Смольянинов Н.Д.* Исследование релейной системы стабилизации летательного аппарата // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 2. С. 5–13.
6. *Гаушус Э.В.* Исследование динамических систем методом точечных преобразований. М.: Наука, 1976. 368 с.
7. *Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М., Маркеев А.П., Соколов Б.Н., Шаранюк А.В.* Механика больших космических конструкций. М.: Факториал, 1997. 302 с.
8. *Пятницкий Е.С.* Принцип декомпозиции в управлении динамическими системами // ДАН СССР. Том. 300. 1988. № 2. С. 300–303.
9. *Черноузько Ф.Л.* Декомпозиция и синтез управления в динамических системах // Изв. АН СССР. Техн. кибер. 1990. № 6. С. 64–82.

Москва,

Поступила в редакцию  
16.01.1997