

**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1999**

УДК 531.552

© 1999 г. М.В. ШАМОЛИН

**НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ В ДИНАМИКЕ
ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СРЕДОЙ**

Рассматривается задача о плоскопараллельном движении твердого тела в сопротивляющейся среде, когда выполнены условия струйного или отрывного обтеканий [1, 2].

Ранее [3, 4] для линейной математической модели торможения твердого тела показано, что режим поступательного движения, как правило, неустойчив. Исследование возможных колебательных режимов в системе требует учета нелинейных эффектов [5–7] и развития аналитического аппарата, облегчающего проведение глобального качественного анализа.

Здесь исследуется самый интересный в прикладном отношении случай – режим свободного торможения тела, как и в [5–8]. Но, в отличие от последних указанных работ, получены некоторые аналитические классы частных решений, соответствующие устойчивым и неустойчивым особым точкам, существующим лишь при некоторых дополнительных условиях на коэффициенты полной нелинейной системы дифференциальных уравнений. В частности, выделена некоторая область в пространстве параметров, уходящая на бесконечность, допускающая (абсолютно) структурно устойчивый глобальный фазовый портрет.

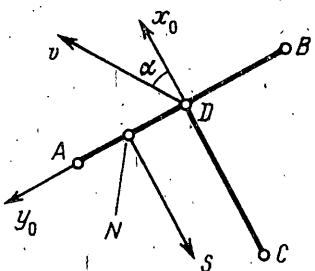
1. Постановка задачи о плоскопараллельном движении тела в среде при струйном обтекании в условиях квазистационарности. В данном пункте дается постановка задачи, в соответствии с основными гипотезами, после чего становится возможным формализация модельных предположений.

1. Основная гипотеза. Рассмотрим простую динамическую модель воздействия среды на твердое тело (см. также [3–8]), при построении которой используется гипотеза квазистационарности [3, 4, 9]. Она состоит в том, что распределение скоростей частиц среды принимается таким, каким оно имело бы место при стационарном движении тела. Таким образом, среда "реагирует" лишь на мгновенное движение тела и "забывает" свои начальные условия.

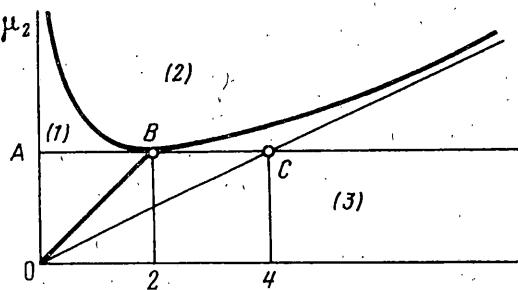
Поэтому в рамках данной гипотезы возможно представление результатирующих силы и момента, действующих на твердое тело, в виде функции от мгновенного распределения скоростей в теле, т.е. от скорости v некоторой точки тела и мгновенной угловой скорости Ω . Таким образом, приходим к формулировке задачи о движении тела в сопротивляющейся среде, как задачи классической динамики.

2. Формализация модельных предположений и полная система дифференциальных уравнений. Кратко перечислим модельные предположения и получим полную систему дифференциальных уравнений. 1). Все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоской пластинки AB (фиг. 1). При этом плоскость пластинки перпендикулярна плоскости движения тела.

2). Поскольку взаимодействие происходит по законам струйного обтекания, сила S этого взаимодействия направлена по нормали к пластинке, причем точка N приложения этой силы определяется лишь одним параметром – углом атаки α , который



Фиг. 1



Фиг. 2

измеряется между вектором скорости v серединой D пластиинки и внешней нормалью в этой точке (прямая CD). Таким образом, $DN = u(\alpha)$. Исследование зависимости функции u от угловой скорости движения тела является следующим этапом изучения проблемы.

3). Величину силы сопротивления S примем в виде $S = sv^2$, где $v = |v|$, а величина s (назовем его в данном случае коэффициентом сопротивления) является, вообще говоря, функцией угла атаки и угловой скорости. В данной работе (как и в ряде работ автора [5–8]) рассматривается случай зависимости функции s только лишь от угла атаки α : $s = s(\alpha)$.

Принятая здесь схема описания воздействия среды на твердое тело не учитывает всего разнообразия деталей этого взаимодействия. Как уже отмечалось, она является лишь первым этапом моделирования данного воздействия и позволяет до конца провести глобальный качественный анализ.

4). Распределение масс таково, что центр масс C тела располагается на срединном перпендикуляре CD к пластиинке.

Динамическая система, описывающая произвольное плоско-параллельное движение тела, имеет шестой порядок. В данном случае для описания положения тела на плоскости выберем декартовы координаты x, y центра пластиинки и угол поворота ϕ , который будем измерять в плоскости движения тела между прямой CD и какой-нибудь осью инерциальной системы координат. При этом фазовое состояние системы характеризуется следующими шестью величинами: $x^*, y^*, \phi^*, x, y, \phi$.

Ввиду того, что обобщенные силы и кинетическая энергия не зависят от положения тела на плоскости, координаты (x, y, ϕ) являются циклическими. Это позволяет рассматривать систему меньшей размерности [5–8].

Выполним замену фазовых скоростей x^*, y^*, ϕ^* через введенные величины v и α посредством независимых соотношений

$$\phi^* = \Omega, \quad x^* = v \cos(\alpha - \phi), \quad y^* = v \sin(\alpha - \phi) \quad (1.1)$$

Фактически производится замена двух величин x^*, y^* , поскольку угловая скорость тела уже введена.

Теперь фазовое состояние системы определяется через функции $(v, \alpha, \phi^*, x, y, \phi)$. При этом величины v и α рассматриваются как квазискорости системы.

Замечание. Цикличность в данном случае понимается не по Раясу, когда каждой циклической координате соответствует первый интеграл; в результате чего порядок общей лагранжевой системы понижается. Здесь цикличность понимается в том смысле, что динамические функции (кинетическая энергия и обобщенные силы) не зависят от некоторых координат конфигурационного пространства. При этом порядок общей системы понижается на число таких координат.

В силу теоремы о движении центра масс в проекциях на подвижные оси x_0, y_0 (фиг. 1) и теоремы об изменении кинетического момента относительно оси Кенига, получаем полную систему динамических уравнений:

$$\begin{aligned} v^* \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha + \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 = -\frac{s(\alpha)}{m} v^2 \\ v^* \sin \alpha + \dot{\alpha} v \cos \alpha - \Omega v \cos \alpha + \sigma \Omega^2 = 0 \\ I \ddot{\Omega} = -y(\alpha) s(\alpha) v^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Система динамических уравнений (1.2) вместе с кинематическими соотношениями (1.1) образуют полную систему уравнений.

Здесь введены следующие обозначения: σ – расстояние DC , I – центральный момент инерции тела, m – его масса.

В динамическую систему (1.2) входят функции $y(\alpha)$, $s(\alpha)$, для качественного описания которых используем имеющуюся экспериментальную информацию о свойствах струйного обтекания [9].

Геометрическая форма плоской пластинки, через которую происходит взаимодействие тела со средой, может быть совершенно различной. Кроме того, хорда, лежащая в плоскости пластинки, может по-разному определять плоскость движения самого твердого тела. Последние обстоятельства позволяют отнести функции $y(\alpha)$ и $s(\alpha)$ к определенным классам; они состоят из функций достаточно гладких, 2π -периодических ($y(\alpha)$ – нечетная, а $s(\alpha)$ – четная), удовлетворяющих следующим условиям: $y(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причем $y'(0) > 0$, $y'(\pi) < 0$; $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причем $s'(0) > 0$, $s'(\pi/2) < 0$. Как y , так и s меняют знак при замене α на $\alpha + \pi$. В частности, аналитические функции

$$y(\alpha) = y_0(\alpha) = A \sin \alpha, \quad s(\alpha) = s_0(\alpha) = B \cos \alpha \quad (A, B > 0) \quad (1.3)$$

служат типичными представителями описанных классов.

Рассмотрим произведение $F(\alpha) = y(\alpha)s(\alpha)$. Из вышеперечисленных условий следует, что F – достаточно гладкая нечетная π -периодическая функция, удовлетворяющая условиям: $F(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $F'(0) > 0$, $F'(\pi/2) < 0$.

В частности, аналитическая функция

$$F = F_0(\alpha) = AB \sin \alpha \cos \alpha \quad (1.4)$$

удовлетворяет перечисленным условиям.

Введенные выше классы функций $\{F\}$ и $\{s\}$ заведомо включают допустимые функции F и s , взятые для каждого конкретного тела и для каждого конкретного движения. При этом, конечно, необходимо такое "расширение" задачи, при котором функции y и s зависят лишь от угла атаки.

Уравнения (1.2) являются однородными степени 2 по паре переменных (v, Ω) , поэтому возможна замена независимого переменного и получение независимой подсистемы внутри системы (1.2).

Вводя новое независимое переменное (пройденный путь точки D) по формуле $dq = vdt$, динамическую систему можно преобразовать к следующему виду (первое уравнение, очевидно, является новым кинематическим соотношением из (1.1)):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega, \\ v^* &= v \Psi(\alpha, \omega) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\alpha^* = \omega + \frac{\alpha}{I} F(\alpha) \cos \alpha + \sigma \omega^2 \sin \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha \quad (1.6)$$

$$\omega^* = -\frac{1}{I} F(\alpha) - \omega \Psi(\alpha, \omega) \quad (1.7)$$

$$(\dots) \cdot = \frac{d}{dq} (\dots), \quad \Psi(\alpha, \omega) = -\sigma \omega^2 \cos \alpha + \frac{\sigma}{I} F(\alpha) \sin \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha$$

Как видно, уравнения (1.6), (1.7) образуют замкнутую подсистему второго порядка. В частности, если выполнены условия (1.3), (1.4), то система (1.5)–(1.7) примет следующий вид:

$$v^* = v\Psi(\alpha, \omega) \quad (1.8)$$

$$\alpha^* = \omega + \frac{\sigma}{I} AB \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sigma \omega^2 \sin \alpha + \frac{B}{m} \sin \alpha \cos \alpha \quad (1.9)$$

$$\omega^* = -\frac{1}{I} AB \sin \alpha \cos \alpha - \omega \Psi(\alpha, \omega) \quad (1.10)$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma \omega^2 \cos \alpha + \frac{\sigma}{I} AB \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{B}{m} \cos^2 \alpha$$

Оказывается [10], в некоторых случаях система (1.8)–(1.10) отражает основные топологические свойства разбиения на траектории системы (1.5)–(1.7) в фазовом пространстве $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$. Более того, при некоторых условиях векторные поля последних двух систем топологически эквивалентны [10, 11] (о топологической эквивалентности см. [11, 12]).

2. Начало качественного анализа. Точки покоя исследуемых систем. Нелинейный анализ рассматриваемой системы предполагает последовательное рассмотрение общей системы третьего порядка и отделившейся системы второго порядка, которая может иметь как явные, так и так называемые неявные положения равновесия на двумерном фазовом цилиндре.

От исходной системы (1.5)–(1.7) отделилась подсистема второго порядка (1.6), (1.7). Поэтому в фазовом пространстве $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ системы (1.6), (1.7) точки покоя могут являться проекциями несобых фазовых траекторий трехмерного фазового пространства. У системы (1.5)–(1.7) существуют положения равновесия, которые заполняют одномерные многообразия.

Поэтому вопрос о точках покоя разбивается на два: о точках покоя системы (1.5)–(1.7) в фазовом пространстве $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ и о точках покоя укороченной системы (1.6), (1.7) на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ или на цилиндре $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times \mathbb{R}^1\{\omega\}$.

1. Точки покоя системы третьего порядка. Из вида системы (1.5)–(1.7) можно утверждать, что в точках покоя трехмерного фазового пространства должно выполняться равенство $F(\alpha) = 0$.

Поэтому искомые точки покоя будут заданы системами с параметрами v_1, v_2, v_3 :

$$\alpha = \pi/2 + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}; \quad \omega = 0; \quad v = v_1 \quad (2.1)$$

$$\alpha = \pi/2 + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}; \quad \omega = -1/\sigma, \quad \sigma \neq 0; \quad v = v_2 \quad (2.2)$$

$$\alpha = -\pi/2 + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}; \quad \omega = 1/\sigma, \quad \sigma \neq 0; \quad v = v_3 \quad (2.3)$$

Здесь набор параметров v_1, v_2, v_3 – положительные числа.

Системы (2.1)–(2.3) задают в фазовом пространстве $\mathbb{R}_+^1\{v\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ одномерные многообразия (прямые), сплошь заполненные точками покоя системы (1.5)–(1.7) (ср. с [7]).

2. Механическая интерпретация точек покоя трехмерного фазового пространства. (a) Система (2.1). Тело совершает поступательное движение в любую сторону с любой постоянной скоростью, параллельной пластинке; (b) Системы (2.2), (2.3). Квадрат скорости центра масс найдется из следующего равенства: $v_c^2(v, \omega, \alpha) = v^2(1 + \sigma^2 \omega^2 + 2\sigma \omega \sin \alpha)$.

Поскольку $v_c^2(v_2, -1/\sigma, \pi/2 + 2\pi l) = v_c^2(v_3, 1/\sigma, -\pi/2 + 2\pi l) = 0$, $l \in \mathbb{Z}$, то центр масс неподвижен. Так как $|d\phi/dt| = v_k/\sigma$ ($k = 2, 3$), то тело вращается вокруг неподвижного центра масс с произвольной постоянной скоростью.

Стационарные движения, соответствующие точкам покоя (2.1)–(2.3), несколько противоречат здравому смыслу. Данное противоречие для стационарных движений, соответствующих точкам покоя (2.1), состоит в том, что при движении твердого тела в среде с углами атаки, близкими к $\pi/2$, очевидно, произойдет замыкание боковой поверхности, и модель при этом требует некоторого пересмотра. Правда это не является принципиальным противоречием с развиваемой в работе идеологией взаимодействия твердого тела и среды, поскольку плоская пластиинка способна двигаться поступательно в направлении себя практически без какого-либо сопротивления со стороны среды (по крайней мере в случае идеальной жидкости [13, 14], которая, как правило, рассматривается в классической теории отрывных течений [2, 15]). Физическое же противоречие для стационарных движений, соответствующих точкам покоя (2.2), (2.3), носит более принципиальный характер, поскольку один "край" пластиинки "разрезает" среду в одном направлении, не совпадающем с плоскостью пластиинки, а другой, соответственно, – в другом. При этом в некоторые моменты времени возможно наличие либо сопротивления среды, либо момента ее сопротивления. Одна из причин данного противоречия состоит в том, что в рассматриваемой нелинейной динамической модели не учитывается влияние угловой скорости вращения на качественный вид пары функций (F, s) , что является самостоятельной областью исследования. Учет такого влияния, как уже указывалось, является следующим этапом изучения проблемы.

3. Явные и неявные точки покоя системы второго порядка на плоскости. У системы (1.6), (1.7) существуют точки покоя на плоскости $\mathbb{R}^2(\alpha, \omega)$, которые задаются следующими соотношениями:

$$\alpha = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \omega = 0 \quad (2.4)$$

$$\alpha = (2k + 1)\pi; \omega = 0 \quad (2.5)$$

$$\alpha = \pi/2 + \pi k; \omega = 0 \quad (2.6)$$

$$\alpha = \pi/2 + 2\pi k; \omega = -1/\sigma, \sigma \neq 0 \quad (2.7)$$

$$\alpha = -\pi/2 + 2\pi k; \omega = 1/\sigma, \sigma \neq 0 \quad (2.8)$$

Как было указано выше, точки покоя укороченной системы могут являться ортогональной проекцией либо неособых фазовых траекторий, либо многообразий, сплошь заполненных точками покоя системы (1.5)–(1.7) в фазовом пространстве $\mathbb{R}_+^1(v) \times \mathbb{R}^2(\alpha, \omega)$. Системы (2.6)–(2.8) задают на фазовой плоскости точки покоя, в которые ортогонально проектируются многообразия положений равновесия. И, обратно, только в точки, задаваемые системами (2.6)–(2.8), проектируются многообразия положений равновесия.

Следовательно, системы (2.4), (2.5) задают точки, в которые ортогонально проектируются частные решения вида

$$v(q) = v^0 \exp\{(-B/m)q\}, v^0 = v(0), \alpha(q) \equiv \pi k, k \in \mathbb{Z}; \omega(q) \equiv 0 \quad (2.9)$$

Механическая интерпретация частных решений (2.9) следующая: тело совершает прямолинейное поступательное движение с углом атаки, равным либо 0 (центр масс – "сзади"), либо π (центр масс – "впереди"). При этом скорости всех точек тела, в силу соотношения $dv/dt = v du/dq$, убывают со временем как t^1 .

Ввиду простоты механической интерпретации стационарных движений, соответствующих точкам покоя (2.4)–(2.8), последние будем называть явными положениями равновесия (ЯПР). Наряду с ЯПР могут существовать точки покоя, соответствующие, так сказать, неявным частным решениям системы (1.6), (1.7). Такие точки покоя

соответствуют неособым частным решениям системы, составленной из уравнений (1.5)–(1.7) и кинематического соотношения $\varphi^* = \omega$.

Определение. Неявными положениями равновесия (НПР) системы (1.6), (1.7) на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ называются точки покоя, не лежащие на прямых $\{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \omega \sin \alpha \cos \alpha = 0\}$.

4. Неявные положения равновесия системы второго порядка, соответствующие неявным частным решениям. Введем обозначение $n_0^2 = AB/I = F'(0)/I$. Для простоты рассмотрим систему (1.9), (1.10). Аналогично может быть рассмотрена система (1.6), (1.7). Необходимым условием существования НПР является представление данных положений равновесия в виде решений систем

$$\omega = a \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{-B/m + (B^2/m^2 + 4\sigma a(1+\sigma a)(a^2 - n_0^2))^{1/2}}{2\sigma(n_0^2 - a^2)} \quad (2.10)$$

$$\omega = a \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{-B/m - (B^2/m^2 + 4\sigma a(1+\sigma a)(a^2 - n_0^2))^{1/2}}{2\sigma(n_0^2 - a^2)} \quad (2.11)$$

причем либо $a = a_+ = n_0 / 2(-\sigma n_0 + \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4})$, либо $a = a_- = n_0 / 2(-\sigma n_0 - \sqrt{\sigma^2 n_0^2 - 4})$.

Необходимо заметить, что при $\sigma n_0 < 2$ НПР не существуют.

Замечание. Комбинация правых частей уравнений (1.6), (1.7), позволяющая исследовать наличие НПР у рассматриваемой системы (1.6), (1.7), имеет вид

$$\omega^2 + \frac{1}{I} g(\alpha) \sin \alpha + \frac{\sigma}{I} \omega g(\alpha) = 0, \quad g(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha} \quad (2.12)$$

В частности, если выполнены свойства (1.3), (1.4), то $g(\alpha) = AB \sin \alpha$.

Рассмотрим

$$\max_{\alpha \in (0, \pi)} \frac{g(\alpha)}{\sin \alpha} = \max_{\alpha \in (0, \pi)} \frac{F(\alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha} = g^*$$

Введем обозначение $g^*/I = n^2$ (при выполнении свойств (1.3), (1.4) $n^2 = n_0^2$). Дискриминант уравнения (2.12) отрицателен, если

$$\sigma n < 2 \quad (2.13)$$

Таким образом, у системы (1.6), (1.7) при условии (2.13) не существуют НПР. При выполнении условий (1.3), (1.4) условие (2.13), как уже отмечалось, эквивалентно $\sigma n_0 < 2$.

Рассмотрим (в качестве примера) систему (1.9), (1.10) при условии, что $\sigma n_0 \geq 2$.

Предложение 1. У системы (1.9), (1.10) существуют НПР, если и только если выполнена одна из групп условий:

(1) $B/m > -n_0^2/a_-$, $a = a_-$ – НПР задаются системой (2.10).

(2) $B/m \leq 2\sigma(n_0^2 - a_+^2)$, $B^2/m^2 \geq 4\sigma a_+(1+\sigma a_+)(n_0^2 - a_+^2)$, $a = a_+$ – НПР задаются системой (2.10).

(3) $B/m > 2\sigma(n_0^2 - a_+^2)$, $B^2/m^2 \geq 4\sigma a_+(1+\sigma a_+)(n_0^2 - a_+^2)$, $B/m > -n_0^2/a_+$, $a = a_+$ – НПР задаются системой (2.10).

$$(4) \quad B/m < 2\sigma(n_0^2 - a_+^2), \quad B^2/m^2 \geq 4\sigma a_+(1 + \sigma a_+) (n_0^2 - a_+^2), \quad B/m < -n_0^2/a_+, \quad a = a_+$$

НПР задаются системой (2.11).

Доказательство предложения 1 основывается на переборе всех условий существования НПР.

Следствие 1. У системы (1.8)–(1.10) существуют частные решения вида

$$v(q) = v^\circ \exp(\kappa q), \quad v = v^\circ(0), \quad \kappa < 0$$

$$\alpha(q) \equiv \alpha_0, \quad \alpha_0 = \alpha(0), \quad \omega(q) \equiv \omega_0, \quad \omega_0 = \omega(0)$$

Следствие 2. У системы (1.2) существуют частные решения вида

$$v(t) = \frac{v_0}{1 - v_0 \kappa t}, \quad v_0 = v(0), \quad \alpha(t) \equiv \alpha_0, \quad \alpha_0 = \alpha(0)$$

$$\Omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{\Omega_0}{1 - v_0 \kappa t}, \quad \Omega_0 = \Omega(0)$$

при этом последующие равенства удовлетворяют кинематическим соотношениям (1.1):

$$\phi(t) = \phi_0 - \frac{\Omega_0}{v_0 \kappa} \ln(1 - v_0 \kappa t), \quad \phi_0 = \phi(0)$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\Omega_0} \sin(\alpha_0 - \phi_0) - \frac{v_0}{\Omega_0} \sin[\alpha_0 - \phi_0 + \frac{\Omega_0}{v_0 \kappa} \ln(1 - v_0 \kappa t)], \quad x_0 = x(0)$$

$$y(t) = y_0 - \frac{v_0}{\Omega_0} \cos(\alpha_0 - \phi_0) + \frac{v_0}{\Omega_0} \cos[\alpha_0 - \phi_0 + \frac{\Omega_0}{v_0 \kappa} \ln(1 - v_0 \kappa t)], \quad y_0 = y(0)$$

Следствие 3. Траектория центра пластиинки при движении на плоскости $\mathbb{R}^2\{x, y\}$, соответствующая неявным частным решениям системы, – окружность с центром в точке

$$(x_0 + \frac{v_0}{\Omega_0} \sin(\alpha_0 - \phi_0), y_0 - \frac{v_0}{\Omega_0} \cos(\alpha_0 - \phi_0))$$

и радиусом v_0/Ω_0 .

3. Расслоения фазового пространства, его симметрии и начало топологического анализа. Анализ рассматриваемой системы второго порядка обеспечивает "поднятие" траекторий в трехмерное фазовое пространство и дальнейшее глобальное построение разбиения всех траекторий в изучаемой задаче. Поэтому далее даются некоторые геометрические характеристики всеобъемлющего фазового пространства.

1. Топологическая классификация ЯПР укороченной системы на плоскости. В системе (1.9), (1.10) (аналогичные параметры имеются и у общей системы (1.6), (1.7)) два безразмерных параметра: $\mu_1 = 2B/mn_0$, $\mu_2 = \sigma n_0$.

Предложение 2.

(1) Точки покоя, соответствующие (2.4), всегда являются отталкивающими: неустойчивыми фокусами, если $\mu_2 < 2$; неустойчивыми узлами, если $\mu_2 > 2$; неустойчивыми вырожденными узлами, если $\mu_2 = 2$.

(2) Точки покоя, соответствующие (2.5), являются: седлами, если $\mu_1(2\mu_2 - \mu_1) > 4$; отталкивающими, если $\mu_2 < \mu_1$, $\mu_1(2\mu_2 - \mu_1) < 4$; притягивающими, если $\mu_2 > \mu_1$, $\mu_1(2\mu_2 - \mu_1) < 4$. Причем, при выполнении последних двух групп условий, данные точки покоя являются фокусами, если $\mu_2 < 2$ и узлами, если $\mu_2 > 2$.

(3) Точки покоя, соответствующие (2.6), являются седлами.

(4) Точки покоя, соответствующие (2.7), (2.8), всегда являются притягивающими:

устойчивыми фокусами, если $\mu_1\mu_2 < 4$; устойчивыми узлами, если $\mu_1\mu_2 > 4$; устойчивыми вырожденными узлами, если $\mu_1\mu_2 = 4$.

2. *Расслоения фазового пространства и его симметрии.* В силу отделения от системы третьего порядка (1.5)–(1.7) независимой подсистемы второго порядка (1.6), (1.7), фазовые траектории системы (1.5)–(1.7) в пространстве $\mathbb{R}_+^1\{\nu\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$, лежат на поверхностях, являющихся двумерными цилиндрами. В частности, если существует во всем фазовом пространстве первый интеграл системы (1.6), (1.7), то он является функцией переменных (α, ω) , а поэтому задает семейство цилиндров в пространстве $\mathbb{R}_+^1\{\nu\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$.

Замечание 1. Поскольку $d\phi/dt = \nu d\phi/dq$, то в фазовом пространстве $\mathbb{R}_+^1\{\nu\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ системы (1.2) данному первому интегралу будет соответствовать первый интеграл, который зависит от всех трех фазовых переменных.

Благодаря вышеописанному отделению независимой подсистемы, удобнее строить фазовый портрет системы (1.5)–(1.7) в пространстве $\mathbb{R}_+^1\{\nu\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ с помощью фазового портрета системы (1.6), (1.7) на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$. Фазовый портрет на плоскости не будет являться частью портрета в пространстве $\mathbb{R}_+^1\{\nu\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ в теоретико-множественном смысле, а будет являться проекцией фазового портрета на плоскость $\{\nu = \text{const}\}$. Проекция в данном случае ортогональна. Более того, становятся возможными поднятие фазовых траекторий с плоскостей в пространство $\mathbb{R}_+^1\{\nu\} \times \mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$ и получение трехмерных фазовых портретов системы (1.6), (1.7). Данные утверждения можно обобщить на случаи большей размерности.

Замечание 2. Поскольку $\nu > 0$, то движение возможно лишь в области $\bar{W} = \{(\alpha, \omega, \nu) \in \mathbb{R}^3: \nu > 0\} \subset \mathbb{R}^3\{\alpha, \omega, \nu\}$.

Если формально сделать замену переменных в области \bar{W} по формуле $p = \ln \nu$, то полученное векторное поле в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3\{\alpha, \omega, p\}$ не зависит от p и однозначно ортогонально проектируется на все семейство плоскостей $\{p = \text{const}\}$. При этом положения равновесия на плоскости $\mathbb{R}^3\{\alpha, \omega\}$ полностью совпадают с объединением как проекций многообразий особых точек, так и проекций неособых фазовых траекторий области \bar{W} .

Замечание 3. Для полного решения вопроса о поднятии траекторий в трехмерное фазовое пространство, необходимо выяснить знак проекции векторного поля в $\mathbb{R}^3\{\alpha, \omega, p\}$ на p – ось, либо на ν – ось в области \bar{W} .

Рассмотрим поверхность M , являющуюся объединением поверхностей $M = M^\circ \cup \bar{M}$, где $M^\circ = \{(\alpha, \omega, \nu) \in \bar{W}: \Psi(\alpha, \omega) \cos^{-1} \alpha = 0\}$ (там, где $\cos \alpha = 0$, доопределим поверхность по непрерывности), а \bar{M} , в свою очередь, представляется в виде объединения $\bar{M} = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}} M_s$, $M_s = \{(\alpha, \omega, \nu) \in \bar{W}: \alpha = \pi/2 + \pi s\}$.

Перечисленные поверхности являются цилиндрами, которые разрезают фазовое пространство на области, в каждой из которых проекция векторного поля на ν – ось (p – ось) имеет фиксированный знак.

На самой поверхности M (и только на ней) проекция векторного поля на ν – ось (p – ось) обращается в нуль.

Замечание 4. Для любых F , в векторное поле системы (1.5)–(1.7) обладает свойством центральной симметрии относительно точек $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, т.е. в координатах (α, ω) векторное поле системы меняет направление при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ \omega \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -\omega \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Т.е., векторное поле системы (1.5)–(1.7) в трехмерном фазовом пространстве обладает симметрией относительно множества лучей $\{(\alpha, \omega, \nu) \in \bar{W}: \alpha = \pi k, \omega = 0\}$.

Для дальнейшего анализа потребуются определения семейств полос на фазовой

плоскости $\mathbb{R}^2(\alpha, \omega)$: $\Pi_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2 : \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\}$, при этом $\Pi_{(-\pi/2, \pi/2)} = \Pi$, $\Pi_{(\pi/2, 3\pi/2)} = \Pi^*$.

4. Фазовый портрет системы на двумерном цилиндре для некоторой области параметров. Исследуемый фазовый цилиндр обладает настолько богатым семейством фазовых портретов, что сначала необходимо кратко привести обзор ранее полученных результатов, соответствующих уже изученным областям параметров задачи, а затем "подвести" изучаемое семейство фазовых портретов к уже полученным, исходя из соображений непрерывности.

1. Введение в классификацию фазовых портретов. Изобразим диаграмму перестроек векторного поля системы (1.6), (1.7) возле точки $(\pi, 0)$ (фиг. 2). Поведение поля системы возле этой точки определяет многие основные топологические особенности глобального фазового портрета (1 – аттрактор, 2 – седло, 3 – репеллер).

В общем пространстве физических допустимых параметров системы $M^2 = \{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : \mu_1 > 0, \mu_2 > 0\}$ для начала рассмотрим область $J^2 = \{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 : \mu_1 > 0, 0 < \mu_2 < 2\} \subset M^2$.

Топологическая классификация ЯПР была приведена выше. Для построения фазового портрета системы для выбранных областей параметров на плоскости или цилиндре необходимо ответить на следующие вопросы качественного характера.

(a) Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве α - и ω -предельных множеств бесконечно удаленные точки. Такие траектории действительно существуют (α - и ω -предельными множествами их являются бесконечно удаленные точки $(\pi k, \pm \infty)$, $k \in \mathbb{Z}$) [16].

(b) Существование замкнутых кривых из траекторий, стягиваемых по цилинду в точку. В частности, существование неизолированных периодических траекторий или предельных циклов. Заметим, что, в силу 2π -периодичности векторного поля системы по α , последняя задача сводится к отысканию замкнутых траекторий или замкнутых кривых из траекторий лишь вокруг точек поля индекса 1 [16].

(c) Наличие замкнутых траекторий или замкнутых кривых из траекторий, не стягиваемых по цилинду в точку. Такие траектории отсутствуют во всем фазовом цилиндре для всего пространства параметров M^2 [7, 16].

(d) Основным (и самым значительным, с точки зрения нелинейного анализа) вопросом классификации портретов является вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющихся гиперболических седел. Такие сепаратрисы и положения равновесия разделяют всю фазовую плоскость на области без положений равновесия.

Замечание. Области параметров для любых F и s определим следующим образом:

область I:

$$\left\{ (\mu_1, \mu_2) \in J^2 : \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} \geq \frac{\sigma}{I} \frac{F(\alpha)}{\sin \alpha}, \forall \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\};$$

область II:

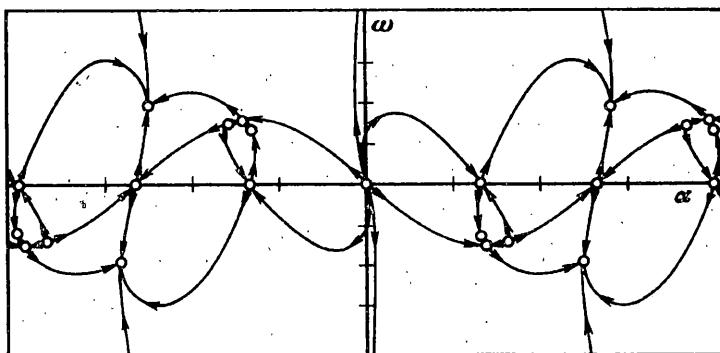
$$\left\{ (\mu_1, \mu_2) \in J^2 : \exists \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} < \frac{\sigma}{I} \frac{F(\alpha)}{\sin \alpha}, \text{ при этом } (\pi, 0) - \text{отталкивающая точка} \right\};$$

область III:

$$\left\{ (\mu_1, \mu_2) \in J^2 : \exists \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} > \frac{\sigma}{I} \frac{F(\alpha)}{\sin \alpha}, \text{ при этом } (\pi, 0) - \text{притягивающая точка} \right\};$$

область IV:

$$\{(\mu_1, \mu_2) \in M^2 \setminus J^2 : (\pi, 0) - \text{седло}\}.$$



Фиг. 3

Можно вводить также другие области в пространстве параметров, но они нам в данной работе не потребуются.

2. Краткая формулировка результатов по разбиению фазового цилиндра системы на траектории для областей параметров I, II, III. Рассмотрим систему (1.6), (1.7) на плоскости в областях параметров I, II, III (ср. с областями на фиг. 2).

В [5, 7, 8] исследуется новое двупараметрическое семейство фазовых портретов, которое соответствует областям параметров I и состоит из топологически неэквивалентных портретов. Каждый типичный портрет абсолютно структурно устойчив, а остальные портреты – относительно структурно неустойчивы первой степени относительной структурной неустойчивости [10].

Каждый портрет такого семейства "кодируется" парой рациональных чисел. Эта пара чисел является топологическим инвариантом соответствующего портрета. Таким образом, проводится полная топологическая классификация портретов системы для областей параметров I.

В [6, 8] исследуется двупараметрическое семейство портретов, соответствующее областям параметров II и III и также состоит из топологически неэквивалентных портретов. Данное семейство обладает теми же свойствами абсолютной и относительной структурной устойчивости, которыми обладает предыдущее семейство. Основное отличие последнего семейства – наличие, простых и сложных предельных циклов, которые соответствуют устойчивым и неустойчивым колебаниям в системе. По-прежнему, каждый портрет "кодируется" парой рациональных чисел, которая отвечает за поведение сепаратрис и является топологическим инвариантом соответствующего портрета. При этом можно говорить о "помеченных" инвариантах, если в системе, кроме всего прочего, присутствуют простые или сложные предельные циклы.

3. Строение фазового портрета системы для области параметров IV. В зависимости от выполнения того или иного свойства из предложения 1, у системы (1.6), (1.7) имеется "больше" или "меньше" дополнительных особых точек на фазовом цилиндре, отвечающим НПР. В каждом конкретном случае наличие таких точек и их устойчивость исследуется самостоятельно.

Для той подобласти параметров из области IV, когда существуют НПР, задаваемые обеими системами (т.е., и (2.10), и (2.11) – такой случай, в силу предложения 1, возможен), фазовый портрет показан на фиг. 3: Данный случай самый "насыщенный" по отношению к особым траекториям.

Предложение 3. У системы (1.6), (1.7), рассмотренной в области параметров IV, имеются НПР, лежащие лишь в полосе Π^* ; соответствующие как отталкивающим и притягивающим, так и седловым особым точкам.

Таким образом, предложение 3 затрагивает тот случай, когда у исследуемой системы существует максимально возможное значение дополнительных особых точек.

В любом случае НПР соответствуют (неявным) частным решениям системы (1.1), (1.2); которые выражаются через формулы из следствия 2 к предложению 1.

Таким образом, последние частные решения системы (1.1), (1.2) могут быть как орбитально устойчивыми, так и орбитально неустойчивыми.

Продолжая качественный анализ, заметим, что если рассматривать систему (1.6), (1.7) в области параметров IV, то периодических траекторий, стягиваемых по фазовому цилинду в точку, не существует [17].

Будем исследовать вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющихся гиперболических седел.

Заметим, что в области $W = \{(\alpha, \omega) \in \Pi^*: \omega > 0\}$ существует три (в условиях предложения 3) НПР системы (1.6), (1.7): одно положение равновесия отталкивающее, одно – притягивающее и одно – седловое.

Предложение 4. (a) Устойчивая сепаратриса в полосе Π для точки $(-\pi/2, 0)$ имеет в качестве α – предельного множества начало координат.

(b) Неустойчивая сепаратриса в полосе Π для точки $(-\pi/2, 0)$ имеет в качестве ω – предельного множества точку $(-\pi/2, 1/\sigma)$.

(c) Устойчивая сепаратриса в полосе Π^* для точки $(-\pi/2, 0)$ имеет в качестве α – предельного множества отталкивающее НПР в области W .

(d) Неустойчивая сепаратриса в полосе Π^* для точки $(-\pi/2, 0)$ имеет в качестве ω – предельного множества притягивающее НПР в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{\alpha, \omega\} \cup W$.

(e) Устойчивая сепаратриса в полосе $\Pi_{(-\pi, -\pi/2)}$ для точки $(-\pi, 0)$ имеет в качестве α – предельного множества отталкивающее НПР в области W .

(f) Неустойчивая сепаратриса в полосе $\Pi_{(-\pi, -\pi/2)}$ для точки $(-\pi, 0)$ имеет в качестве ω – предельного множества притягивающее НПР в области W .

(g) Две устойчивые сепаратрисы для седлового НПР в области W имеют в качестве α – предельных множеств начало координат и отталкивающее НПР в области W .

(h) Две неустойчивые сепаратрисы для седлового НПР в области W имеют в качестве ω – предельных множеств точку $(-\pi/2, 1/\sigma)$ и притягивающее НПР в области W .

Вопрос о предельных множествах других ключевых траекторий решается, благодаря предложению 4, очевидно (фиг. 3).

5. Характеристика некоторых классов траекторий движения твердого тела на плоскости. Построенный структурно устойчивый фазовый портрет, как уже указывалось, помогает "поднять" фазовые траектории в, так сказать, "промежуточное" динамическое трехмерное фазовое пространство с помощью первого уравнения (1.5) системы (1.5)–(1.7), зная вполне определенно проекцию фазового вектора.

Для получения конкретных траекторий движения тела на плоскости, вообще говоря, необходимо интегрирование кинематических соотношений (1.1) и получение в явном виде решений всеобъемлющей "составной" системы шестого порядка.

Однако качественный вид фазового портрета (фиг. 3) позволяет, не интегрируя численно или аналитически кинематические соотношения, получить информацию если и не о поведении твердого тела на плоскости "в целом", но о элементах качественного асимптотического поведения тела. Все это может быть получено в результате исследования предельных множеств, имеющихся у системы второго порядка (1.6), (1.7) на фазовом цилиндре. Качественный вид фазового портрета (фиг. 3) позволяет также сделать прямой вывод об отсутствии периодических траекторий, огибающих двумерный фазовый цилиндр.

В соответствии с глобальным фазовым портретом (фиг. 3), типичные траектории движения точки D твердого тела (фиг. 1) на плоскости делятся на следующие классы.

Неустойчивое стационарное движение твердого тела с нулевым углом атаки (центр масс – "сзади"), а также неустойчивое стационарное движение, соответствующее отталкивающему НПР, имеют следующие предельные движения:

(a) тело асимптотически стремится к вращению с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижного центра масс;

(b) тело асимптотически стремится к стационарному движению, соответствующему притягивающему НПР (угол атаки стремится к π слева или к $-\pi$ справа).

В заключение отметим тот факт, что рассмотренные классы движений (поскольку динамическая система в пространстве квазискоростей абсолютно структурно устойчива) обладает важным свойством (абсолютной) грубости [10]. Область физических параметров системы при этом обладает бесконечной мерой. Это является главным результатом работы, поскольку ранее полученные семейства [5, 6] соответствуют конечной мере в пространстве параметров, а сами семейства содержат бесконечное множество топологически неэквивалентных фазовых портретов.

Автор выражает благодарность В.А. Самсонову за постановку задачи и ценные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-01087) и программы "Университеты России".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин С.А. Избранные труды. М.: Наука, 1976. 495 с.
2. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 322 с.
3. Ерошин В.А., Самсонов В.А., Шамолин М.В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3. С. 23–27.
4. Самсонов В.А., Шамолин М.В., Ерошин В.А., Макаршин В.М. Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании: Препринт № 4396. М.: Имех МГУ, 1995. 41 с.
5. Шамолин М.В. Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 5. С. 611–614.
6. Шамолин М.В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Докл. РАН. 1996. Т. 349. № 2. С. 193–197.
7. Шамолин М.В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двупараметрическое семейство фазовых портретов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1996. № 4. С. 57–69.
8. Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании: Препринт № 4141. М.: Имех МГУ, 1991. 48 с.
9. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986. 86 с.
10. Шамолин М.В. Определение относительной грубости и двупараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51. Вып. 1. С. 175–176.
11. Андронов А.А., Понtryагин Л.С. Грубые системы // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14. № 5. С. 247–250.
12. Баутин Н.Н., Леонтьевич Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.
13. Шамолин М.В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. № 1. С. 52–58, 112.
14. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
15. Табачников В.Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1621. С. 18–24.
16. Шамолин М.В. Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удаленные точки, для динамических систем на плоскости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1993. № 1. С. 68–71, 112.
17. Шамолин М.В. Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. № 2. С. 52–56, 112.

Москва

Поступила в редакцию
20.11.1996