МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1999

УДК 624.07 : 534.1

© 1999 г. **О.Г. ПРИВАЛОВА, А.П. СЕЙРАНЯН**

ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ БИМОДАЛЬНЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Задача об отыскании оптимальной формы упругого стержня фиксированной длины и объема, теряющего устойчивость под действием максимально возможной сжимающей продольной силы, была сформулирована Лагранжем [1]. В [2–10] были получены решения этой задачи для различных видов граничных условий. В некоторых случаях, например, жесткого защемления с обоих концов, оказалось, что оптимальные стержни обладают двумя линейно независимыми формами потери устойчивости. В этих случаях особый интерес представляет исследование закритического поведения оптимальных стержней. В частности, в [11–14] утверждалось, что наличие нескольких форм потери устойчивости, характерное для оптимальных конструкций, приводит к структурной неустойчивости и большой чувствительности к несовершенствам. Закритическое поведение оптимальных стержней, шарнирно опертых на обоих концах и характеризуемых одной формой потери устойчивости, исследовалось в [4, 15].

В публикуемой статье задача Лагранжа рассматривается для случая упругой заделки стержня с обоих концов. С помощью аналитических соотношений, полученных ранее, для различных значений коэффициента жесткости заделки численно найдены бимодальные оптимальные решения, т.е. обладающие двумя линейно независимыми формами потери устойчивости.

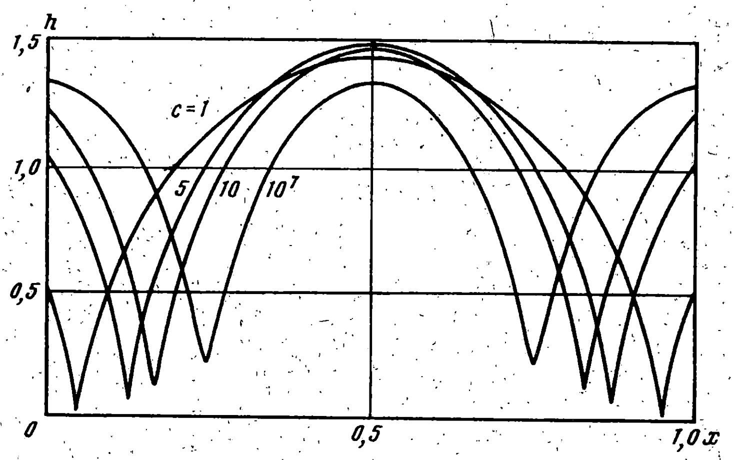
Далее методом возмущений исследуется закритическое поведение оптимальных стержней. Показано, что оно определяется четырьмя парами решений, ответвляющихся от тривиального состояния равновесия при силе $\lambda \geqslant \lambda_0$. Исследована устойчивость состояний равновесия в окрестности точки бифуркации λ_0. В частности, показано, что только две пары из четырех, отвечающих симметричной и антисимметричной формам потери устойчивости, являются устойчивыми. Этот вывод оказывается справедливым при любых значениях коэффициента жесткости заделки $c > 0$.

1. Задача оптимизации. Рассмотрим тонкий упругий стержень круглого, но переменного по длине сечения, нагруженного сжимающей продольной силой P. Предполагается, что стержень упруго защемлен с обоих концов с одинаковым коэффициентом жесткости заделки. Потеря устойчивости стержня в линейном приближении в безразмерных переменных описывается задачей на собственные значения

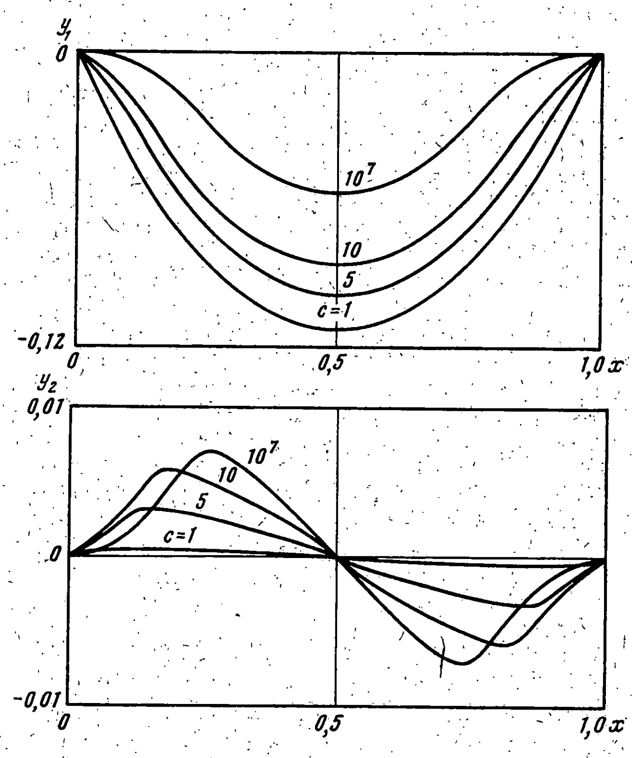
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(h^2\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\lambda\frac{d^2y}{dx^2}=0,\quad 0<x<1$$

$$y(0)=0,\quad \left(h^2\frac{d^2y}{dx^2}-c\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=0 \tag{1.1}$$

$$y(1)=0,\quad \left(h^2\frac{d^2y}{dx^2}+c\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}=0$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где $h(x)$ – площадь поперечного сечения стержня, $y(x)$ – функция прогиба, $c > 0$ – коэффициент жесткости заделки, λ – продольная сила. Эти безразмерные величины выражаются через размерные следующим образом

$$x = X / L, \quad y = Y / L, \quad h(x) = H(x) L / V$$

$$\lambda = 4\pi P L^4 / (E V^2), \quad c = 4\pi K L^3 / (E V^2)$$

где L, V, $H(x)$ – соответственно длина, объем и площадь поперечного сечения стержня, E – модуль Юнга, K – коэффициент жесткости заделки.

Задача на собственные значения (1.1) является самосопряженной и положительно определенной. Все собственные значения λ действительны и положительны.

Условие постоянства объема имеет вид

$$\int_0^1 h(x)dx = 1 \qquad (1.2)$$

Задача оптимизации состоит в отыскании функции площади поперечного сечения $h_0(x) \geqslant 0$, максимизирующей критическую силу потери устойчивости (минимальное собственное значение λ_0) и удовлетворяющей условию постоянства объема (1.2).

В [16] было показано, что оптимальное решение $h_0(x)$ при любых значениях коэффициента жесткости заделки $c > 0$ обладает двумя линейно независимыми формами потери устойчивости $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Наличие нескольких форм потери устойчивости, характерное для оптимальных конструкций, в теории катастроф носит название "принципа фаэтона" [13].

Точное решение задачи оптимизации записывается в виде интеграла [7, 8]:

$$x - x_* = \pm\frac{3}{2}\int_{h_*}^{h_0} \frac{t^3 dt}{\sqrt{C_1 t^3 - 3\lambda_0 t^4 - C_2^2}} \qquad (1.3)$$

где константы $x_*, h_*, C_1, C_2, \lambda_0$ выражаются через три неизвестные величины, которые находятся численно из решения трансцендентных уравнений и условия (1.2).

Оптимальные решения $h_0(x)$ для различных значений с и соответствующие им собственные функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ (симметричная и антисимметричная формы потери устойчивости) представлены на фиг. 1, 2. Собственные функции удовлетворяют условию ортонормированности

$$\int_0^1 \frac{dy_i}{dx}\frac{dy_j}{dx}dx = \delta_{ij} \quad (i, j = 1,2) \qquad (1.4)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Из фиг. 1 видно, что при уменьшении жесткости заделки с средний горб оптимальной формы стержня $h_0(x)$ расширяется и вытесняет два крайних горба.

2. Геометрически нелинейная задача. Рассмотрим конечные прогибы упругого стержня, нагруженного продольной силой, фиг. 3. Стержень считается нерастяжимым, его упругая линия описывается безразмерными функциями $u(s)$, $v(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$. Граничные условия, отвечающие упругому закреплению стержня с обоих концов с жесткостью заделки c, имеют вид

$$\begin{aligned} &v(0) = 0, \quad (h^2\theta' - c\theta)_{s=0} = 0 \\ &v(1) = 0, \quad (h^2\theta' + c\theta)_{s=1} = 0 \end{aligned} \qquad (2.1)$$

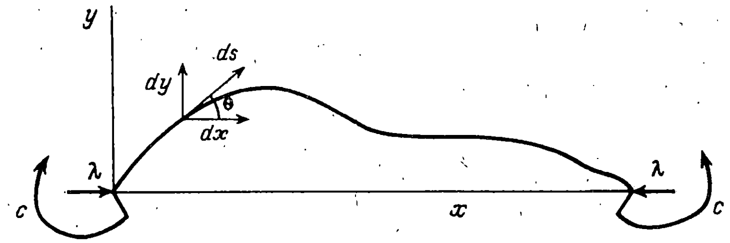
где $\theta(s)$ – угол наклона касательной к упругой линии (штрихом обозначено дифференцирование по s).

Так как $u' = \cos\theta$, $v' = \sin\theta$, то

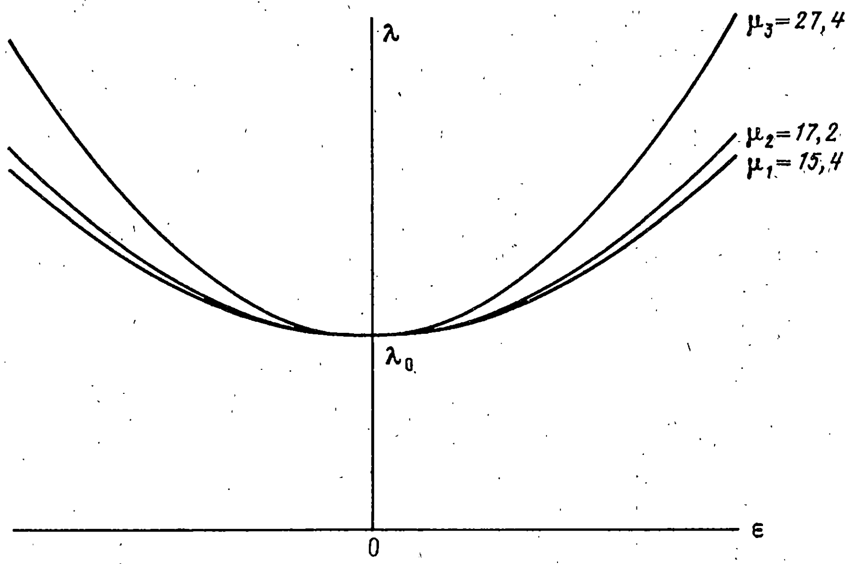
$$u(s) = \int_0^s \cos\theta ds, \quad v(s) = \int_0^s \sin\theta ds \qquad (2.2)$$

Поэтому граничное условие $v(1) = 0$ можно записать в виде

$$\int_0^1 \sin\theta ds = 0 \qquad (2.3)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Полная потенциальная энергия стержня запишется в виде интеграла [12, 17]:

$$U=\frac{1}{2}\int_0^1 h^2\theta'^2 ds-\lambda\int_0^1 (1-\cos\theta)ds+\frac{1}{2}c[\theta^2(0)+\theta^2(1)] \tag{2.4}$$

Равновесие стержня характеризуется минимумом полной потенциальной энергии при выполнении изопериметрического условия (2.3). Присоединив к U интеграл (2.3) с неизвестным множителем N, приравняем первую вариацию функционала к нулю

$$\delta\left(U+N\int_0^1 \sin\theta ds\right)=0 \tag{2.5}$$

Отсюда найдем нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее изгиб стержня

$$(h^2\theta')'+\lambda\sin\theta-N\cos\theta=0 \tag{2.6}$$

и граничные условия

$$(h^2\theta'-c\theta)_{s=0}=0,\quad (h^2\theta'+c\theta)_{s=1}=0 \tag{2.7}$$

Уравнение (2.6) можно также получить из условия статического равновесия стержня, причем N – вертикальная сила в левой опоре. Интегрируя уравнение (2.6) от 0 до 1 и используя изопериметрическое условие (2.3) и граничные условия (2.7), найдем выражение для константы N:

$$N = -c[\theta(0) + \theta(1)] \Big/ \int_0^1 \cos\theta\, ds \qquad (2.8)$$

Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения (2.6)–(2.8) и условие (2.3) позволяют при заданных силе λ и жесткостях $h^2(s)$ и c найти функцию $\theta(s)$ и, следовательно, определить упругую линию стержня $u(s)$, $v(s)$ из (2.2).

3. Закритическое поведение. Исследуем закритическое поведение оптимальных бимодальных стержней с площадью поперечного сечения $h_0(s)$ методом возмущений. От тривиального состояния равновесия $\theta(s) \equiv 0$ в точке бифуркаций λ_0 отщепляются новые состояния равновесия. Считая эти состояния равновесия малыми по норме, положим $\theta(s) = \varepsilon\theta_0(s)$, где ε – малый параметр, а функция $\theta_0(s)$ нормирована

$$\int_0^1 \theta_0^2(s)ds = 1 \qquad (3.1)$$

Таким образом, ε является нормой $\varepsilon = \left(\int \theta^2(s)ds\right)^{1/2}$. Подставим $\theta(s) = \varepsilon\theta_0(s)$ в уравнения (2.6)–(2.8). Нелинейность этих уравнений определяется членами $\sin \varepsilon\theta_0/\varepsilon$ и $\cos \varepsilon\theta_0$. Разложения этих членов в ряд по ε содержат лишь четные степени ε. Поэтому будем искать решение системы уравнений (2.6)–(2.8) и (2.3) в виде разложений по четным степеням малого параметра ε [4]:

$$\begin{aligned} &\theta_0(s) = \varphi(s) + \varepsilon^2\psi(s) + \ldots \\ &\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^2\mu + \ldots \end{aligned} \qquad (3.2)$$

В нулевом приближении получим задачу на собственные значения

$$(h_0^2\varphi')' + \lambda_0\varphi - N = 0, \quad N = -c[\varphi(0) + \varphi(1)] \qquad (3.3)$$

$$(h_0^2\varphi' - c\varphi)_{s=0} = 0, \quad (h_0^2\varphi' + c\varphi)_{s=1} = 0 \qquad (3.4)$$

$$\int_0^1 \varphi\, ds = 0, \quad \int_{0^-}^1 \varphi^2 ds = 1 \qquad (3.5)$$

где λ_0 – собственное значение, $\varphi(s)$ – собственная функция. Если уравнение (3.3) продифференцировать один раз и использовать в (3.3)–(3.5) $v' = \varphi$, $v(0) = 0$, то придем к обычной линейной задаче (1.1) об изгибе стержня, упруго защемленного с обоих концов. Минимальному собственному значению λ_0 этой задачи, как уже отмечалось, отвечают две линейно независимые формы потери устойчивости $v_1(s)$ и $v_2(s)$, представленные на фиг. 2 и удовлетворяющие условию (1.4). Поэтому функции $\varphi_1 = v_1'$ и $\varphi_2 = v_2'$ являются собственными функциями задачи (3.3)–(3.5), а общее решение $\varphi(s)$ имеет вид

$$\varphi(s) = \gamma_1\varphi_1(s) + \gamma_2\varphi_2(s) \qquad (3.6)$$

где γ_1 и γ_2 – константы. Налагая условие нормировки $\int \varphi^2 ds = 1$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, с учетом (1.4) получим связь

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 \qquad (3.7)$$

В следующем приближении по ε из (2.6)–(2.8) и (2.3) получается краевая задача относительно $\psi(s)$ с правой частью, зависящей от $\varphi(s)$:

$$(h_0^2\psi')' + \lambda_0\psi + c[\psi(0)+\psi(1)] = \frac{1}{6}\lambda_0\varphi^3 - \mu\varphi + \frac{1}{2}c[\varphi(0)+\varphi(1)]\left(\varphi^2 - \int_0^1 \varphi^2 ds\right) \quad (3.8)$$

$$(h_0^2\psi' - c\psi)_{s=0} = 0, \quad (h_0^2\psi' + c\psi)_{s=1} = 0 \quad (3.9)$$

$$\int_0^1 \psi\, ds = \frac{1}{6}\int_0^1 \varphi^3 ds \quad (3.10)$$

Умножим уравнение (3.8) на $\varphi_i(s)$ ($i = 1, 2$), проинтегрируем от 0 до 1 и используем условия (3.5) и (3.10). Затем подставим в полученное уравнение соотношение (3.6) и используем свойства симметрии $\varphi_1(s) = -\varphi_1(1-s)$, $\varphi_2(s) = \varphi_2(1-s)$ и условие нормировки (1.4). В результате получим нелинейные уравнения относительно неизвестных γ_1, γ_2 и μ:

$$\gamma_1^3 A + \gamma_1\gamma_2^2 B = \mu\gamma_1, \quad \gamma_1^2\gamma_2 B + \gamma_2^3 C = \mu\gamma_2 \quad (3.11)$$

$$A = \frac{1}{6}\lambda_0\int_0^1 \varphi_1^4 ds, \quad B = \frac{1}{2}\lambda_0\int_0^1 \varphi_1^2\varphi_2^2 ds + 2c\varphi_2(0)\int_0^1 \varphi_1^2\varphi_2 ds \quad (3.12)$$

$$C = \frac{1}{6}\lambda_0\int_0^1 \varphi_2^4 ds + \frac{4}{3}c\varphi_2(0)\int_0^1 \varphi_2^3 ds$$

Соотношение (3.7) дополняет уравнения (3.11) до полной системы. Эта система имеет следующие четыре группы решений, отщепляющихся от тривиального решения $\varphi \equiv 0$ в точке бифуркации λ_0:

$$(1)\quad \gamma_1 = \pm 1, \quad \gamma_2 = 0, \quad \mu_1 = A > 0, \quad \theta_1(s) = \pm\varepsilon\varphi_1(s) \quad (3.13)$$

$$(2)\quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \pm 1, \quad \mu_2 = C, \quad \theta_2(s) = \pm\varepsilon\varphi_2(s) \quad (3.14)$$

$$(3, 4)\quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{C-B}{A+C-2B}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{A-B}{A+C-2B}}$$

$$\mu_3 = \mu_4 = \frac{AC - B^2}{A+C-2B} \quad (3.15)$$

$$\theta_3(s) = \pm\varepsilon[\gamma_1\varphi_1(s) + \gamma_2\varphi_2(s)]$$

$$\theta_4(s) = \pm\varepsilon[\gamma_1\varphi_1(s) - \gamma_2\varphi_2(s)]$$

Радикал в (3.5) означает арифметический корень.

Первые две группы решений отвечают новым состояниям равновесия, возникающим из чисто антисимметричной и симметричной форм потери устойчивости, а третья и четвертая группы решений отвечают смешанным формам потери устойчивости. Решения $\theta_3(s)$ и $\theta_4(s)$ связаны соотношением $\theta_4(1-s) = \pm\varepsilon[\gamma_1\varphi_1(1-s) - \gamma_2\varphi_2(1-s)] = \pm\varepsilon[-\gamma_1\varphi_1(s) - \gamma_2\varphi_2(s)] = \theta_3(s)$, означающим, что они являются зеркальным отражением друг друга относительно середины стержня. Заметим, что эти решения существуют, если выражения под радикалом в (3.15) неотрицательны.

Величины μ_1, μ_2 и μ_3, γ_1, γ_2, отвечающие четырем группам решений (3.13)–(3.15), для различных значений параметра c представлены в таблице. Оказалось, что при всех $c > 0$ величины μ положительны (суперкритические бифуркации, возникающие при $\lambda \geqslant \lambda_0$). Типичное поведение (при $c = 10^7$) показано на фиг. 4. Следовательно, закритическое поведение бимодальных оптимальных стержней свидетельствует об отсутствии эффекта большой чувствительности к несовершенствам, что противо-

C	γ_1	γ_2	μ_1	μ_2	$\mu_3=\mu_4$
	1	0	15,41		
10^7	0	1		17,227	
	0,7214	0,695			27,43
	1	0	13,99		
10^2	0	1		16,05	
	0,726	0,689			25,3
	1	0	18,088		
10	0	1		9,923	
	0,608	0,794			22,39
	1	0	23,99		
5	0	1		8,121	
	0,4581	0,9			25,204

речит утверждениям авторов [11–14]. Однако возникает интересный вопрос, какие из новых положений равновесия устойчивы?

4. Исследование устойчивости состояний равновесия. Состояние равновесия устойчиво, если полная потенциальная энергия U из (2.4) достигает локального минимума при изопериметрическом условии (2.3). Поэтому в состоянии устойчивого равновесия $\theta(s)$ должны выполняться необходимые условия [18, 19]: первая вариация функционала

$$V = U + N\int_0^1 \sin\theta\, ds$$

равна нулю $\delta V = 0$, а вторая вариация неотрицательна $\delta^2 V \geqslant 0$ на произвольных гладких вариациях $\delta\theta(s)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^1 \cos\theta\delta\theta\, ds = 0 \tag{4.1}$$

$$\int_0^1 (\delta\theta)^2 ds = 1 \tag{4.2}$$

Условие (4.1) отвечает изопериметрическому условию (2.3), а (4.2) является условием нормировки.

Вторая вариация функционала V имеет вид

$$\delta^2 V = \frac{1}{2}\int_0^1 [h_0^2(\delta\theta')^2 ds - \lambda\cos\theta(\delta\theta)^2 - N\sin\theta(\delta\theta)^2]ds + \frac{1}{2}c[\delta\theta^2(0) + \delta\theta^2(1)] \tag{4.3}$$

Уравнение Эйлера – Лагранжа и условия трансверсальности для экстремали функционала $\delta^2 V$ при условиях (4.1), (4.2) приводят к задаче на собственные значения [18, 19]

$$\begin{gathered}(h_0^2\delta\theta')' + [\lambda\cos\theta + N\sin\theta]\delta\theta + \nu\delta\theta + \beta\cos\theta = 0\\ (h_0^2\delta\theta' - c\delta\theta)_{s=0} = 0, \quad (h_0^2\delta\theta' + c\delta\theta)_{s=1} = 0\end{gathered} \tag{4.4}$$

где ν и β – неизвестные множители Лагранжа, причем ν – собственное значение, а $\delta\theta$ – собственная функция. Величина β выражается линейно через функцию $\delta\theta$ с помощью интегрирования уравнения (4.4) от нуля до единицы.

Умножим уравнение (4.4) на $\delta\theta$, проинтегрируем от 0 до 1 и используем условия (4.1)–(4.3). В результате имеем $\nu = \delta^2 V$. Поэтому минимум функционала $\delta^2 V$ при условиях (4.1), (4.2) равен наименьшему собственному значению $\nu_{\min}$. Итак, необходимое условие $\delta^2 V \geqslant 0$ при условиях (4.1), (4.2) сводится к неотрицательности собственного значения $\nu_{\min}$ задачи (4.4).

Исследуем устойчивость состояний равновесия, выражаемых разложениями

$$\theta(s) = \varepsilon[\varphi(s) + \varepsilon^2\psi(s) + \ldots]$$
$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^2\mu + \ldots \tag{4.5}$$

Величины первого приближения $\varphi_k(s) = \gamma_1\varphi_1(s) + \gamma_2\varphi_2(s)$, μ_k ($k = 1, \ldots, 4$) для четырех групп решений определены в (3.13)–(3.15). Подставляя разложения (4.5) в задачу на собственные значения (4.4) и условие (4.1), получим с точностью до членов второго порядка по ε:

$$(h_0^2\delta\theta')' + [\lambda_0 + \varepsilon^2 g_k(s)]\delta\theta + \nu_{\min}\delta\theta + \beta(1 - \varepsilon^2\varphi_k^2/2) = 0 \tag{4.6}$$

$$g_k(s) = \mu_k - \lambda_0\varphi_k^2(s)/2 - c[\varphi_k(0) + \varphi_k(1)]\varphi_k(s) \tag{4.7}$$

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{\varepsilon^2\varphi_k^2}{2}\right)\delta\theta\, ds = 0, \quad \int_0^1 \delta\theta^2 ds = 1 \tag{4.8}$$

Граничные условия для функции $\delta\theta$ из (4.4) остаются неизменными.

Будем искать решение задачи (4.6)–(4.8) методом возмущений

$$\delta\theta(s) = \delta\theta_0(s) + \varepsilon^2\chi(s) + \ldots$$
$$\nu_{\min} = \nu_0 + \varepsilon^2\nu_1 + \ldots, \quad \beta = \beta_0 + \varepsilon^2\beta_1 + \ldots \tag{4.9}$$

В нулевом приближении по ε получим линейную задачу (3.3)–(3.5) относительно функции $\delta\theta_0$:

$$(h_0^2\delta\theta_0')' + [\lambda_0 + \nu_0]\delta\theta_0 + \beta_0 = 0$$
$$(h_0^2\delta\theta_0' - c\delta\theta_0)_{s=0} = 0, \quad (h_0^2\delta\theta_0' + c\delta\theta_0)_{s=1} = 0 \tag{4.10}$$
$$\int_0^1 \delta\theta_0 ds = 0, \quad \int_0^1 \delta\theta_0^2 ds = 1$$

Так как λ_0 по определению является минимальным собственным значением этой задачи, то $\nu_0 = 0$. Этому собственному значению соответствуют собственные функции

$$\delta\theta_0 = \alpha_1\varphi_1(s) + \alpha_2\varphi_2(s) \tag{4.11}$$

где $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ – собственные функции, описанные в *п.* 3, а α_1, α_2 – неизвестные множители, удовлетворяющие, согласно последнему условию (4.10), соотношению $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$. С использованием граничных условий выражение для константы β_0 имеет вид

$$\beta_0 = c[\delta\theta_0(0) + \delta\theta_0(1)] \tag{4.12}$$

В следующем приближении по ε из уравнений (4.6)–(4.8) получим соотношения

$$(h_0^2\chi')' + \lambda_0\chi + \nu_1\delta\theta_0 + g_k\delta\theta_0 - \beta_0\varphi_k^2 + \beta_1 = 0 \tag{4.13}$$

$$\int_0^1 \chi\, ds = \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_k^2\delta\theta_0 ds \tag{4.14}$$

Граничные условия для функции χ такие же, как и для функции $\delta\theta_0$ из (4.10). Умножим уравнение (4.13) на $\varphi_i(s)$ ($i = 1, 2$) и проинтегрируем от 0 до 1. Выполняя затем интегрирование по частям, получим

$$\int_0^1 [(h_0^2\varphi_i')' + \lambda_0\varphi_i]\chi\, ds + \nu_1\int_0^1 \delta\theta_0\varphi_i ds + \int_0^1 g_k\delta\theta_0\varphi_i ds - \frac{\beta_0}{2}\int_0^1 \varphi_k^2\varphi_i ds = 0 \tag{4.15}$$

Так как собственные функции φ_i удовлетворяют уравнению (3.3), то используя (4.12) и (4.14) в (4.15), имеем

$$\frac{1}{2}c[\varphi_i(0) + \varphi_i(1)]\int_0^1 \varphi_k^2\delta\theta_0 ds - \int_0^1 g_k\varphi_i\delta\theta_0 ds + \tag{4.16}$$

$$+\frac{1}{2}c[\delta\theta_0(0) + \delta\theta_0(1)]\int_0^1 \varphi_k^2\varphi_i ds - \nu_1\int_0^1 \varphi_i\delta\theta_0 ds = 0$$

$(i = 1, 2;\ k = 1, \ldots, 4)$

Уравнение (4.16) линейно относительно $\delta\theta_0$. Подставляя $\delta\theta_0$ из (4.11) в (4.16), получим систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных множителей α_1, α_2 с симметрической матрицей a_{ij}:

$$\sum_{j=1}^{2} [a_{ij} - \nu_1\delta_{ij}]\alpha_j = 0 \quad (i,\ j = 1,\ 2) \tag{4.17}$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2}c[\varphi_i(0) + \varphi_i(1)]\int_0^1 \varphi_k^2\varphi_j ds + \frac{1}{2}c[\varphi_j(0) + \varphi_j(1)]\int_0^1 \varphi_k^2\varphi_i ds - \int_0^1 g_k\varphi_i\varphi_j ds \tag{4.18}$$

Чтобы система уравнений (4.17) имела нетривиальное решение, ее детерминант должен равняться нулю. Отсюда получается квадратное уравнение относительно поправки собственного значения ν_1 – величины второй вариации $\delta^2 V$ во втором приближении. Следовательно, необходимое условие неотрицательности $\delta^2 V$ при условиях (4.1), (4.2) сводится к тому, что оба корня ν_1 этого квадратного уравнения должны быть неотрицательными. Из вида (4.17) непосредственно следует, что матрица a_{ij} должна быть неотрицательно определена, т.е. должны выполняться условия Сильвестра

$$a_{11} \geqslant 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geqslant 0 \tag{4.19}$$

Эти условия должны выполняться при устойчивости решения $\theta_k(s)$, μ_k ($k = 1, \ldots, 4$), определенного в (3.13)–(3.15). Отметим, что функции g_k, входящие в (4.18), определены в (4.7). Строгое выполнение неравенств (4.19) означает устойчивость исследуемого решения. Если условия (4.19) не выполняются для какого-то $\theta_k(s)$, μ_k, то это состояние равновесия неустойчиво.

Исследуем сначала устойчивость тривиального состояния равновесия $\theta(s) \equiv 0$ при $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^2\mu$. Подставляя в (4.18) величины $\varphi_k(s) = 0$, $g_k = \mu$ и используя условие (1.4), имеем $a_{ij} = -\mu\delta_{ij}$. Из (4.17) найдем двойной корень $\nu_1 = -\mu$. Таким образом, условия устойчивости (4.19) сводятся к $\mu \leqslant 0$. Это означает, что тривиальное решение $\theta(s) \equiv 0$ устойчиво при $\lambda < \lambda_0$ и неустойчиво при $\lambda > \lambda_0$, что и следовало ожидать.

Проверка условий (4.19) для бифуркаций (3.13)–(3.15) показала, что только первые две группы решений $\theta_k(s)$, μ_k ($k = 1, 2$) устойчивы, а третья и четвертая группы решений (3.15) неустойчивы. Этот вывод оказывается справедливым для всех значений $c > 0$.

Таким образом, исследование закритического поведения оптимальных стержней с площадью поперечного сечения $h_0(s)$ с учетом геометрической нелинейности показывает, что все бифуркации $\theta_k(s)$ ($k = 1, \ldots, 4$), ответвляющиеся от тривиального состояния равновесия $\theta(s) \equiv 0$, являются суперкритическими $\mu_k > 0$ ($k = 1, \ldots, 4$), однако только первые две группы решений $\theta_1(s) = \pm\varepsilon\varphi_1(s)$ и $\theta_2(s) = \pm\varepsilon\varphi_2(s)$, отвечающие чисто антисимметричным и симметричным формам потери устойчивости соответственно, являются устойчивыми, в то время как решения $\theta_3(s)$ и $\theta_4(s)$, отвечающие смешанным формам потери устойчивости, неустойчивы.

Полученные результаты противоречат неоднократным утверждениям авторов [11–14], основанным на упрощенных примерах, относительно "опасности" оптимизации, что оптимизация является источником структурной неустойчивости, что наличие нескольких форм потери устойчивости, характерное для оптимальных конструкций, приводит к большой чувствительности к несовершенствам и т.п.

Авторы благодарят Э.И. Григолюка и Стивена Л. Кокса (Хьюстон, США) за полезное обсуждение вопросов закритического поведения стержней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lagrange J.-L.* Sur la figure des colonnes // Ouvres de Lagrange (Publ. de M.J.-A. Serret). Paris: Gauthier – Villars, 1868. V. 2. P. 125–170.
2. *Clausen T.* Über die form architektonischer Säulen // Bull. St.-Petersb. Acad. Sci. Phys.-Math. Cl. 1851. V. 9. P. 369–380.
3. *Николаи Е.Л.* Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонн // Изв. Петерб. политехн. ин-та. 1907. Т. 8. Вып. 1. С. 255–288.
4. *Keller J.B.* The shape of the strongest column // Arch. Ration. Mech. Analysis. 1960. V. 5. No. 4. P. 275–285.
5. *Tadjbakhsh I., Keller J.B.* Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1962. V. 29. No. 1. P. 159–164.
6. *Olhoff N., Rasmussen S.H.* On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns // Intern. J. Solids and Structures. 1977. V. 13. No. 7. P. 605–614.
7. *Сейранян А.П.* Об одном решении задачи Лагранжа // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 2. С. 337–340.
8. *Сейранян А.П.* Об одной задаче Лагранжа // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. С. 101–111.
9. *Masur E.F.* Optimal structural design under multiple eigenvalue constraints // Intern. J. Solids and Structures. 1984. V. 20. No. 3. P. 211–231.
10. *Cox S.L., Overton M.L.* On the optimal design of columns against buckling // SIAM J. Math. Analysis. 1992. V. 23. No. 2. P. 287–325.
11. *Thompson J.M.T.* Optimization as a generator of structural instability. Letter to the editor // Intern. J. Mech. Sci. 1972. V. 14. No. 9. P. 627–629.
12. *Thompson J.M.T., Hunt G.W.* A general theory of elastic stability. London.: Wiley, 1973. 322 p.
13. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.
14. *Томпсон Дж.М.Т.* Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.
15. *Frauenthal J.C.* Initial postbuckling behavior of optimally designed columns and plates // Intern. J. Solids and Structures. 1973. V. 9. No. 1. P. 115–127.
16. *Сейранян А.П.* Новые решения задачи Лагранжа // Докл. РАН. 1995. Т. 342. № 2. С. 182–184.
17. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 334 с.
18. *Лаврентьев М., Люстерник Л.* Основы вариационного исчисления. М.; Л.: Глав. ред. общетехн. лит. и номогр., 1935. Т. 1. Ч. 1. 148 с.; Т. 1. Ч. 2. 400 с.
19. *Цлаф Л.Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М.: Наука, 1970. 191 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.06.1997