

УДК 539.3

© 1999 г. С.Ю. ВЕСЕЛКОВ

**УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ,
 НАГРУЖЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ**

Методом Рэлея – Ритца найдено значение эйлеровой критической силы и формы потери устойчивости для прямоугольной пластины, нагруженной по одной из длинных кромок сосредоточенной силой и опертой на абсолютно жесткое основание (без трения) по другой.

Рассмотрим сначала плоскую задачу теории упругости для пластины, нагруженной по кромке $y = H$ сосредоточенной силой P и опертой на абсолютно жесткое основание (без трения) по кромке $y = 0$ (фиг. 1).

Для уравнения

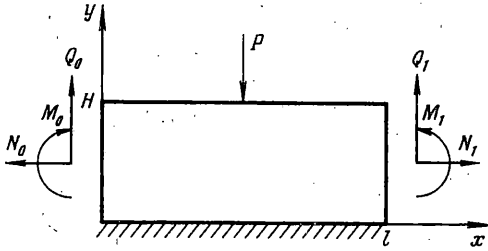
$$\Delta \Delta F = 0 \tag{1}$$

где F – функция напряжений, краевые условия запишутся в виде:

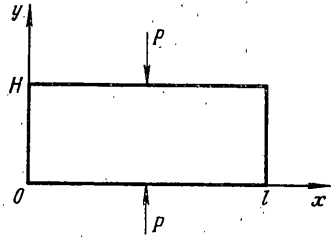
$$\begin{aligned} \sigma_{yy}|_{y=H} &= P\delta(x - l/2), \quad \sigma_{xy}|_{y=H} = 0 \\ v|_{y=0} &= 0, \quad \sigma_{xy}|_{y=0} = 0 \end{aligned}$$

Предположим, что $l \gg H$. В этом случае наиболее важно подчинить решение краевым условиям на длинных сторонах пластины [7]. Условиям на коротких сторонах можно удовлетворить лишь в виде задания главного момента M_0, M_1 и составляющих главного вектора N_0, Q_0, N_1, Q_1 (фиг. 1), не заботясь о законе распределения напряжений по высоте H в сечениях $x = 0$ и $x = l$ (как показали дополнительные исследования, полученное ниже решение оказывается достаточно точным и при $l = H$). Основываясь на результатах [7], получим следующее решение плоской задачи:

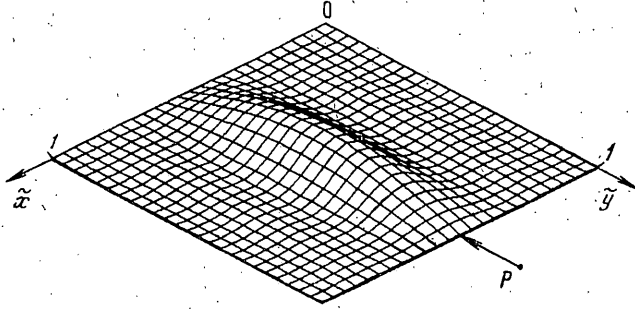
$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sum_{m=1}^N C_m \times \\ &\times \left[\frac{\cos h(m\beta) \cos h(z)m\beta - \sin h(m\beta) \cos h(z) - \sin h(m\beta)z \sin h(z)}{\cos h(m\beta) \sin h(m\beta) + m\beta} \right] \sin \frac{m\pi x}{l} \\ \sigma_{yy} &= - \sum_{m=1}^N C_m \times \\ &\times \left[\frac{m\beta \cos h(m\beta) \cos h(z) - \sin h(m\beta)z \sin h(z) + \sin h(m\beta) \cos h(z)}{\cos h(m\beta) \sin h(m\beta) + m\beta} \right] \sin \frac{m\pi x}{l} \\ \sigma_{xy} &= - \sum_{m=1}^N C_m \left[\frac{\sin h(z) \cos h(m\beta)m\beta - \sin h(m\beta)z \cos h(z)}{\cos h(m\beta) \sin h(m\beta) + m\beta} \right] \cos \frac{m\pi x}{l} \end{aligned} \tag{2}$$



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

где $\beta = \pi H/l$, $z = m\pi y/l$, C_m – коэффициенты разложения δ – функции в ряд Фурье:

$$C_m = -\frac{2P \sin(m\pi/N)}{l(m\pi/N)} \sin \frac{m\pi}{2} \quad (3)$$

Перейдем теперь к исследованию устойчивости рассматриваемой пластины. Пусть ее кромки пластины шарнирно оперты относительно поперечного перемещения $W(x, y)$, т.е.

$$W(x, y)|_{\Gamma} = \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial n^2} |_{\Gamma} = 0 \quad (4)$$

где Γ – граница пластины, n – нормаль к контуру.

В рамках линейной теории, решение проблемы устойчивости сводится к нахождению собственных значений дифференциального оператора

$$\Delta \Delta W = \frac{h}{D} \left[\sigma_{xx} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \sigma_{yy} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] \quad (5)$$

при краевых условиях (4) (h – толщина полосы, D – ее цилиндрическая жесткость, σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} – компоненты напряжения определяемые формулами (2)).

Введем замену переменных $y = H\tilde{y}$, $x = l\tilde{x}$.

Задачу (4)–(5) можно заменить эквивалентной задачей минимизации функционала

$$J = \frac{1}{2H^2} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{1}{k^3} \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \tilde{x}^2} \right)^2 + \frac{2}{k} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \tilde{y}^2} + k \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \tilde{y}^2} \right)^2 - \frac{2(1-\nu)}{k} \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \tilde{y}^2} - \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \right)^2 \right) - \frac{hH}{D} \left[\bar{\sigma}_{xx} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \bar{\sigma}_{yy} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \frac{2\bar{\tau}_{xy}}{k} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \tilde{y}} \right] \right\} d\tilde{x} d\tilde{y} \quad (6)$$

Таблица 1

Таблица 4

N	5	10	15	20	50	k = l/H	γ = P*H/D		
							Тимошенко [4]	Leggett [6]	Yamaki [7]
γ	18,873	18,645	18,362	18,354	18,354				
Таблица 2									
k	1	1,5	2	2,5	3	1,0	18,82	24,24	25,66
γ	36,994	21,518	18,354	18,272	18,267	1,5	13,97	—	17,90
						2,0	12,92	14,88	14,89
						2,5	12,65	14,52	—
Таблица 3									
k	1	1,5	2	2,5	3	2,5	12,65	14,52	—
γ	19,979	17,653	15,213	15,176	15,143	3,0	12,59	14,45	14,45

где $k = l/H$, а \bar{W} , $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{yy}$, $\bar{\tau}_{xy}$ — соответственно прогиб и компоненты тензора напряжений, записанные в новой системе координат.

Запишем функцию прогиба в виде

$$\bar{W} = \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} A_{nm} \sin n\pi\bar{x} \sin m\pi\bar{y} \quad (7)$$

Используя энергетический критерий устойчивости в форме Брайана [1], находим первую (эйлерову) критическую силу и коэффициенты A_{km} , определяющие с точностью до константы форму потери устойчивости.

Представим интенсивность критической силы в виде

$$P^* = \gamma D / (hH) \quad (8)$$

В табл. 1 дана зависимость значений параметра γ от числа (N) членов ряда (2) ($k = 2$, $N_1 = 2$, $N_2 = 3$).

Зависимость γ от соотношения сторон полосы $k = l/H$ представлена в табл. 2.

Как показали вычисления, при $k > 3$ величина критической силы P^* практически перестает изменяться. Поэтому для очень длинной полосы можно приближенно принять $\gamma \approx 18,2$.

При $k \approx 1$ основная форма, по которой пластина теряет устойчивость, приближенно определяется выражением $B \sin \bar{x} \sin \bar{y}$, где B некоторая константа. С ростом k , в направлении перпендикулярном линии действия силы форма потери устойчивости становится более сложной (фиг. 2).

Изложенный метод позволяет решить плоскую задачу теории упругости при произвольных усилиях, действующих на длинных кромках. Для контроля полученных результатов приведем, в частности, решение задачи Зоммерфельда [9, 6] (фиг. 3).

Полагая, что на шарнирно опертых кромках пластины $y = 0$ и $y = H$ действуют сосредоточенные сжимающие силы P , компоненты тензора напряжений запишем так:

$$\sigma_{xx} = \sum_{m=1}^N \frac{2P \sin(m\pi/N)}{l\pi(m\pi/N)} \sin \frac{m\pi}{2} \left[\frac{\cos h(\bar{z})m\bar{\beta} - \bar{z} \cos h(\bar{z})}{m\bar{\beta} + \sin h(m\bar{\beta})} + \frac{-\sin h(\bar{z}) + \bar{z} \cos h(\bar{z}) \cos h(m\bar{\beta}) + \sin h(\bar{z}) \cos h(m\bar{\beta}) - \sin h(m\bar{\beta}) \cos h(\bar{z})}{m\bar{\beta} + \sin h(m\bar{\beta})} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\sin h(m\bar{\beta})\bar{z} \sin h(\bar{z})}{m\bar{\beta} + \sin h(m\bar{\beta})} \right] \sin m\pi\bar{x} \\
\sigma_{yy} = & \sum_{m=1}^N \frac{2P \sin(m\pi/N)}{\pi(m\pi/N)} \sin \frac{m\pi}{2} \left[\frac{\cos h(\bar{z})m\bar{\beta} - \bar{z} \cos h(\bar{z})}{m\bar{\beta} + \sin h(m\bar{\beta})} + \right. \\
& + \frac{\sin h(\bar{z}) + \bar{z} \cos h(\bar{z}) \cos h(m\bar{\beta}) - \cos h(m\bar{\beta}) \sin h(\bar{z})}{m\bar{\beta} + \sin h(m\bar{\beta})} + \\
& \left. + \frac{-\sin h(m\bar{\beta})\bar{z} \sin h(\bar{z}) + \sin h(m\bar{\beta}) \cos h(\bar{z})}{m\bar{\beta} + \sin h(m\bar{\beta})} \right] \sin m\pi\bar{x} \quad (9) \\
\tau_{xy} = & \sum_{m=1}^N \frac{2P}{\pi} \frac{\sin(m\pi/N)}{(m\pi/N)} \sin \frac{m\pi}{2} \left[\frac{\sin h(\bar{z})m\bar{\beta} + \bar{z} \sin h(\bar{z}) \cos h(m\bar{\beta})}{m\bar{\beta} + \sin h(m\bar{\beta})} - \right. \\
& \left. \frac{\bar{z} \sin h(\bar{z}) - \sin h(m\bar{\beta})\bar{z} \cos h(\bar{z})}{m\bar{\beta} + \sin h(m\bar{\beta})} \right] \cos m\pi\bar{x}
\end{aligned}$$

Используя представление прогиба в виде ряда (7), получаем значения параметра γ для различных k (табл. 3).

Разумеется, результаты приведенные в табл. 3 не претендуют на улучшение имеющихся многочисленных [2, 6, 8, 10] решений классической задачи Зоммерфельда. Однако их близость с уже известными значениями критической силы (табл. 4) дает основание считать верным (как полученное при помощи тех же алгоритмов и программ) и решение рассматриваемой задачи (фиг. 1), для которой автору неизвестны какие-либо опубликованные результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости М.: Физматгиз, 1959. 364 с.
2. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312 с.
3. Sommerfeld A. Über die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen // ZAMP. 1906. V. 54. N. 1. S. 113–153.
4. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М., Л.: Гостехиздат, 1946. 532 с.
5. Алфутов Н.А., Попов Б.Г. Расчет локально-нагруженных прямоугольных пластин на устойчивость вариационным методом // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 3. С. 120–127.
6. Leggett D.M.A. The effect of two isolated forces on the elastic stability of flat rectangular plate // Soc. Camb. Phil. Proc. 1937. V. 33. No. 3. P. 325–339.
7. Yamaki N. Buckling of a rectangular plate under locally distributed forces applied on the two opposite edges // Sci. Repts Res. Inst. Ser. B. High Speed Mech. Tohoku Univ. 1953. V. 3. P. 71–87; 1954. V. 4. P. 55–71.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
4.06.1996