

УДК 539.3

© 1999 г. В.И. ГУЛЯЕВ, А.А. ГРОМ, Н.А. СНЕЖКО

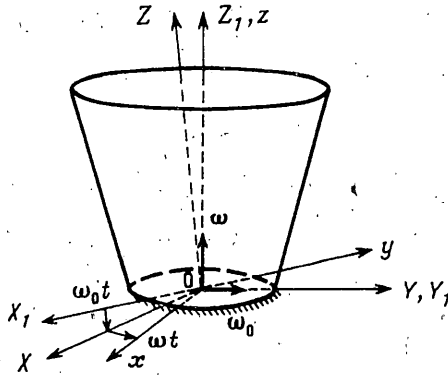
## ПРЕЦЕССИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СЛОЖНОМ ВРАЩЕНИИ

Вопросам исследования колебаний тонких вращающихся оболочек посвящены работы [1–5]. Колебания тонких оболочек, совершающих сложное вращение, сопровождаются дополнительными динамическими эффектами, свойственными деформируемым системам, элементы которых участвуют в нескольких видах движения одновременно. Гироскопическое взаимодействие между этими движениями приводит к утрате системой общей фазы вибраций и возбуждению в ней прецессионных колебаний, в которых форма движения имеет вид бегущей волны. Исследование динамики таких систем методами спектрального анализа сопряжено с дополнительными трудностями, вызванными тем, что при их вращении спектр частот и форм собственных колебаний расщепляется и эволюционирует с изменением угловой скорости. Поэтому для исследования таких систем более удобным оказывается непосредственное математическое моделирование указанных процессов методами численного анализа.

В данной работе рассмотрена задача о колебаниях вращающейся упругой конической оболочки, ось вращения которой совершает плоский поворот. В квазистатической постановке подобная задача для диска исследовалась в [6]. Ниже она решается с учетом гироскопического взаимодействия между вращательным переносным движением системы и относительными упругими колебаниями элементов оболочки. В результате решения поставленной задачи обнаружено, что сложное вращение системы является источником возбуждения ее прецессионных колебаний, которые при определенных условиях могут носить резонансный характер.

Установлено также, что порождаемый сложным вращением, действующий на оболочку и передающийся на ее опорный контур упругий момент может значительно превосходить гироскопический момент сложного вращения эквивалентного жесткого ротора. Выявленные эффекты могут иметь место в роторах авиационных двигателей в моменты выполнения ими маневров переориентации.

**1. Постановка задачи.** Пусть тонкая коническая оболочка одним из своих торцов связана с жестким основанием, вращающимся с постоянной по модулю угловой скоростью  $\omega$  относительно оси симметрии  $OZ_1$ , которая в свою очередь совершает плоский поворот со скоростью  $\omega_0$  (фиг. 1). Другой край оболочки свободен. Для описания ее динамики введем следующие правые системы координат:  $OXYZ$  – инерциальная система координат с началом в центре малого основания оболочки, ось  $OY$  которой совпадает с вектором  $\omega_0$  поворота оси вращения оболочки;  $OX_1Y_1Z_1$  – связанная с основанием оболочки прямоугольная система, ось  $OZ_1$  которой является осью собственного вращения, а ось  $OY_1$  совпадает с осью  $OY$ ;  $Oxyz$  – система, ось  $Oz$  которой совпадает с осью оболочки  $OZ_1$ , а две другие оси вращаются вместе с основанием с угловой скоростью  $\omega$ . На срединной поверхности оболочки введем ортогональную криволинейную систему координат  $ox^1x^2x^3$ , в которой координатная линия  $x^1$  направлена в окружном направлении,  $x^2$  – в меридиональном,  $x^3$  – по внешней нормали к поверхности оболочки.



Фиг. 1

Уравнение динамического равновесия действующих на элементы оболочки сил и моментов представим в виде

$$\nabla_{\alpha} \mathbf{T}^{\alpha} + \mathbf{p} = 0, \quad \nabla_{\alpha} \mathbf{M}^{\alpha} + (\mathbf{e}^{\alpha} \chi \mathbf{T}^{\alpha}) = 0 \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{T}^{\alpha}$  – вектор внутренних сил в сечении оболочки ( $\alpha = 1, 2$ );  $\mathbf{M}^{\alpha}$  – вектор внутренних моментов;  $\nabla_{\alpha}$  – символ ковариантной производной;  $\mathbf{p}$  – вектор интенсивности внешних сил.

В качестве внешних сил в рассматриваемом случае выступают силы инерции сложного вращения оболочки, поэтому

$$\mathbf{p} = \gamma h \mathbf{a} \quad (1.2)$$

где  $\gamma$  – плотность материала оболочки,  $h$  – ее толщина,  $\mathbf{a}$  – вектор абсолютного ускорения элемента оболочки, подсчитываемый по формуле теоремы Кориолиса [2]:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_c \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{a}_e$ ,  $\mathbf{a}_r$ ,  $\mathbf{a}_c$  – векторы переносного, относительного и кориолисова ускорений, соответственно. Для их вычисления применяются формулы

$$\mathbf{a}_e = \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \chi [\boldsymbol{\Omega} \chi \mathbf{r}], \quad \mathbf{a}_r = d^2 \mathbf{r} / dt^2, \quad \mathbf{a}_c = 2 \chi \boldsymbol{\Omega} \chi d \mathbf{r} / dt \quad (1.4)$$

Здесь  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\omega}_0 \chi \boldsymbol{\omega}$  – соответственно векторы абсолютных угловой скорости и углового ускорения подвижной системы координат  $Ox_1 y_1 z_1$ ;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор элемента оболочки в этой системе координат.

Контравариантные компоненты векторов  $\mathbf{a}_e$ ,  $\mathbf{a}_r$ ,  $\mathbf{a}_c$  вдоль осей локального базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$  определяются равенствами

$$\begin{aligned} a_e^1 &= 0 \\ a_e^2 &= \omega^2 \sin(\alpha + \nu_2 / \sqrt{a_{22}}) \left\{ \sin(\alpha + \nu_2 / \sqrt{a_{22}}) v / a_{22} + [\cos(\alpha + \nu_2 / \sqrt{a_{22}}) w + R] / \sqrt{a_{22}} \right\} + \\ &+ 2\omega_0 \omega \cos(\alpha + \nu_2 / \sqrt{a_{22}}) R \sin(x^1 + \omega t) / \sqrt{a_{22}} \\ a_e^3 &= \omega^2 \cos(\alpha + \nu_2 / \sqrt{a_{22}}) \left[ \sin(\alpha + \nu_2 / \sqrt{a_{22}}) v / \sqrt{a_{22}} + \cos(\alpha + \nu_2 / \sqrt{a_{22}}) w + R \right] - \\ &- 2\omega_0 \omega \sin(\alpha + \nu_2 / \sqrt{a_{22}}) R \sin(x^1 + \omega t) \\ a_r^1 &= (\partial^2 u / \partial t^2) / a_{11}, \quad a_r^2 = (\partial^2 v / \partial t^2) / a_{22}, \quad a_r^3 = \partial^2 w / \partial t^2 \\ a_c^1 &= -2\omega [\cos(\alpha + \nu_2 / \sqrt{a_{22}}) \dot{w} / \sqrt{a_{11}} + \sin(\alpha + \nu_2 / \sqrt{a_{22}}) \dot{v} / \sqrt{a_{11}}] \\ a_c^2 &= 2\omega \sin(\alpha + \nu_2 / \sqrt{a_{22}}) \dot{u} / \sqrt{a_{11}}, \quad a_c^3 = 2\omega \cos(\alpha + \nu_2 / \sqrt{a_{22}}) \dot{u} / \sqrt{a_{11}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $R$  – расстояние от элемента оболочки до ее оси;  $\alpha$  – угол между касательной к образующей оболочки и ее осью;  $u, v, w$  – ковариантные компоненты вектора упругих перемещений. При выводе этих равенств учтена дополнительная геометрическая нелинейность задачи, связанная с изменением в процессе колебаний расстояния от оси оболочки до рассматриваемого элемента и его ориентации, а также отброшены слагаемые, содержащие малые множители  $\omega_0^2$ .

Подставив эти выражения в (1.2), а затем в (1.1), получим уравнения динамического равновесия оболочки при сложном вращении. Вытекающие из них уравнения силовой группы в развернутом виде имеют форму:

$$\begin{aligned} & \partial T^{11} / \partial x^1 - T^{13} b_1^1 + \partial T^{12} / \partial x^2 - \gamma h \left\{ \dot{u} / a_{11} - 2\omega [\cos(\alpha + v_2 / \sqrt{a_{22}}) \dot{w} / \sqrt{a_{11}} + \right. \\ & \left. + \sin(\alpha + v_2 / \sqrt{a_{22}}) \dot{v} / \sqrt{a_{11}}] \right\} = 0 \\ & \partial T^{12} / \partial x^1 + \partial T^{22} / \partial x^2 - T^{23} b_2^2 - \gamma h \left\{ \dot{v} / a_{22} + \omega^2 \sin(\alpha + v_2 / \sqrt{a_{22}}) \times \right. \\ & \times [\sin(\alpha + v_2 / \sqrt{a_{22}}) v / a_{22}] + (\cos \alpha w + R) / \sqrt{a_{22}} \left. \right\} + 2\omega_0 \omega R \cos(\alpha + v_2 / \sqrt{a_{22}}) \times \\ & \times \sin(x^1 + \omega t) / \sqrt{a_{22}} + 2\omega \sin(\alpha + v_2 / \sqrt{a_{22}}) \dot{u} / \sqrt{a_{11}} \left. \right\} = 0 \quad (1.6) \\ & \partial T^{13} / \partial x^1 + T^{11} b_{11}^1 + \partial T^{23} / \partial x^2 + T^{22} b_{22}^2 - \gamma h \left\{ \dot{w} + \omega^2 \cos(\alpha + v_2 / \sqrt{a_{22}}) [R + \sin(\alpha + \right. \\ & \left. + v_2 / \sqrt{a_{22}}) v / \sqrt{a_{22}} + \cos(\alpha + v_2 / \sqrt{a_{22}}) w] - 2\omega_0 R \sin(\alpha + v_2 / \sqrt{a_{22}}) \sin(x^1 + \omega t) + \right. \\ & \left. + 2\omega \cos(\alpha + v_2 / \sqrt{a_{22}}) \dot{u} / \sqrt{a_{11}} \right\} = 0 \end{aligned}$$

где  $T^{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) – дважды контравариантные компоненты тензора мембранных усилий;  $T^{13}$  – контравариантная компонента перерезывающих усилий.

Подчеркнем, что наличие в правых частях уравнений (1.6) множителей  $\sin(x^1 + \omega t)$  обусловлено видом нагрузки на оболочку, которая являясь гармонической и по  $x^1$  и по  $t$ , с частотой  $\omega$  обегает ее по окружности, вызывая прецессионные колебания с частотой  $\omega$ .

Дополнив зависимости (1.6) уравнениями равновесия (1.1) моментной группы, соотношениями связи между функциями внутренних сил и моментов и функциями деформаций  $\epsilon_{ij}$  и изменения кривизн  $\mu_{ij}$  [8]:

$$\begin{aligned} T^{ij} &= E h \epsilon_{\alpha\beta} (v a^{ij} a^{\alpha\beta} + (1 - \nu) a^{i\alpha} a^{j\beta}) / (1 - \nu^2) \\ M^{ij} &= E h^3 \mu_{\alpha\beta} (v a^{ij} a^{\alpha\beta} + (1 - \nu) a^{i\alpha} a^{j\beta}) / 12(1 - \nu^2) \end{aligned}$$

и выразив эти функции через компоненты  $u, v, w$  вектора перемещений

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= (\partial u / \partial x^i + \partial u / \partial x^j + b_{ij} w) / 2 \\ \mu_{ij} &= (\partial v_i / \partial x^j + \partial v_j / \partial x^i - b_j^i u - b_i^j v) / 2 \end{aligned}$$

получим полную систему нелинейных разрешающих уравнений динамического равновесия оболочки. Для замыкания этой системы используются граничные условия на торцах оболочки.

**2. Методика исследования.** Примем, что  $\omega \gg \omega_0$ . Такое допущение позволяет в общем движении оболочки выделить два состояния. В первом состоянии оболочка совершает простое вращение с угловой скоростью  $\omega$ . Она напряжена стационарными осесимметричными центробежными силами инерции и колебаний не совершает. Во втором состоянии, вызванном поворотом системы, на элементы оболочки действуют дополнительные, периодически изменяющиеся во времени силы инерции, возбуждающие малые колебания оболочки с частотой  $\omega$  относительно исходного напряженного состояния. Условие  $\omega \gg \omega_0$  позволяет рассматривать эти состояния по очереди,

используя решения уравнений первого состояния для вычисления коэффициентов уравнений колебаний оболочки во втором состоянии [9, 10].

Уравнения колебаний оболочки во втором состоянии строятся с помощью линеаризации исходных уравнений в окрестности первого состояния.

$$\begin{aligned}
 & \partial \Delta T^{11} / \partial x^1 - T_0^{13} \Delta b_1^1 - \Delta T^{13} b_{10}^1 + \partial \Delta T^{21} / \partial x^2 = \gamma h [\Delta \ddot{u} / a_{11} - \\
 & - 2\omega (\cos \alpha \Delta \dot{w} / \sqrt{a_{11}} + \sin \alpha \Delta \dot{v} / \sqrt{a})] = 0 \\
 & \partial \Delta T^{12} / \partial x^1 + \partial \Delta T^{22} / \partial x^2 - T_0^{23} \Delta b_2^2 - \Delta T^{23} b_{20}^2 = \gamma h [\Delta \ddot{v} / a_{22} + \\
 & + \omega^2 \sin \alpha (\sin \alpha \Delta v / a_{22} + \cos \alpha \Delta w / \sqrt{a_{22}}) + \omega^2 \cos \alpha R \Delta v_2 / \sqrt{\alpha_{22}} + \\
 & + 2\omega_0 \omega \cos \alpha R \sin(x^1 + \omega t) / \sqrt{a_{22}} + 2\omega \sin \alpha \Delta \dot{u} / \sqrt{a}] = 0 \\
 & \partial \Delta T^{13} / \partial x^1 + \Delta T^{11} b_{11}^0 + T_0^{11} \Delta b_{11} + \partial \Delta T^{23} / \partial x^2 + \\
 & + \Delta T^{22} b_{22}^0 + T_0^{22} \Delta b_{22} = \gamma h (\Delta \ddot{w} - \omega^2 \sin \alpha R \Delta v_2 / \sqrt{a_{22}} + \omega^2 \cos \alpha (\sin \alpha \Delta v / \sqrt{a_{22}} + \\
 & + \cos \alpha \Delta w) - 2\omega \omega_0 R \sin \alpha \sin(x^1 + \omega t) + 2\omega \cos \alpha \Delta \dot{u} / \sqrt{a_{11}}) = 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь ноликом помечены величины, относящиеся к простому вращению; символ  $\Delta$  обозначает малое динамическое приращение искомой величины, вызванное колебаниями оболочки. Подчеркнем, что входящие в правые части этих уравнений слагаемые, содержащие множитель  $\omega^2$ , учитывают изменения сил инерции в процессе колебаний, вызванные изменениями расстояния от оси вращения до рассматриваемого элемента и его ориентации.

Для вычисления содержащихся в (2.1) величин используем формулы:

$$\begin{aligned}
 \Delta T^{ij} &= E h \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} (v a^{ij} a^{\alpha\beta} + (1 - \nu) a^{i\alpha} a^{j\beta}) / (1 - \nu^2) \\
 \Delta M^{ij} &= E h^3 \Delta \mu_{\alpha\beta} (v a^{ij} a^{\alpha\beta} + (1 - \nu) a^{i\alpha} a^{j\beta}) / 12(1 - \nu^2) \\
 \Delta \varepsilon_{ij} &= (\partial \Delta u / \partial x^i + \partial \Delta u / \partial x^j + b_{ij} \Delta w) / 2 \\
 \Delta \mu_{ij} &= (\partial \Delta v_i / \partial x^j + \partial \Delta v_j / \partial x^i - b_j^i \Delta u - b_i^j \Delta v) / 2
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где  $v_i$  – углы поворота нормали к срединной поверхности оболочки.

Вид правых частей в уравнениях (2.1) позволяет представить исходные функции в форме бегущих в окружном направлении гармонических волн

$$\begin{aligned}
 \Delta T^{ij} &= T^{ij*} \sin(x^1 + \omega t), \quad \Delta M^{ij} = M^{ij*} \sin(x^1 + \omega t), \quad \Delta \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^* \sin(x^1 + \omega t) \\
 \Delta T^{i3} &= T^{i3*} \cos(x^1 + \omega t), \quad \Delta M^{i3} = M^{i3*} \cos(x^1 + \omega t), \quad \Delta \mu_{ij} = \mu_{ij}^* \sin(x^1 + \omega t) \\
 \Delta u &= u^* \cos(x^1 + \omega t), \quad \Delta v = v^* \sin(x^1 + \omega t), \quad \Delta w = w^* \sin(x^1 + \omega t)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

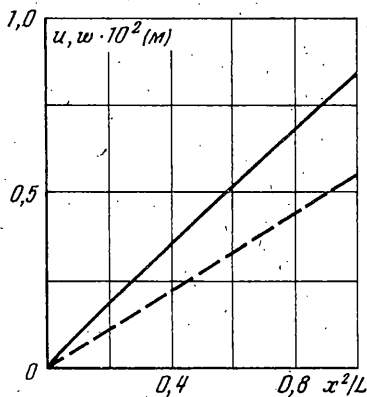
С помощью замен (2.3) уравнения с частными производными (2.1), (2.2) приведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка с независимой переменной  $x^2$ , которая решается методом начальных параметров. Выпишем эту систему в общем виде

$$dy/dx = A(x)y + \omega_0 f(x) \tag{2.4}$$

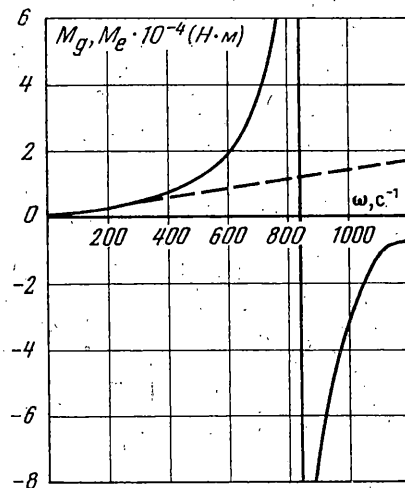
Здесь  $y = y(x)$  – искомая вектор-функция размерности восемь;  $x$  – независимая переменная;  $A(x)$  – матрица коэффициентов, определяемая уравнениями (2.1); (2.2);  $f(x)$  – заданный вектор правых частей, определяемый переносными силами инерции.

Ее решение представим в виде [10]  $y(x) = Y(x)C + y_\omega \omega_0$ , где  $y_\omega$  – решение задачи Коши для системы (2.4) при нулевых начальных условиях,  $Y(x)$  – матрица решений соответствующей однородной системы

$$dy/dx = A(x)y \tag{2.5}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Вектор постоянных  $C = (C_1, C_2, \dots, C_4)^T$  подбирается так, чтобы удовлетворялись граничные условия на краях оболочки.

Построение матрицы-функции  $Y(x)$  и вектор-функции  $y_\omega(x)$  производится интегрированием уравнений (2.4), (2.5) методом Рунге – Кутты четвертого порядка. Особенность применения такого подхода заключается в том, что, в связи с наличием в коэффициентах системы (2.1), (2.2) больших множителей  $\omega^2$ , она является жесткой и среди ее частных решений имеются быстро возрастающие функции. Поэтому при построении матрицы ее фундаментальных решений дополнительно применяется метод дискретной ортогонализации [8, 11].

**3. Результаты исследований.** На базе разработанной методики выполнено исследование прецессионных колебаний конических оболочек, длина которых вдоль образующей  $L = 1$  м, толщина  $h = 2 \cdot 10^{-3}$  м, радиус меньшего (защемленного) основания  $R = 0,1$  м. Угол конусности задавался равным  $2\alpha = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ . Угловая скорость собственного вращения варьировалась в пределах  $0 \leq \omega \leq 1000$  с $^{-1}$ , угловая скорость поворота принята равной  $\omega_0 = 1$  с $^{-1}$ .

При формировании разрешающих уравнений теории оболочек геометрические параметры конической поверхности определялись соотношениями:

$$a_{11} = (R + x^2 \sin \alpha)^2, \quad a_{22} = 1, \quad b_{11} = -(R + x^2 \sin \alpha) \cos \alpha, \quad b_{22} = 0,$$

$$b_1^1 = -\cos \alpha / (R + x^2 \sin \alpha), \quad b_2^2 = 0$$

Как свидетельствуют результаты вычислений, сложное вращение оболочки приводит к ее прецессионным колебаниям, которые в связанной системе координат  $O_{\text{луз}}$  представляются бегущей по окружности со скоростью  $\omega$  волной. Направление движения волны противоположно направлению собственного вращения оболочки, поэтому в системе координат  $OX_1Y_1Z_1$  ее движение представляется стационарным, при котором максимальные прогибы  $w$  достигаются в плоскости  $X_1OZ_1$ , а максимальные перемещения  $u$  – в плоскости  $Y_1OZ_1$ , т.е. оболочка "вываливается" из плоскости поворота  $Y_1OZ_1$ .

В табл. 1 приведены амплитудные значения перемещений  $w(L)$  на краю  $x^2 = L$  ( $\Delta w \cdot 10^5$  м) для оболочек с углами раствора конуса  $2\alpha = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ .

Отметим, что поскольку являющиеся преобладающими гироскопические силы инерции, вызванные взаимодействием вращения оболочки и ее поворота, действуют

вдоль оси  $OZ_1$ , при малых  $\alpha$  они имеют малые нормальные к поверхности составляющие. Поэтому при малых  $\alpha$  прогибы  $\Delta w$  оболочки относительно малы. С увеличением  $\alpha$  нормальные составляющие нагрузки растут, оболочка становится более раскрытой и ее прогибы резко возрастают.

С увеличением  $\alpha$  происходит также смещение спектра собственных частот оболочки в направлении меньших значений. Поэтому для выбранных значений параметров оболочек при малых  $\alpha$  резонансы прецессионных колебаний отсутствуют, хотя с увеличением  $\omega$  их амплитуды быстро растут. Для оболочки с  $2\alpha = 90^\circ$  при  $\omega \approx 840 \text{ с}^{-1}$  имеет место резонанс.

На фиг. 2 представлены функции прогиба  $w$  в сечении  $x^1 = 0$  (сплошная линия) и физической составляющей перемещения  $u$  в сечении  $x^1 = \pi/2$  для случаев  $\alpha = 45^\circ$ . Отметим, что их графики близки к прямым линиям, хотя заметно некоторое отступление от этого закона для функции  $w(x^2)$  в окрестности заземленного контура  $x^2 = 0$ .

Вид этих функций позволяет получить представление о форме смещения сечения  $x^2 = \text{const}$  оболочки при ее колебаниях. Для этого необходимо сопоставить перемещения параллельные оси  $OX$ , в точках  $x^2 = 0$ ,  $x^2 = \pi(w \cos \alpha)$  и  $x^2 = \pi/2$ ,  $x^2 = 3\pi/2(u)$ . Близость их значений свидетельствует о том, что в форме движения оболочки преобладающим является перемещение каждого поперечного сечения  $x^2 = \text{const}$  как жесткого круга.

Колебания оболочки по форме бегущей волны приводят к возникновению в ее опорном торцевом сечении  $x^2 = 0$  результирующего упругого момента  $M_e$ , который действует в плоскости  $Y_1OZ_1$  и оказывается постоянным в системе координат  $OX_1Y_1Z_1$ . Вектор  $M_e$  коллинеарен оси  $OX_1$  и направлен в противоположном ей направлении. Его величина определяется суммой моментов относительно оси  $OX_1$ , вызванных действием в сечении  $x^2 = 0$  продольных сил  $\Delta T_{(22)}$ , поперечных сил  $\Delta T_{(23)}$  и изгибающих моментов  $\Delta M_{(22)}$  и подсчитывается по формуле  $M_e = M_e^1 + M_e^2 + M_e^3$ ,  $M_e^1 = -T_{(22)}^* R^2 \pi \cos \alpha$ ,  $M_e^2 = 4M_{(22)}^* R$ ,  $M_e^3 = T_{(23)}^* R^2 \pi \sin \alpha$ , где  $T_{(22)}^*$ ,  $T_{(23)}^*$ ,  $M_{(22)}^*$  — амплитудные значения физических компонент соответствующих функций.

Величина  $M_e$  сравнивалась со значением общего гироскопического момента  $M_g = I_z \omega \times \omega_0$ , действующего при сложном вращении на эквивалентное тонкостенное твердое тело с осевым моментом инерции  $I_z = m(R_1^2 + R_2^2)/2$ . Сопоставление результатов вычислений показало, что при малых значениях  $\omega$  низкочастотное прецессионное движение оболочки оказывается квазистатическим и моменты  $M_e$  и  $M_g$  совпадают с высокой точностью. С увеличением  $\omega$  влияние упругих колебаний на общий упругий момент на заделанном торце оболочки становится существенным и  $M_e$  начинает превышать  $M_g$ , причем это превышение более заметно для оболочек с большим углом  $2\alpha$ . В табл. 2 даны значения  $M_g$  и  $M_e$  при  $[n \cdot m] \omega = 1000 \text{ с}^{-1}$ .

На фиг. 3 показаны графики функций  $M_e(\omega)$  (сплошная линия) и  $M_g(\omega)$  (штриховая прямая). Можно заметить, что при малых  $\omega$  эти графики практически совпадают, затем  $M_e$  становится больше  $M_g$  и при приближении к резонансному значению  $\omega \approx 840 \text{ с}^{-1}$  устремляется к бесконечности. При значениях  $\omega > 840 \text{ с}^{-1}$  функция  $M_e$  имеет противоположный знак. Полученные результаты позволяют заключить, что при исследовании динамики тонкостенных роторов учет их упругой податливости методами теории оболочек позволяет выявить качественно новые гироскопические эффекты их поведения.

В заключении отметим также еще одну особенность динамического поведения рассматриваемой упругой системы. Известно [1–5], что вращение осесимметричной оболочки приводит к расщеплению спектра частот ее собственных колебаний и появлению в окрестности каждой частоты пары близлежащих частот, отдаляющихся друг от друга с увеличением  $\omega$ . Поэтому можно было бы ожидать возбуждения двух близко лежащих резонансных режимов прецессионных колебаний рассматри-

Таблица 1

$\omega$	$2\alpha = 0^\circ$	$2\alpha = 20^\circ$	$2\alpha = 40^\circ$	$2\alpha = 60^\circ$	$2\alpha = 90^\circ$
1	0,0025	0,0122	0,0372	0,0939	0,327
100	0,248	1,223	3,731	9,437	33,200
200	0,497	2,451	7,506	19,130	69,500
300	0,746	3,692	11,300	29,37	113,00
400	0,959	4,950	15,270	40,490	170,9
500	1,247	6,233	19,440	52,910	257,90
600	1,498	7,524	23,850	67,240	414,60
700	1,752	8,862	28,590	84,310	807,10
800	2,007	10,024	33,750	105,50	4022,0
900	2,263	11,670	39,440	132,90	-1615,0
1000	2,522	13,160	45,800	170,50	-713,60

Таблица 2

$2\alpha$	$0^\circ$	$20^\circ$	$40^\circ$	$60^\circ$
$M_g$	98,77	783,2	2749	6395
$M_e$	99,99	850,2	3433	11760

ваемой системы. В нашем случае этого не произошло. Отсутствие второго резонанса можно объяснить тем, что при попытке приблизиться ко второй резонансной частоте путем дальнейшего увеличения  $\omega$  происходит связанное с ним эволюционирование спектра частот, в результате чего вторая близлежащая собственная частота продолжает возрастать и частота вынужденных колебаний  $\omega$  в рассматриваемом диапазоне исследований, по-видимому, не успевает ее "догнать".

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев Ю.С., Детистов С.И. О влиянии центробежных сил на собственные частоты круговых конических оболочек // Проблемы машиностроения. Киев: Наук. думка, 1981. № 14. С. 25-27.
2. Егармин Н.Е. О прецессии стоячих волн колебаний вращающейся осесимметричной оболочки // Изв. АН СССР. МТГ. 1986. № 7. С. 142-148.
3. Смирнов А.Л., Товстик П.Е. Качественное исследование динамики вращающихся оболочек вращения // Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982. С. 280-290.
4. Sivadas K.R. Vibration analysis of pre-stressed rotating thick circular conical shell // J. Sound and Vibrat. 1995. V. 186. No. 1. P. 99-109.
5. Padovan J. Natural frequencies in rotating prestressed cylinders // J. Sound and Vibrat. 1973. V. 31. No. 4. P. 469-482.
6. Коваленко А.Д. Пластины и оболочки в роторах турбомашин. Киев: Изд-во АН УССР, 1955. 304 с.
7. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
8. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. Киев: Вища шк., 1983. 286 с.

9. Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Дехтярюк Е.С., Лизунов П.П. Устойчивость периодических процессов в нелинейных механических системах. Львов: Вища шк., 1983. 287 с.
10. Гуляев В.И., Лизунов П.П. Колебания систем твердых и деформируемых тел при сложном движении. Киев: Вища шк. 1989. 199 с.
11. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171–173.

Киев

Поступила в редакцию  
16.12.1996