МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1999

УДК 534.11

© 1999 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, С.В. НЕСТЕРОВ

КОЛЕБАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СИСТЕМ С НЕОДНОРОДНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Исследуются движения взаимодействующих колебательных систем, описываемых начально-краевой задачей для системы гиперболических уравнений с переменными коэффициентами и неоднородными краевыми условиями первого рода. Изложена схема построения вынужденных движений на основе решения соответствующей векторной краевой задачи на собственные значения и функции типа Штурма – Лиувилля. Разработан эффективный численно-аналитический метод ускоренной (квадратичной) сходимости для высокоточного построения частот и форм свободных колебаний системы. Проведено тестирование алгоритма путем численного решения модельных примеров. Предложена модификация метода, позволяющая проводить расчеты для более широких классов многомерных колебательных систем с переменными распределенными параметрами.

1. Постановка задачи. Рассматривается динамическая система, описываемая векторным уравнением в частных производных гиперболического типа с граничными условиями первого рода [1, 2]:

$$R(x)\ddot{u} = \left(P(x)u'\right)' - Q(x)u + f(x,t), \quad 0 < x < l$$
$$u(0,t) = g^0(t), \quad u(l,t) = g^l(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T < \infty \tag{1.1}$$

Здесь $u = (u_1, ..., u_N)^T$ – искомая вектор-функция координаты x и времени t произвольной размерности $N \geqslant 1$; R, P, Q – симметрические матрицы, достаточно гладкие по эйлеровой координате x, причем R, P – положительно, а Q – неотрицательно определенные матрицы для всех $x \in [0, l]$. Вектор-функции $f(x, t)$, $g^{0,l}(t)$ считаются достаточно гладкими для существования сильного (физического) решения $u(x, t)$ краевой задачи (1.1) с соответствующими начальными условиями [1–4].

Отметим, что матрица R характеризует распределенную инерционность системы, а P – ее жесткость (натяжение); матрица Q определяется упругими свойствами внешней среды. Функция f описывает распределенное внешнее воздействие на систему, а функции $g^{0,l}$ – заданные смещения концов $x = 0, l$. В частности, при $g^{0,l}(t) \equiv 0$ имеют место условия жесткого закрепления граничных точек. Постановка краевой задачи вида (1.1) взята ради определенности. При необходимости могут быть рассмотрены другие самосопряженные краевые условия [1–7] и обобщены уравнения движения с учетом "гироскопических" слагаемых.

Чтобы определить движение системы (1.1), нужно задать распределения смещений u и скоростей $\dot{u}$ в начальный момент времени $t = 0$:

$$u(x,0) = u^0(x), \quad \dot{u}(x,0) = \dot{u}^0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{1.2}$$

Здесь $u^0(x)$, $\dot{u}^0(x)$ – известные достаточно гладкие функции x, удовлетворяющие условиям существования физического решения [1–4], см. ниже.

Конструктивный метод решения начально-краевой задачи (1.1), (1.2) заключается в предварительном построении полной ортонормированной системы собственных функций и значений, т.е. форм и частот свободных колебаний. Эти функции и числа определяются как решение векторной самосопряженной краевой задачи (задачи Штурма – Лиувилля):

$$\begin{gathered}\left(P(x)X'\right)' + \left[\lambda R(x) - Q(x)\right]X = 0, \quad X = X(x,\lambda), \quad 0 < x < l \\ X(0,\lambda) = X(l,\lambda) = 0, \quad \lambda \in \{\lambda_n\}, \quad X_n(x) = X(x,\lambda_n), \quad (n = 1, 2, \ \dots)\end{gathered} \tag{1.3}$$

Из (1.3) вследствие симметричности матриц P, R, Q непосредственно следует ортогональность с весом $R(x)$ векторов X_n, X_m и следующее выражение для квадрата нормы $\|X_n\|^2$:

$$\begin{gathered}\int_0^l X_m^T(x)R(x)X_n(x)dx = \|X_n\|^2 \delta_{nm}, \quad \lambda_n \neq \lambda_m \quad (n,m = 1, 2, \ \dots) \\ \|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^T(x)R(x)X_n(x)dx = \left(\Psi_n(l), \ P(l)X_n'(l)\right) \\ \left(P(x)\Psi_n'\right)' + \left[\lambda_n R(x) - Q(x)\right]\Psi_n = -R(x)X_n(x), \quad \Psi_n(0) = \Psi_n'(0) = 0\end{gathered} \tag{1.4}$$

Квадрат нормы согласно (1.4) может быть представлен либо в виде квадратуры стандартным образом, либо посредством интегрирования задачи Коши для вектора Ψ_n с нулевыми данными при $x = 0$ и известной неоднородностью – RX_n. При численной реализации решения задачи уравнения для X_n и Ψ_n могут интегрироваться совместно, см. далее.

Пусть системы собственных значений $\{\lambda_n\}$ и ортонормированных векторных функций $\{\chi_n(x)\}$ построены. Тогда может быть определено искомое решение $u(x, t)$ исходной начально-краевой задачи (1.1), (1.2) в виде ряда Фурье [1, 3]:

$$\begin{gathered}u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(x)\theta_n(t), \quad u' = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n'\theta_n, \quad \dot{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n\dot{\theta}_n, \quad \chi_n = \frac{X_n}{\|X_n\|} \\ \theta_n(t) = u_n^0 \cos\nu_n t + \frac{\dot{u}_n^0}{\nu_n}\sin\nu_n t + \frac{1}{\nu_n}\int_0^t \sin\nu_n(t-\tau)\varphi_n(\tau)d\tau \\ \varphi_n(t) = \chi_n'^T(0)P(0)g^0(t) - \chi_n'^T(l)P(l)g^l(t) + \int_0^l \left(f(x,t), \chi_n(x)\right)dx \\ u_n^0 = \int_0^l u^{0T}(x)R(x)\chi_n(x)dx, \quad \dot{u}_n^0 = \int_0^l \dot{u}^{0T}(x)R(x)\chi_n(x)dx\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь $\theta_n(t)$ – скалярные функции (обобщенные координаты), $\nu_n = \lambda_n^{1/2}$ – собственные частоты колебаний. Отметим, что вследствие оценок $\nu_n \sim n$, $\chi_n' \sim \nu_n$ сходимость рядов (1.5) требует отдельного обсуждения (при $g^{0,l} \not\equiv 0$). Она заведомо неравномерна, поскольку $\chi_n(x) = 0$ при $x = 0, l$, однако $u(x, t) = g^{0,l}(t)$ при $x = +0, x = l - 0$. Эти свойства рядов требуют применения процедуры выделения сингулярности и улучшения их сходимости. В предположении гладкости функций $g^{0,l}(t)$ интегрированием по частям соответствующих выражений в $\varphi_n(t)$, содержащих $g^{0,l}(t)$, можно добиться указанного улучшения сходимости [1–4].

Применим другой подход, связанный с приведением краевой задачи (1.1) к виду, не содержащему неоднородности в граничных условиях. Наиболее простой способ заключается в решении задачи "эллиптического типа" для вектор-функции z и в последующей линейной подстановке $u = z + w$. Действительно, имеем для $z(x, t)$ явное выражение

$$
\begin{gathered}
\left(P(x)z'\right)' = 0, \quad z(0,t) = g^0(t), \quad z(l,t) = g^l(t) \\
z(x,t) = \left(E - K(x)\right)g^0(t) + K(x)g^l(t) \qquad (1.6) \\
K(x) \equiv \left(\int_0^x P^{-1}(s)ds\right)\left(\int_0^l P^{-1}(x)dx\right)^{-1}, \quad K(0) = 0, \quad K(l) = E
\end{gathered}
$$

где t – параметр, 0 – нулевая, а E – единичная матрицы. Для неизвестной вектор-функции w получим начально-краевую задачу типа (1.1), (1.2) с однородными граничными условиями

$$
\begin{gathered}
R(x)\ddot{w} = \left(P(x)w'\right)' - Q(x)w + h(x,t), \quad w = u - z(x,t) \\
w(0,t) = w(l,t) = 0, \quad h(x,t) \equiv f(x,t) - R(x)\ddot{z}(x,t) - Q(x)z(x,t) \qquad (1.7) \\
w(x,0) = w^0(x) \equiv u^0(x) - z(x,0), \quad \dot{w}(x,0) = \dot{w}^0(x) \equiv \dot{u}^0(x) - \dot{z}(x,0)
\end{gathered}
$$

Пусть функции $g^{0,l}(t)$ достаточно гладкие и такие, что $g^{0,l}(0) = \dot{g}^{0,l}(0) = 0$; тогда $w^0 \equiv u^0$, $\dot{w}^0 \equiv \dot{u}^0$ и выбором начальных распределений $u^0(x)$, $\dot{u}^0(x)$ из достаточно гладкого по Стеклову класса функций [1, 2, 4] можно добиться быстрого убывания коэффициентов u_n^0, $\dot{u}_n^0$, например $u_n^0 \sim n^{-3}$, $\dot{u}_n^0 \sim n^{-2}$. Для этой же цели предположим, что функция $f(x, t)$ достаточно гладкая и такая, что асимптотика слагаемого в θ_n от f будет $O(n^{-3})$. Если третьи производные от $g^{0,l}(t)$ кусочно гладкие, то слагаемые $R\ddot{z}$ и Qz в h дадут вклады $O(n^{-3})$ для θ_n, см. (1.5). В результате получаются оценки для $\theta_n = O(n^{-3})$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, что приведет к равномерной сходимости рядов Фурье для искомой функции $w(x, t)$ и ее производных w', $\dot{w}$; ряды для вторых производных по x, t будут сходиться по среднеквадратической норме.

Таким образом, проблема построения искомого решения начальнокраевой задачи (1.1), (1.2) или задач (1.6), (1.7) сводится к элементарным операциям и квадратурам и может быть просто осуществлена при помощи современных ЭВМ, если известны системы собственных значений $\{\lambda_n\}$ и функций $\{\chi_n(x)\}$. Их конструктивное определение требует разработки эффективных аналитических и численных методов решения задачи Штурма – Лиувилля (1.3), что для существенно изменяющихся матричных функций $R(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ представляет принципиальные вычислительные трудности [2, 5, 6]. Особый интерес в прикладном аспекте вызывает проблема высокоточного нахождения низших форм $\chi_n(x)$ и частот ν_n колебаний, в частности $n = 1$. Ниже излагаются подход к построению двусторонних оценок частот и метод ускоренной сходимости для вычисления низших форм и частот, основанный на оригинальном введении малого параметра в задаче (1.3) и применении методов возмущений и вариационного подхода. Определение высших мод ($n \gg 1$) требует разработки эффективных асимптотических методов для векторной задачи [6, 7].

2. Вариационный подход к краевой задаче и введение малого параметра. Задача на собственные значения и функции (1.3) допускает вариационную трактовку [2, 5, 7]:

$$
J[X] = \int_0^l \left[X'^T P(x)X' + X^T Q(x)X\right]dx \to \min_X \qquad (2.1)
$$

$$
\Phi[X] = \|X\|^2 = \int_0^l X^T R(x)Xdx = 1, \quad X(0) = X(l) = 0
$$

на классе непрерывно дифференцируемых функций $\{X(x)\}$, удовлетворяющих нулевым краевым условиям. Абсолютный минимум положительно определенного функционала J при изопериметрическом условии $\Phi = 1$ достигается на первой собственной функции $X_1(x)$, а величина $J[X_1] = \lambda_1$ есть первое собственное значение задачи (1.3).

Последующие функции $X_n(x)$ и значения λ_n, $n \geqslant 2$, определяются рекуррентно на более узких классах функций, удовлетворяющих дополнительным условиям ортогональности с весом $R(x)$:

$$\Phi_k[X] = \int_0^l X_k^T(x)R(x)Xdx = 0 \quad (k = 1, 2, \ \ldots, \ n-1) \tag{2.2}$$

На основе вариационной формулировки (2.1), (2.2) могут быть разработаны вычислительные процедуры метода Рэлея–Ритца [2, 5, 7], метода конечных элементов [8] и др. Они позволяют численно получить приближенные значения (оценки сверху) и функции низших мод колебаний. Построение оценок снизу собственных значений может быть осуществлено с помощью методов теории интегральных уравнений, методов Вайнштейна,Ароншайна, Фиккера и др. [5, 7]. Отметим, что для расчета даже простых модельных примеров, в том числе для скалярной функции X, эти подходы требуют изощренного анализа; в прикладном аспекте при проведении высокоточных расчетов они малопродуктивны.

Воспользуемся методом Рэлея – Ритца (в частности, принципом Рэлея) для оценки сверху λ^* некоторого собственного значения λ_n. Индекс n не указываем далее для сокращения записи; более того, рассмотрим случай $n = 1$. Подставим известную величину λ^* в уравнение (1.3) и построим N-параметрическое семейство линейно независимых частных решений на основе интегрирования задачи Коши вида

$$\begin{gathered} \left(P(x)V'\right)' + \left[\lambda^* R(x) - Q(x)\right]V = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l^* \\ V(0) = 0, \quad V'(0) = E_i, \quad E_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T, \quad i = 1, \ldots, N \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь E_i – N-вектор, все элементы которого нулевые, а i-й элемент равен единице. Решения $V_i(x, \lambda^*)$ задач Коши (2.3) могут быть построены численно с требуемой точностью, что не представляет принципиальных трудностей. Величина l^*, которая задает длину интервала значений x, определяется далее. Искомое N-параметрическое семейство решений представимо в виде $V(x, \lambda^*, c) = W(x, \lambda^*)c$, где W – матрица, построенная из частных решений V_i, а c – постоянный N-вектор. Потребуем, чтобы функция $V(x, \lambda^*, c) = 0$ при некотором значении $x = \xi$, где $0 < \xi \leqslant l^*$. Необходимое и достаточное условие существования нетривиальной вектор-функции V имеет вид уравнения относительно неизвестной x:

$$\det W(x, \lambda^*) \equiv \Delta(x, \lambda^*) = 0, \quad W = \left(V_1, V_2, \ldots, V_N\right) \tag{2.4}$$

В частности, если $\lambda^* = \lambda$ (λ – точное значение), то абсцисса $\xi = l$. Вследствие непрерывной зависимости $\lambda(l)$ при достаточно малом отличии λ^* от λ в ситуации общего положения существует близкое к l значение абсциссы ξ. Это – первый вещественный корень уравнения (2.4), который может быть определен численно с требуемой точностью и далее считается известным

$$\xi^* = \arg_x \Delta(x, \lambda^*), \quad \xi^* = \xi(\lambda^*), \quad \xi^* \leqslant l^* \tag{2.5}$$

Далее будет установлено, что $\xi^* < l$ при $\lambda^* - \lambda > 0$ достаточно малом, т.е. имеет место аналог следствия из второй осцилляционной теоремы сравнения Штурма [7, 9, 10] для векторного уравнения (2.3). И наоборот, если $\lambda_* - \lambda < 0$ (λ_* – оценка снизу), то $\xi(\lambda_*) > l$; в этом случае матричные функции $P(x)$, $R(x)$, $Q(x)$ считаются продолженными на некоторый интервал $l < x \leqslant l^*$, см. далее. Отметим, что функция $\Delta(x, \lambda^*)$ может строиться совместно с интегрированием задач Коши для V_i (2.3) до того значения $x = \xi$, при котором $\Delta(\xi, \lambda^*) = 0$; если $n > 1$, то ξ^* – n-й корень.

Для упрощения дальнейших построений предполагаются выполненными условия общего положения, т.е. ξ^* оказывается простым

$$\Delta'_x(\xi^*,\lambda^*) \neq 0, \quad \xi^* = \xi(\lambda^*) \tag{2.6}$$

Тогда $\operatorname{rang} W(\xi^*,\lambda^*) = N-1$, что устанавливается методом от противного. А именно, при отсутствии ненулевых миноров (N – 1)-го порядка условие (2.6) не будет выполнено. Выберем какой-либо отличный от нуля минор $M_{ij}(\xi^*,\lambda^*)$ (i, j фиксированы) и выразим все c_k, $k \neq i$, через c_i; находим $c = C(\xi^*,\lambda^*)c_i$, где c – N-вектор. В результате получим однопараметрическое семейство решений задачи Коши (2.3), удовлетворяющее нулевому условию при $x = \xi^*$:

$$V^*(x,\lambda^*,c) = c_i W(x,\lambda^*)C(\xi^*,\lambda^*) \equiv c_i V(x,\lambda^*), \quad V(\xi^*,\lambda^*) = 0 \tag{2.7}$$

Далее без ограничения общности можно положить $c_i = 1$. Построенную функцию V (2.7) и значение λ^* будем рассматривать как решение краевой задачи (1.3) на интервале $0 \leqslant x \leqslant \xi(\lambda^*)$.

Введем в качестве меры близости λ^* и λ величину ε:

$$\varepsilon = 1 - \xi^*/l, \quad |\varepsilon| \ll 1 \tag{2.8}$$

которую будем считать малым параметром, а найденные λ^*, $V(x, \lambda^*)$ порождающим решением исходной возмущенной задачи (1.3), отвечающей $\varepsilon = 0$, см. [11]. Далее для удобства полагаем $l = 1$, что достигается введением нормированного аргумента $x' = xl^{-1}$ и переобозначением $x' \to x$.

3. Метод возмущений для определения собственных частот и форм колебаний. Приведем краевую задачу (1.3) к виду возмущенной задачи на собственные значения и функции [11]:

$$\begin{gathered}
\left(P(y)U'\right)' + [\Lambda R(y) - Q(y)]U = H[y,U,\Lambda,\varepsilon], \quad U(0) = U(\xi^*) = 0 \\
X(x,\lambda) \equiv U(y,\Lambda,\varepsilon), \quad y = \xi x, \quad 0 \leqslant y \leqslant \xi^*, \quad \Lambda = \xi^{*-2}\lambda \\
H[y,U,\Lambda,\varepsilon] \equiv -\varepsilon\left[\left(yP'(y)U'\right)' + y\Lambda R'(y)U - \left(yQ'(y) + 2Q(y)\right)U\right] + \varepsilon^2 \ldots
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Выражение для возмущающего линейного оператора H (3.1) получается в результате тождественных преобразований путем введения возмущенного аргумента y, неизвестной функции U и искомого параметра Λ. Этот прием аналогичен предложенному А. Пуанкаре для исследования нелинейных колебаний автономных систем [12]. В (3.1) предполагается гладкость матричных функций P, R, Q в рассматриваемой области изменения аргумента; при $\xi^* > 1$ эти функции считаются продолженными гладким образом на промежутке $1 \leqslant x \leqslant \xi^*$.

Применим для приближенного решения $\Lambda(\varepsilon)$, $U(y, \Lambda, \varepsilon)$ возмущенной задачи (3.1) метод разложения по степеням малого параметра или метод последовательных приближений. Порождающее (при $\varepsilon = 0$) решение известно согласно п. 2: значение $\Lambda^{(0)} = \Lambda(0) = \lambda^*$, а функция $U^{(0)} = U(y, \Lambda^{(0)}, 0) = V(y, \lambda^*)$, см. (2.7). В следующем первом приближении по ε: $\Lambda(\varepsilon) = \lambda^* + \varepsilon\Lambda^1 + \varepsilon^2\ldots$ для неизвестного коэффициента Λ^1 на основе альтернативы Фредгольма получается явное выражение в виде квадратуры от совокупности квадратичных форм известных вектор-функций V' и V:

$$\Lambda^1 = \|V\|^{-2} \int_0^{\xi^*} \left[yV'^T(y,\lambda^*)P'(y)V'(y,\lambda^*) - \lambda^* yV^T(y,\lambda^*)R'(y)V(y,\lambda^*) + \right.$$
$$\left. + V^T(y,\lambda^*)\left(yQ'(y)+2Q(y)\right)V(y,\lambda^*) \right] dy, \quad \|V\|^2 = \int_0^{\xi^*} V^T R V dy \qquad (3.2)$$

Величина Λ^1 в общем случае находится с помощью численного интегрирования согласно (3.2). Уточненные с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ значения Λ и λ равны

$$\Lambda(\varepsilon) = \lambda^* + \varepsilon\Lambda^1(\lambda^*) + \varepsilon^2 \ldots, \quad \lambda = \xi^{*2}\Lambda = \xi^{*2}\lambda^* + \varepsilon\Lambda^1 + \varepsilon^2 \ldots = \lambda^* + \left(\Lambda^1 - 2\lambda^*\right)\varepsilon + \varepsilon^2 \ldots \qquad (3.3)$$

Из выражения (3.3) для λ следует, что при $\varepsilon\Lambda^1 > 0$ величина $\xi^{*2}\lambda^* = \lambda_*$ есть оценка снизу искомого значения λ, т.е. $\lambda_* \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$ и, кроме того, $\xi^* < 1$, $\varepsilon > 0$. В результате условие $\varepsilon\Lambda^1 > 0$ сводится к неравенству $\Lambda^1 > 0$, которое часто может быть установлено априори. Например, если подынтегральное выражение в (3.2) неотрицательно и отлично от нуля на конечном отрезке значений y, то заведомо $\Lambda^1 > 0$. В частности, если P', $yQ' + 2Q$ неотрицательно, а R' неположительно определенные матрицы, то подынтегральное выражение неотрицательно.

Как установлено, знак ε не зависит от величины Λ^1; он определяется свойством, аналогичным следствию из второй осцилляционной теоремы сравнения Штурма [7, 9–11]; а именно, $\varepsilon > 0$ при $\lambda^0 = \lambda^* > \lambda$ и $\varepsilon < 0$, если $\lambda^0 = \lambda_* < \lambda$, см. п. 2.

Рассмотрим обратную ситуацию, когда $\Lambda^1 < 0$, что также часто может быть установлено без интегрирования. В этом случае величина $\xi^{*2}\lambda^*$ есть улучшенная оценка сверху: $\lambda \leqslant \xi^{*2}\lambda^* < \lambda^*$. При $\Lambda^1 = 0$ выражение $\xi^{*2}\lambda^*$ определяет искомое значение λ с погрешностью порядка $O(\varepsilon^2)$.

С учетом величины Λ^1 (3.2) определяется функция $U^1(y, \lambda^*)$ (с точностью до $cV(y, \lambda^*)$). Далее может быть продолжена процедура последовательного уточнения Λ, U на основе вычисления коэффициентов Λ^k, U^k (при этом не требуется более высокая гладкость функций P, R, Q) или последовательными приближениями. Соответствующая процедура аналогична случаю скалярных функций X, U; она изложена и обоснована в [11].

Однако такой подход неэффективен; он приводит к чрезвычайно быстрому росту сложности выражений и накоплению численных погрешностей вследствие ошибок округления. Прием уточнения решения краевой задачи, изложенный выше, может быть применен для разработки метода ускоренной (квадратичной по ε) сходимости типа метода касательных Ньютона. Предлагаемый ниже алгоритм не приводит к указанным выше трудностям, присущим стандартной схеме последовательных приближений. Он заключается в использовании уточненного с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ значения $\lambda^{(1)}$ (3.3) в качестве начального приближения (аналогично λ^*) при решении задачи Коши (2.3) с последующим определением абсциссы $x = \xi^{(1)} = \xi(\lambda^{(1)})$ (2.5) из уравнения (2.4) и построением функции $V(x, \lambda^{(1)})$ (2.7). Затем определяется новое значение малого параметра $\varepsilon^{(1)} = 1 - \xi^{(1)}$, $\varepsilon^{(1)} = O(\varepsilon^2)$, и по формулам (3.2), (3.3) производится уточнение значения λ с погрешностью $O(\varepsilon^{(1)2}) = O(\varepsilon^4)$ и т.д. Опишем алгоритм более подробно и дадим оценку скорости сходимости в терминах исходного малого параметра ε (2.8).

4. Метод ускоренной сходимости. Существенным недостатком формулы (3.2) в вычислительном аспекте является необходимость высокоточного интегрирования выражения, содержащего функции V, V', определяемые численно. Интегрированием по частям, избавляясь от производных P', R', Q', удается привести его к весьма простому виду, не содержащему квадратуры. В результате получим

$$\lambda^{(1)} = \lambda^* + \varepsilon\mu(\lambda^*), \quad \mu(\lambda^*) = -\xi^* \| V \|^{-2} V'^T(\xi^*, \lambda^*) P(\xi^*) V'(\xi^*, \lambda^*) \tag{4.1}$$

Отметим, что $\mu \neq 0$, так как в противном случае $V(x, \lambda^*) \equiv 0$, что противоречит построениям п. 2. Кроме того, из (4.1) следуют отрицательность μ и дифференциальный аналог указанного выше следствия из теоремы Штурма

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda - \lambda^*}{\varepsilon} = -\| V \|^{-2} V'^T P V' |_{\xi^* = 1}, \quad V(x, \lambda) = X(x, \lambda) \tag{4.2}$$

Соотношение (4.2) означает, что при увеличении длины интервала собственное значение (частота) уменьшается, а при уменьшении – увеличивается. Это утверждение отвечает механическим представлениям и случаю скалярной колебательной системы [7, 9–11, 13] (типа струны или распределенной пружины). Отметим, что выражения (4.1), (4.2) не содержат в явной форме функций R, Q; эти матрицы влияют косвенно через V и ξ^*. Кроме того, без потери точности по ε (с погрешностью $O(\varepsilon^2)$) для вычисления $\lambda^{(1)}$ в представлении коэффициента μ можно положить $\xi^* = 1$. Напомним, что квадрат нормы функции V определяется также с помощью решения задачи Коши для функции $\Psi = \partial V / \partial \lambda$ согласно (1.4), см. ниже.

Изложим рекуррентный вычислительный алгоритм метода ускоренной сходимости. На начальном этапе он заключается в достаточно точной оценке λ^0 искомого собственного значения, в частности, $\lambda^0 = \lambda^*$ с помощью метода Рэлея–Ритца [2, 5, 10, 11, 13]. Согласно (2.3)–(2.7) строится функция $V(x, \lambda^0)$ и численно определяется соответствующий нуль $\xi^0 = \xi(\lambda^0)$ определителя $\Delta(x, \lambda^0)$, который предполагается простым. Затем находится малый параметр задачи $\varepsilon^0 = 1 - \xi^0$, $|\varepsilon^0| \ll 1$. Для практических расчетов обычно достаточно, чтобы имела место оценка $\varepsilon^0 \sim (0{,}1 - 0{,}01)n^{-1}$, где n – номер собственного значения. Индекс n, как отмечалось, фиксируется и не указывается ради сокращения записи. Отметим, что специальный интерес представляет вычисление низших собственных частот и форм колебаний системы ($n = 1$).

Следующий этап состоит в уточнении значения λ с помощью соотношений (4.1): $\lambda^{(1)} = \lambda^0 + \varepsilon^0\mu(\lambda^0)$, в которых квадрат нормы $V(x, \lambda^0)$ вычисляется посредством высокоточной квадратуры либо совместным интегрированием уравнений для V_i и $\Psi = \partial V / \partial \lambda$, см. (2.3), (2.7) и (1.4). При необходимости вычисляется собственная функция $V(x, \lambda^1)$ и квадрат ее нормы. Таким образом, первый шаг процедуры описан.

На $(k + 1)$-м шаге для вычисления $\lambda^{(k+1)}$ имеем соотношения

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \varepsilon^{(k)}\mu(\xi^{(k)}, \lambda^{(k)}), \quad \mu = -\| V_{(k)} \|^{-2} V_{(k)}'^T P V_{(k)}' |_{\xi^{(k)}}, \quad \varepsilon^{(k)} = 1 - \xi^{(k)}$$

$$\xi^{(k)} = \xi(\lambda^{(k)}) = \arg_{x} {}_n \Delta^{(k)}(x), \quad \Delta^{(k)} \equiv \det W_{(k)}, \quad W_{(k)}(x) \equiv W(x, \lambda^{(k)}) \tag{4.3}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda^{(0)} = \lambda^0, \quad \xi^{(0)} = \xi(\lambda^0), \quad \varepsilon^{(0)} = \varepsilon^0 = 1 - \xi(\lambda^0)$$

Матрица $W_{(k)}$, вектор-функция $V_{(k)}$ и ее норма $\|V_{(k)}\|$ определяются численно на основе интегрирования задач Коши (2.3), (1.4) для известного $\lambda(k)$:

$$(P(x)V')' + [\lambda^{(k)} R(x) - Q(x)]V = 0, \quad V(0) = 0, \quad V'(0) = E_i \quad (i = 1, \ldots, N)$$

$$V_{i(k)}(x) = V_i(x, \lambda^{(k)}), \quad W_{(k)}(x) = (V_{1(k)}(x), \ldots, V_{N(k)}(x)), \quad W_{(k)}'(0) = E$$

$$V_{(k)}(x) = W_{(k)}(x) C_{(k)}, \quad C_{(k)} = C(\xi^{(k)}, \lambda^{(k)}); \quad \| V_{(k)} \|^2 = (\Psi_{(k)}^T, P V_{(k)}')_{\xi^{(k)}} \tag{4.4}$$

$$(P(x)\Psi')' + [\lambda^{(k)} R(x) - Q(x)]\Psi = -R(x) V_{(k)}(x), \quad \Psi(0) = \Psi'(0) = 0$$

$$(P(x)V')' + [\lambda^{(k)} R(x) - Q(x)]V = 0, \quad V(0) = 0, \quad V'(0) = C_{(k)}$$

Итерационная процедура (4.3), (4.4) достаточно проста для численной реализации. Она сводится к однотипным операциям и основана на высокоточном интегрировании задач Коши для различных (уточняющихся) значений $\lambda = \lambda^{(k)}$ и вычислении искомого корня $\xi^{(k)} \to 1$. При этом априори или численно вначале процедуры должно быть установлено свойство простоты корня: $\Delta'_x(\xi^0, \lambda^0) \neq 0$. После построения однопараметрического семейства решений $cV_{(k)}$, $cV'_{(k)}$ $(c = 1)$ и нормы $\|V_{(k)}\|$ с помощью простого выражения находится уточненное значение $\lambda^{(k+1)}$. Тестирование алгоритма можно осуществить путем расчета примеров, допускающих аналитическое решение, см. п. 5.

Скорость сходимости алгоритма имеет квадратический характер. При достаточно малых значениях $|\varepsilon|$ справедлива оценка (L = const)

$$|\lambda^{(k+1)} - \lambda| \leqslant L\varepsilon^{(k)2}, \quad \varepsilon^{(k)} = \varepsilon^{\pi(k)}, \quad \pi(k) = 2^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \varepsilon = \varepsilon^0 \tag{4.5}$$

Как показывают расчеты модельных примеров п. 5, обычная оценка λ^* на основе весьма грубого выбора пробной функции в методе Рэлея–Ритца приводит к значениям $\varepsilon \sim 0{,}1$–$0{,}01$. С помощью одной-двух итераций по методу ускоренной сходимости получаются высокоточные оценки (4.5) низших значений λ_n с относительной погрешностью порядка 10^{-4}–10^{-6}. Три-четыре итерации практически исчерпывают точностные возможности программного обеспечения современных ЭВМ. Аналогичные (4.5) оценки справедливы также для собственных функций

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} (| V_{(k+1)}(x) - X(x) | + | V'_{(k+1)}(x) - X'(x) |) \leqslant L\varepsilon^{(k+1)} \tag{4.6}$$

Приближенные выражения функций $X(x)$, $X'(x)$ и нормы $\|X\|$ с высокой точностью (4.6) определяются в процессе вычисления собственных значений λ по схеме (4.3), (4.4). Отметим, что в отличие от метода последовательных приближений не происходит усложнения вычисляемых выражений (изменяется только численное значение λ), а также накопления погрешностей округления (сходимость $\lambda^{(k)}$ контролируется величиной $\varepsilon^{(k)}$).

Изложенный численно-аналитический подход к исследованию многомерных распределенных систем с существенно неоднородными параметрами примыкает к результатам, полученным для классической задачи Штурма – Лиувилля [11, 13, 14]. Векторный случай приводит к ряду особенностей и трудностей, не присущих одномерным системам. Проведенное обобщение имеет не только формальный характер, поскольку ряд прикладных задач удается исследовать с достаточной полнотой и точностью, недоступной известным методам типа Рэлея–Ритца, конечных элементов и др.

5. Примеры. Приведем сперва расчет некоторых модельных примеров с целью иллюстрации изложенного в п. 4 алгоритма. Программную отладку и тестирование предпочтительнее проводить на задачах, допускающих достаточно полное аналитическое исследование (для систем уравнений с постоянными коэффициентами, уравнений типа Эйлера [9] и т.п.).

5.1. Рассмотрим краевую задачу для системы двух уравнений ($N = 2$) типа Эйлера, в которой 2×2-матрицы P, R, Q равны

$$P = \operatorname{diag}(1, 1), \;\; R = (1 + x)^{-2}(r_{ij}), \;\; r_{11} = 1, \;\; r_{12} = r_{21} = 2, \;\; r_{22} = 4, \;\; Q = 0,$$
$$0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{5.1}$$

Отметим, что матрица $R(x)$ неотрицательно определенная. Решение системы (1.3), (5.1) строится стандартным методом [9] в виде $X = C(1 + x)^p$; после подстановки в систему и решения характеристического уравнения получим $p_{1,2} = \tfrac{1}{2} \pm i(5\lambda - \tfrac{1}{4})^{1/2}$, $i = \sqrt{-1}$. Вектор X_n, обращающийся в нуль при $x = 0$, 1, равен

$$X_n(x) = c_n(1, 2)^T (1 + x)^{1/2} \sin((5\lambda_n - \tfrac{1}{4})^{1/2} \ln(1 + x)) \tag{5.2}$$
$$\lambda_n = \tfrac{1}{5}[(\pi n / \ln 2)^2 + \tfrac{1}{4}], \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \lambda_1 = 4{,}1584576$$

Постоянная c_n определяется из условия нормировки (1.4), (2.1) и, в частности, $c_1 = \frac{1}{5}(2/\ln 2)^{\frac{1}{2}} = 0{,}3397287$. Отметим, что корни $p_{3,4} = 0, 1$ приводят к $X \equiv 0$. Возьмем пробную вектор-функцию $\psi = (1, 2)^T \sin \pi x$, весьма далекую от точной $X_1(x)$ (5.2); с помощью метода Рэлея–Ритца получим оценку λ_1 сверху $\lambda_1^* = 4{,}2448420$. Используя процедуру п. 3, 4, для $\lambda_1^0 = \lambda_1^*$ путем численного интегрирования из условия (2.4) получим значение ξ^0 (2.5): $\xi(\lambda_1^*) = 0{,}9857031$; по формуле (2.8) найдем $\varepsilon^0 = 1 - \xi^0 =$ $= 1{,}42969 \cdot 10^{-2}$. Согласно (4.1) уточненное значение $\lambda_1^{(1)} = 4{,}1574409$ и является оценкой снизу, т.е. $\lambda_1^{(1)} \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_1^*$. Вторая итерация согласно (4.3), (4.4) приводит к значению абсциссы $\xi^{(1)} = 1{,}0001758$ и параметру $\varepsilon^{(1)} = -1{,}7158 \cdot 10^{-4}$ и высокоточной оценке сверху $\lambda_1^{(2)} = 4{,}1585057$. В результате получим двустороннюю оценку λ_1 и величину относительной погрешности: $\lambda^{(2)} \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_1^{(1)}$, $\Delta\lambda_1/\lambda_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$. Таким образом, метод позволяет получать высокоточные результаты в более общем случае неотрицательно определенной матрицы $R(x)$.

5.2. Рассмотрим весьма кратко модельный пример, аналитическое решение которого построить не удается. Пусть $P = \mathrm{diag}\,(1, 1)$, $R = (r_{ij})$, где $r_{11} = 1$, $r_{12} = r_{21} =$ $= \cos^2 \pi x$, $r_{22} = 4$; матрицу Q полагаем нулевой. Тогда для пробной функции $\psi = (c_1, c_2)^T \sin \pi x$ с помощью соотношений метода Рэлея–Ритца получим вековое уравнение, из которого следуют оценки сверху для λ_1, λ_2 и связь между c_1, c_2:

$$\lambda_1^* = 2{,}4547038, \quad c_2 = 12{,}0827636 c_1; \quad \lambda_2^* = 10{,}0781280, \quad c_2 = -0{,}0827636 c_1 \tag{5.3}$$

Далее проведем уточнение значения λ_1, исходя из оценки (5.3). С помощью вышеизложенного алгоритма получим $\xi^0 = 0{,}9999776$, $\varepsilon^0 = 2{,}24 \cdot 10^{-5}$, т.е. весьма малую величину ε^0, что соответствует близости пробной функции ψ к первой собственной функции X_1 и первого собственного значения λ_1 полученной оценке λ_1^*. После первой итерации получим $\lambda_1^{(1)} = 2{,}4545938$ – оценку снизу: $\lambda_1^{(1)} \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_1^*$, что приводит к относительной погрешности порядка $2{,}3 \cdot 10^{-5}$.

5.3. Применим изложенный алгоритм к приближенному решению задачи Штурма–Лиувилля для уравнения в частных производных. Рассмотрим свободные колебания равномерно натянутой неоднородной мембраны прямоугольной формы с закрепленными краями в упругой среде. После разделения временной и пространственной переменных получим задачу на собственные значения и функции в прямоугольной области Π с границей Γ (Δ – оператор Лапласа):

$$\begin{aligned} &\Delta u + [\lambda r(x, y) - q(x, y)]u = 0, \quad x, y \in \Pi \backslash \Gamma, \quad u = u(x, y, \lambda) \\ &u|_\Gamma = 0, \quad r(x, y) > 0, \quad q(x, y) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b \end{aligned} \tag{5.4}$$

Здесь $r(x, y)$ – поверхностная плотность, $q(x, y)$ – коэффициент распределенных упругих сил. Допустим, что зависимость этих функций от одной из эйлеровых координат, например y, более слабая; это условие может быть формализовано введением масштаба $\beta = B^{-1}$, где $B \gg b$, т.е. имеем $r = r(x, \beta y)$, $q = q(x, \beta y)$. В пределе при $\beta b \to 0$ ($b \sim a$) функции не зависят от переменной y, что позволяет в (5.4) разделить переменные x, y. Получим

$$u_{nm}(x, y) = X_{nm}(x) Y_m^{(0)}(y), \quad Y_m^{(0)}(y) = \sin(\pi m y / b), \quad n, m = 1, 2, \ldots \tag{5.5}$$

$$X'' + [\lambda r(x, 0) - q(x, 0) - (\pi m/b)^2] X = 0, \quad X(0) = X(a) = 0$$

Здесь X – неизвестная скалярная функция, отвечающая заданной известной функции $Y_m^{(0)}(y)$. Собственные значения λ_{nm} и функции $X_{nm}(x)$ задачи Штурма–Лиувилля

(5.5) строятся эффективно с требуемой точностью при помощи метода ускоренной сходимости, изложенного выше в п. 4, см. также [11, 13].

Если функции $r(x, \beta y)$, $q(x, \beta y)$ относительно мало изменяются по y, то естественно искать $u(x, y)$ в виде

$$u(x, y) \approx u_{(N)}(x, y) = (X, Y^{(0)}_{(y)}) \equiv \sum_{i=1}^{N} X_i Y_i^{(0)}(y), \quad N \geqslant 1$$

$$PX'' + [\lambda R(x) - Q(x) - I]X = 0, \quad X(0) = X(a) = 0 \tag{5.6}$$

Здесь $X(x)$, $Y^0(y)$ – N-векторы, N – достаточно велико; компоненты вектор-функции $Y^{(0)}(y)$ определены согласно (5.5). Симметрические матрицы P, $R(x)$, $Q(x)$, I получаются в результате подстановки выражения $u_{(N)}$ (5.6) в (5.4), умножения на $Y^{(0)}(y)$ и интегрирования по y, $0 \leqslant y \leqslant b$:

$$P = \mathrm{diag}\left(\frac{b}{2}, \ldots, \frac{b}{2}\right), \quad R(x) = \int_0^b r(x, \beta y) Y^{(0)}(y) Y^{(0)T}(y) dy$$

$$Q(x) = \int_0^b q(x, \beta y) Y^{(0)}(y) Y^{(0)T}(y) dy, \quad I = \mathrm{diag}\left(\frac{b}{2}\left(\frac{\pi}{b} i\right)^2\right), \quad i = 1, \ldots, N \tag{5.7}$$

Матрицы P, $R(x)$, I – положительно, а $Q(x)$ – неотрицательно определенные в силу свойств функций $r(x, \beta y)$, $q(x, \beta y)$.

Получена векторная задача Штурма–Лиувилля (5.6), (5.7) частного вида. Высокоточное решение $\lambda^{[1]}$, $X^{[1]}(x)$ строится методом ускоренной сходимости, см. п. 4. Оно будет сколь угодно близким к решению исходной задачи (5.4), если величина $\beta b/N$ достаточно мала. При $\beta b \ll 1$, как установлено выше, достаточно ограничиться скалярной переменной $Y_m^{(0)} = \sin \pi m y / b$, см. (5.5). Оказывается также, что и в общем случае, когда функции $r(x, y)$, $q(x, y)$ допускают разделение переменных, достаточно представление вида (5.5), в котором функции $X_{nm}(x)$ и $Y_{nm}(y)$ определяются как решение совместной краевой задачи. Отметим также, что слабая зависимость функций r, q от y может иметь более общую форму: $r = r_0(x) + \beta r_1(x, y)$, $q = q_0(x) + \beta q_1(x, y)$, где β – малая величина, а r_1, q_1 – произвольные достаточно гладкие функции $(x, y) \in \Pi$.

Если же зависимость $r(x, y)$, $q(x, y)$ не является слабой по обеим переменным, то изложенная процедура может быть модифицирована. Определенное выше решение $\lambda^{[1]}$, $X^{[1]}(x)$ используется для построения аналогичной (5.6) задачи Штурма – Лиувилля с целью уточнения λ, $Y(y)$. Соответствующие матрицы типа P, $R(y)$, $Q(y)$, I вычисляются сходным с (5.7) образом после подстановки выражения $u^{[1]}_{(N)} = (X^{[1]}, Y)$ в (5.4), умножения на $X^{[1]}(x)$и интегрирования по x, $0 \leqslant x \leqslant a$. К задаче на собственные значения λ и функции Y применяется метод ускоренной сходимости; в результате получается уточненное значение $\lambda^{[2]}$ и функция $u^{[2]}_{(N)} = (X^{[1]}(x), Y^{[1]}(y))$. При необходимости эта процедура может быть продолжена рекуррентным образом по отношению к λ, X на основе уточненных $\lambda^{[2]}$, $Y^{[1]}(y)$. В качестве критерия естественно взять величину соответствующего задаче (5.4) функционала.

Вычислительная практика позволяет установить весьма высокую эффективность конечномодового подхода к решению краевой задачи в частных производных (5.4). Например, при $N = 1$ однократная итеративная процедура по x или y дает практически то же значение (величина функционала не больше), что и 4-модовое приближение по методу Рэлея – Ритца, для задач с существенной зависимостью r, q от x, y. Метод, основанный на сочетании конечномодового подхода и алгоритма ускоренной сходимости, требует дальнейшего аналитического и вычислительного обоснования для решения задач на собственные значения и функции, описываемых уравнениями в частных производных с сильно изменяющимися коэффициентами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-01-00221, 96-01-00265).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
2. *Крылов Н.М.* Избранные труды. Киев: Изд-во АН УССР, 1961. Т. 1. 266 с.; Т. 2. 308 с.
3. *Гринберг Г.А.* Новый метод решения некоторых краевых задач для уравнений математической физики, допускающих разделение переменных // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1946. Т. 10. № 2. С. 141–168.
4. *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983. 432 с.
5. *Гулд С.* Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: Мир, 1970. 328 с.
6. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Гостехиздат, 1954. 352 с.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 704 с.
8. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
9. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1953. 468 с.
10. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
11. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Эффективный метод исследования колебаний существенно неоднородных распределенных систем // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 466–478.
12. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. 771 с.; Т. 2. М.: Наука, 1972. 999 с.
13. *Нестеров С.В., Акуленко Л.Д.* Эффективное решение задачи Штурма – Лиувилля // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 1. С. 44–46.
14. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Определение частот и форм колебаний неоднородных распределенных систем с граничными условиями третьего рода // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 547–555.

Москва

Поступила в редакцию
3.06.1998