

УДК 539.3

© 1999 г. И.Т. ДЕНИСЮК

**ТЕРМОУПРУГОСТЬ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ
 С УГЛОВЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ**

Термонапряженное состояние двумерных тел, ограниченных гладкими контурами, изучался в работе [1]. В предлагаемой статье рассматривается термоупругость изотропной пластинки с угловыми включениями.

Пусть в неограниченной изотропной пластинке содержится N инородных угловых включений D_j ($j = \overline{1, N}$), сопряженных с матрицей условиями идеального термомеханического контакта. Контур включения L_j состоит из n_j гладких дуг $L_{jk} = \tilde{t}_{jk} t_{jk+1}$, ($k = \overline{1, n_j}$), и содержит n_j угловых точек. Определим напряженное состояние такой термоизолированной по боковым поверхностям пластинки при стационарных тепловых воздействиях (тепловой поток, сосредоточенные источники, равномерный нагрев).

Учитывая условия статического равновесия и теплового баланса элементов контуров L_j и непрерывность вектора перемещений и температурного поля при переходе через линии сопряжения, включая угловые точки, условия идеального термомеханического контакта в терминах комплексных потенциалов [1] запишем так:

в точках гладкости контуров

$$\Omega_0^-(t) + s_j \overline{\Omega_0^-(t)} d\tilde{t} / dt - m_j \Omega_j^+(t) = 0 \quad (1)$$

$$M_0[\Phi_0^-(t), \Psi_0^-(t), \omega_0^-(t)] - \gamma_j M_j[\Phi_j^+(t), \Psi_j^+(t), \omega_j^+(t)] = 0$$

$$L_0[\Phi_0^-(t), \Psi_0^-(t)] - L_j[\Phi_j^+(t), \Psi_j^+(t)] = 0 \quad (2)$$

в угловых точках

$$\lim_{t \rightarrow t_{jk} \pm 0} [\Omega_0^-(t) + s_j \overline{\Omega_0^-(t)} d\tilde{t} / dt - m_j \Omega_j^+(t)] = 0 \quad (3)$$

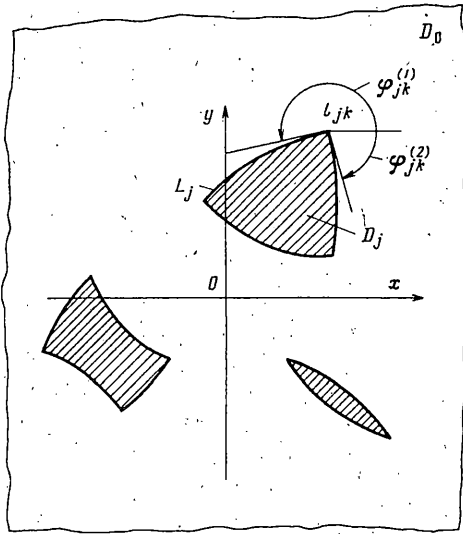
$$\lim_{t \rightarrow t_{jk} \pm 0} \{M_0[\Phi_0^-(t), \Psi_0^-(t), \omega_0^-(t)] - \gamma_j M_j[\Phi_j^+(t), \Psi_j^+(t), \omega_j^+(t)]\} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow t_{jk} \pm 0} \{L_0[\Phi_0^-(t), \Psi_0^-(t)] - L_j[\Phi_j^+(t), \Psi_j^+(t)]\} = 0 \quad (4)$$

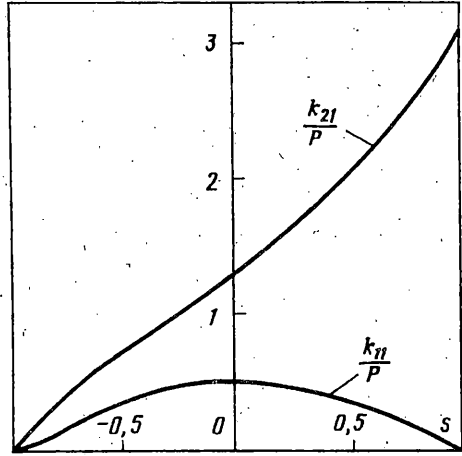
$$\lim_{t \rightarrow t_{jk} \pm 0} \int [\Omega_0^-(t) + s_j \overline{\Omega_0^-(t)} d\tilde{t} / dt - m_j \Omega_j^+(t)] dt = 0 \quad (5)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_{jk} \pm 0} \int \{M_0[\Phi_0^-(t), \Psi_0^-(t), \omega_0^-(t)] - \gamma_j M_j[\Phi_j^+(t), \Psi_j^+(t), \omega_j^+(t)]\} dt = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow t_{jk} \pm 0} \int \{L_0[\Phi_0^-(t), \Psi_0^-(t)] - L_j[\Phi_j^+(t), \Psi_j^+(t)]\} dt = 0 \quad (6)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где операторы действуют по правилам

$$M_j[\Phi_j(t), \Psi_j(t), \omega_j(t)] = \kappa_j \Phi_j(t) - \overline{\Phi_j(t)} - [t \overline{\Phi_j'(t)} + \overline{\Psi_j(t)}] d\bar{t} / dt + \beta_j \omega_j(t)$$

$$L_j[\Phi_j(t), \Psi_j(t)] = \Phi_j(t) + \overline{\Phi_j(t)} + [t \overline{\Phi_j'(t)} + \overline{\Psi_j(t)}] d\bar{t} / dt$$

$$T_j(x, y) = 2 \operatorname{Re} \omega_j(z), \quad \Omega_j(z) = \omega_j'(z), \quad s_j = \frac{\lambda_j - \lambda_0}{\lambda_j + \lambda_0}, \quad m_j = \frac{2\lambda_j}{\lambda_j + \lambda_0} \quad (j = \overline{0, N})$$

Здесь λ_j – коэффициент теплопроводности; для плоского напряженного состояния $\beta_j = 2\alpha_j E_j / (1 + \nu_j)$, $\kappa_j = (3 - \nu_j) / (1 + \nu_j)$, для плоской деформации $\beta_j = 2\alpha_j E_j$, $\kappa_j = 3 - 4\nu_j$, $\gamma_j = G_0 / G_j$, E_j , G_j – модули упругости и сдвига, α_j – термический коэффициент линейного расширения, ν_j – коэффициент Пуассона; $\Phi_j^\pm(t)$, $\Psi_j^\pm(t)$, $\Omega_j^\pm(t)$, $\omega_j^\pm(t)$ – граничные значения функций $\Phi_j(z)$, $\Psi_j(z)$, $\Omega_j(z)$, $\omega_j(z)$ ($j = \overline{0, N}$), при подходе к линии L_j со стороны области D_j берётся знак (+), а со стороны D_0 знак (–), $T_j(x, y)$ – температура; значения индекса $j = \overline{1, N}$ относятся к величинам j -го включения, а значение $j = 0$ – к величинам области $D_0 = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^N D_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$); \mathbb{C} – комплексная плоскость; $t_{jk} \pm 0$

означает стремление точки контура L_j с аффиксом $t = x + iy$ до угловой точки t_{jk} против (+) или согласно (–) ориентации; величины относятся к декартовой прямоугольной системе координат Oxy . Необходимость условий (5), (6) обусловлена отсутствием гладкости контуров в угловых точках.

Таким образом, приходим к задаче сопряжения функций $\Omega_0(z)$, $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$, аналитических в области D_0 , и $\Omega_j(z)$, $\Phi_j(z)$, $\Psi_j(z)$ ($j = \overline{1, N}$), аналитических в своих областях определения D_j , при условиях сопряжения (1)–(6) на L_j . В случае заданного теплового потока на бесконечности функции $\Omega_0(z)$, $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ имеют полюса при $z = \infty$ с известными главными частями, а при наличии сосредоточенных источников – логарифмические особенности в соответствующих точках [1].

Решая каноническую задачу с условиями (1)–(6) для окрестности угловой точки t_{jk}

аналогично работе [2] устанавливаем, что если характеристические уравнения

$$\sin(\lambda\omega_{jk}) = \pm\lambda \sin\omega_{jk}, \quad \mu_j \sin(\lambda\omega_{jk}) = \pm\lambda \sin\omega_{jk}, \quad \lambda_0 = \pi/(\omega_{jk}) \quad (7)$$

$$\mu_j = \frac{\alpha_j \gamma_j - \alpha_0}{1 - \gamma_j}, \quad \Phi_{jk}^{(1)} = \lim_{t \rightarrow t_{jk} + 0} \text{avg}(t - t_{jk}), \quad \Phi_{jk}^{(2)} = \lim_{t \rightarrow t_{jk} - 0} \text{avg}(t - t_{jk})$$

$$\omega_{jk} = \Phi_{jk}^{(1)} - \Phi_{jk}^{(2)},$$

имеют корни $\lambda = \lambda_n \in (0, 1)$, $\lambda_0 \in (0, 1)$, то комплексные потенциалы принимают сингулярности степенного характера с асимптотикой

$$\Phi_j(z) = \sum_{n=1}^4 O\left(\frac{1}{|z - t_{jk}|^{1-\lambda_n}}\right), \quad z\overline{\Phi_j'(z)} + \overline{\Psi_j(z)} = \sum_{n=1}^4 O\left(\frac{1}{|z - t_{jk}|^{1-\lambda_n}}\right), \quad \Omega_j(z) = O\left(\frac{1}{|z - t_{jk}|^{1-\lambda_0}}\right) \quad (8)$$

Характеристические уравнения (7) имеют до четырех корней $\lambda_n \in (0, 1)$ ($n = \overline{1, 4}$), и известны из силовой задачи [3].

Температурные и термоупругие потенциалы представляем суммой сингулярных составляющих $\Omega_{j1}(z)$, $\Phi_{j1}(z)$, $\Psi_{j1}(z)$, что имеют асимптотические представления (8), и слагаемых $\Omega_{j2}(z)$, $\Phi_{j2}(z)$, $\Psi_{j2}(z)$:

$$\Omega_j(z) = \Omega_{j1}(z) + \Omega_{j2}(z), \quad \Psi_j(z) = \Psi_{j1}(z) + \Psi_{j2}(z), \quad \Omega_j(z) = \Omega_{j1}(z) + \Omega_{j2}(z) \quad (9)$$

Сингулярные слагаемые представляем так

$$\Omega_{01}(z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{n_j} [A_{0jk}^\circ \theta_{jk}^\circ(z) + C_{0jk}^\circ \zeta_{jk}^\circ(z)], \quad \Omega_{j1}(z) = \sum_{k=1}^{n_j} [A_{jk}^\circ \theta_{jk}^\circ(z) + C_{jk}^\circ \zeta_{jk}^\circ(z)] \quad (10)$$

$$\Phi_{01}(z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{n=1}^{m_{jk}} [A_{0jkn} \theta_{jkn}^\circ(z) + C_{0jkn} \zeta_{jkn}^\circ(z)], \quad \Psi_{01}(z) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{n=1}^{m_{jk}} [E_{0jkn} \theta_{jkn}^\circ(z) +$$

$$+ F_{0jkn} \zeta_{jkn}^\circ(z) + A_{0jkn} \delta_{jkn}(z) + C_{0jkn} \varepsilon_{jkn}(z)]$$

$$\Phi_{j1}(z) = \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{n=1}^{m_{jk}} [A_{jkn} \theta_{jkn}^\circ(z) + C_{jkn} \zeta_{jkn}^\circ(z)], \quad \Psi_{j1}(z) = \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{n=1}^{m_{jk}} [E_{jkn} \theta_{jkn}^\circ(z) +$$

$$+ F_{jkn} \zeta_{jkn}^\circ(z) + A_{jkn} \delta_{jkn}(z) + C_{jkn} \varepsilon_{jkn}(z)] \quad (11)$$

$$\delta_{jkn}(z) = (1 - \lambda_{jkn}) \theta_{jkn}(z) \left(\frac{\bar{t}_{jk}}{z - t_{jk}} - \frac{\bar{t}_{jk+1}}{z - t_{jk+1}} \right), \quad \varepsilon_{jkn}(z) = (1 - \lambda_{jkn}) \zeta_{jkn}(z) \times$$

$$\times \left(\frac{\bar{t}_{jk+1}}{z - t_{jk+1}} - \frac{\bar{t}_{jk}}{z - t_{jk}} \right), \quad \theta_{jkn}^\circ(z) = \theta_{jkn}(z) - 1, \quad \zeta_{jkn}^\circ(z) = \zeta_{jkn}(z) - 1$$

$$\theta_{jkn}(z) = \left(\frac{z - t_{jk+1}}{z - t_{jk}} \right)^{1-\lambda_{jkn}}, \quad \zeta_{jkn}(z) = \left(\frac{z - t_{jk}}{z - t_{jk+1}} \right)^{1-\lambda_{jkn+1n}}$$

где m_{jk} — число корней $\lambda_{jkn} \in (0, 1)$ уравнений (7) в угловой точке t_{jk} , A_{0jkn} , C_{0jkn} , ..., F_{jkn} — коэффициенты. Функции $\theta_{jkn}(z)$, $\zeta_{jkn}(z)$ определены в $\mathbb{C} \setminus L_{jk}$ и на берегах разреза L_{jk} выполняются следующие соотношения для их граничных значений

$$\theta_{jkn}^-(t) = \theta_{jkn}^+(t) \exp[2\pi i(\lambda_{jkn} - 1)], \quad \zeta_{jkn}^-(t) = \zeta_{jkn}^+(t) \exp[2\pi i(1 - \lambda_{jkn})] \quad (12)$$

Функции $\Phi_{j2}(z)$, $\Omega_{j2}(z)$ в формулах (9) являются ограниченными аналитическими функциями в областях их определения, а $\Psi_{j2}(z)$ определяет выражение $z\overline{\Phi'_{j2}(z)} + \overline{\Psi_{j2}(z)}$ как ограниченную непрерывную функцию области D_j .

Пусть пластинка содержит одно включение D_1 , тогда вторые слагаемые представлений (9) записываем интегралами Коши

$$\Omega_{02}(z) = b_0(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{w_0(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad \Omega_{12}(z) = b_1(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{w_1(\tau) d\tau}{\tau - z} \quad (13)$$

$$\Phi_{02}(z) = G_1(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{u_0(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad \Psi_{02}(z) = G_2(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{v_0(\tau)}{\tau - z} - \frac{\bar{\tau} u_0(\tau) d\tau}{(\tau - z)^2} \right]$$

$$\Phi_{12}(z) = a_1(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{u_1(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad \Psi_{12}(z) = a_2(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{v_1(\tau)}{\tau - z} - \frac{\bar{\tau} u_1(\tau)}{(\tau - z)^2} \right] d\tau \quad (14)$$

где $b_0(z)$, $G_1(z)$, $G_2(z)$ – известные функции, определяемые видом тепловых воздействий в области D_0 ; $b_1(z)$, $a_1(z)$, $a_2(z)$ содержат известные слагаемые, обусловленные наличием у включений тепловых факторов [1].

Подставляя представления (9)–(11), (13), (14) в граничные условия (1), (2) и полагая

$$v_1(t) = \frac{1}{1 - \gamma_1} [(1 + \gamma_1 \kappa_1) \overline{u_1(t)} - (1 + \kappa_0) \overline{u_0(t)}] \frac{d\bar{t}}{dt}$$

$$v_0(t) = \frac{1}{1 - \tau_1} [\gamma_1 (1 + \kappa_1) \overline{u_1(t)} - (\gamma_1 + \kappa_0) \overline{u_0(t)}] \frac{d\bar{t}}{dt} \quad (15)$$

$$w_1(t) = \frac{1}{m} \left[w_0(t) - s_1 \overline{w_0(t)} \frac{d\bar{t}}{dt} \right] \quad (16)$$

получим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} c_1 u_1(t) + d_1 u_0(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} [u_1(\tau) - u_0(\tau)] k_1(\tau, t) d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} [\overline{u_1(\tau)} - \overline{u_0(\tau)}] k_2(\tau, t) d\bar{\tau} = g(t) \\ \gamma_1 c_1 u_1(t) + d_1 u_0(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} [\gamma_1 \kappa_1 u_1(\tau) - \kappa_0 u_0(\tau)] k_1(\tau, t) d\tau - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} [\gamma_1 \overline{u_1(\tau)} - \overline{u_0(\tau)}] k_2(\tau, t) d\bar{\tau} = h(t) \end{aligned} \quad (17)$$

и уравнение

$$w_0(t) + \frac{s_1}{2\pi i} \int_{L_1} \overline{w_0(\tau)} k_1(\tau, t) d\bar{\tau} = g_0(t) \quad (18)$$

$$c_1 = \frac{1 + \gamma_1 \kappa_1}{1 - \gamma_1}, \quad d_1 = \frac{\gamma_1 + \kappa_0}{\gamma_1 - 1}, \quad k_1(\tau, t) = \frac{d}{dt} \ln \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}}, \quad k_2(\tau, t) = \frac{d}{dt} \frac{t - \tau}{\bar{\tau} - \bar{t}}$$

$$g(t) = L_{10} [G_1^-(t) + \Phi_{01}^-(t), G_2^-(t) + \Psi_{01}^-(t)] - L_1 [a_1^+(t) + \Phi_{11}^+(t), a_2^+(t) + \Psi_{11}^+(t)]$$

$$h(t) = -M_0 [G_1^-(t) + \Phi_{01}^-(t), G_2^-(t) + \Psi_{01}^-(t), \omega_0^-(t)] + \gamma_1 M_1 [a_1^+(t) + \Phi_{11}^+(t),$$

$$a_2^+(t) + \Psi_{11}^+(t), \omega_1^+(t)], \quad g_0(t) = \Omega_{01}^-(t) + s_1 \overline{\Omega_{01}^-(t)} \frac{d\bar{t}}{dt} - m_1 \Omega_{11}^+(t) - b_0(t) + s_1 \overline{b_0(t)} \frac{d\bar{t}}{dt} + m_1 b_1(t)$$

Вследствии выполнения условий (3)–(6) функции $g(t)$, $h(t)$, $g_0(t)$ ограничены и непре-

рывны на L_1 , в том числе и в угловых точках. Ядра интегральных уравнений $k_1(\tau, t)$ и $k_2(\tau, t)$ определяются аналогично [4] как непрерывные функции на L_1 , поэтому система (17) и уравнение (18) являются фредгольмовыми.

Пусть $\tilde{u}_1(t)$ и $\tilde{u}_0(t)$ решение однородной системы, что соответствует (17), тогда такую систему при учете (1) можно рассматривать как такие соотношения:

$$L_1[\tilde{\Phi}_1^+(t), \tilde{\Psi}_1^+(t)] = L_0[\tilde{\Phi}_0^-(t), \tilde{\Psi}_0^-(t)], \quad \gamma_1 M_1[\tilde{\Phi}_1^+(t), \tilde{\Psi}_1^+(t)] = M_0[\tilde{\Phi}_0^-(t), \tilde{\Psi}_0^-(t)] \quad (19)$$

где функции $\tilde{\Phi}_1(t)$, $\tilde{\Psi}_1(t)$, $\tilde{\Phi}_0(t)$, $\tilde{\Psi}_0(t)$ представляются формулами (13), в которых $G_1(t)$, $G_2(t)$, $a_1(t)$ и $a_2(t)$ равны нулю. Функции, реализующие условия (19), автомодельные (2), принадлежат степенному классу и представимы в виде

$$\tilde{\Phi}_0^-(t) = C_1 t^\lambda, \quad \tilde{\Psi}_0^-(t) = C_2 t^\lambda, \quad \tilde{\Phi}_1^+(t) = C_3 t^\lambda, \quad \tilde{\Psi}_1^+(t) = C_4 t^\lambda \quad (20)$$

Удовлетворяя с помощью (20) уравнениям (19), находим

$$\tilde{\Phi}_0^-(t) = iC \frac{1 + \kappa_0}{G_1}, \quad \tilde{\Phi}_1^+(t) = iC \frac{1 + \kappa_1}{G_0}, \quad \tilde{\Psi}_0^-(t) = \tilde{\Psi}_1^+(t) = 0, \quad C \in \mathbb{R} \quad (21)$$

Учитывая представления левых частей равенств 21 интегралами типа Коши (13), согласно формул Сохацкого записываем

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(t) &= \Phi_0^+(t), \quad \tilde{u}_1(t) = \Phi_1^-(t), \quad \tilde{v}_0(t) = \Phi_0^+(t) \frac{d\bar{t}}{dt} + \left[i \frac{d\Phi_0^+(t)}{dt} + \Psi_0^+(t) \right], \\ \tilde{v}_1(t) &= -\Phi_1^-(t) \frac{d\bar{t}}{dt} - \left[i \frac{d\Phi_1^-(t)}{dt} + \Psi_1^-(t) \right], \quad C = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

где $\Phi_0^+(t)$, $\Psi_0^+(t)$ и $\Phi_1^-(t)$, $\Psi_1^-(t)$ — граничные значения аналитических функций в D_1 и D_0 соответственно. Подставляя (22) в соотношения (15) и используя групповое свойство подобия, находим, что $\tilde{u}_0(t) = \tilde{u}_1(t) = \tilde{v}_0(t) = \tilde{v}_1(t) = 0$. Таким образом, система интегральных уравнений (17) однозначно разрешима [4]. Аналогично доказывается разрешимость интегрального уравнения (18).

Устремляя в (17) $\gamma_1 \rightarrow \infty$, $\kappa_1 \rightarrow -1$ ($\gamma_1 \rightarrow 0$), получим интегральное уравнение для выреза (абсолютно жесткого включения), что в случае гладких контуров и силовых воздействий совпадают с известными уравнениями силовой задачи [5].

Для пластинки с N включениями вторые слагаемые комплексных потенциалов (9) $\Omega_{02}(z)$, $\Phi_{02}(z)$ и $\Psi_{02}(z)$ берем в виде

$$\Omega_{0z}(z) = b_0(z) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{w_{0j}(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad \Phi_{02}(z) = G_1(z) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{u_{0j}(\tau) d\tau}{\tau - z}$$

$$\Psi_{02}(z) = G_2(z) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \left[\frac{v_{0j}(\tau)}{\tau - z} - \frac{\bar{\tau} u_{0j}(\tau)}{(\tau - z)^2} \right] d\tau$$

а $\Omega_{j2}(z)$, $\Phi_{j2}(z)$ и $\Psi_{j2}(z)$ ($j = \overline{1, N}$), записывается для каждого включения согласно (13) и (14).

Распределение локальных термонапряжений и перемещений, найденное на основе потенциалов (9)–(10), совпадает с распределением соответствующей силовой плоской задачи [3]. Для установления формул определения коэффициентов интенсивности записываем комбинацию напряжений $\sigma_{\beta} - \sigma_r + 2i\tau_{r\beta}$ согласно распределению напряжений [3] и с помощью потенциалов [1]. В результате получим

$$\begin{aligned}
[\bar{z}\Phi_0'(z) + \Psi_0(z)]|_{z=r_{jk} + r \exp(i\beta)} &= \frac{\exp(-2i\beta)}{\sqrt{2}} \left\{ r^{\lambda_1 - 1} \lambda_1 \left[k_{11} - k_{21} \frac{\alpha_0 + \mu_j}{\alpha_0(1 - \mu_j)} \right] \times \right. \\
&\times [(\lambda_1 - 1) \exp(i\theta_{11}) - \lambda_1 \exp(i\theta_{12}) - \exp(i\theta_{13})] - r^{\lambda_2 - 1} i \lambda_2 \times \\
&\times \left[k_{12} + k_{22} \frac{\alpha_0 + \mu_j}{\alpha_0(1 - \mu_j)} \right] [(1 - \lambda_2) \exp(i\theta_{21}) + \lambda_2 \exp(i\theta_{22}) - \exp(i\theta_{23})] - \\
&- r^{\lambda_3 - 1} \lambda_3 \frac{1 + \alpha_0}{\alpha_0(1 - \mu_j)} k_{21} [(\lambda_3 - 1) \exp(i\theta_{31}) - \lambda_3 \exp(i\theta_{32}) - \mu_j \exp(i\theta_{33})] + \\
&+ \mu_j \exp(i\theta_{42}) \} + O(1) \tag{23}
\end{aligned}$$

$$\theta_{n1} = (\lambda_n - 1)\beta - \lambda_n \varphi_{jk}^{(1)} - \omega_n, \quad \theta_{n2} = (\lambda_n + 1)\beta - (\lambda_n + 2)\varphi_{jk}^{(1)} - \omega_n$$

$$\theta_{n3} = (\lambda_n + 1)\beta - \lambda_n \varphi_{jk}^{(1)} + \omega_n, \quad \omega_n = 0, 5[(1 + \lambda_n)\varphi_{jk}^{(2)} + (1 - \lambda_n)\varphi_{jk}^{(1)}]$$

$$(n = \overline{1, 4}) \quad \lambda_n \in (0, 4)$$

Применение формулы (23) заключается в выделении в левой части членов с особенностями $r(1 - \lambda_n)$ и приравниванием в равенстве (23) выражений при них, а в полученных соотношениях членов с одинаковыми экспоненциальными функциями. Это дает систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов интенсивности.

Термоупругие потенциалы (9) должны удовлетворять условиям однозначности смещений, равенству нулю главного вектора и момента усилий, приложенных со стороны пластинки к включениям, а температурные – однозначности температурного поля и теплового баланса включений [1].

Рассмотрим пластинку с особой разновидностью угловых включений – тонкими включениями, занимающими гладкие линии L_j ($j = \overline{1, N}$). Будем различать одну сторону L_j^+ включения L_j , на линии сопряжения которой с берегом пластинки условия имеют вид (1)–(6), и другую L_j^- , которая определяется условиями, отличающимися от (1)–(6) противоположными граничными значениями комплексных потенциалов. Такое определение сторон посредством граничных значений комплексных потенциалов аналогичное определению берегов щелей или жестких полосок [5].

Комплексные потенциалы строятся согласно (9), где сингулярные слагаемые, как следует из характеристических уравнений (7) при $\omega_{jk} = 2\pi$, имеют порядок 0,5. В случае одного включения вторые слагаемые потенциалов берутся в виде (13), (14) с плотностями, определяемых системой интегральных уравнений, которая состоит из уравнений (17), (18) и присоединенных таких же, но с заменой в левых частях безинтегральных членов на противоположные, а в правых – граничных значений на противоположные. Для ограниченности интегралов в (13) и (14) необходимо требовать равенство плотностей в концах соответствующих дуг L_j нулю.

Для N тонких включений вторые слагаемые потенциалов строятся как и для случая угловых включений.

Как пример исследуем термонапряженное состояние пластинки с тонким упругим теплопроводящим включением, занимающим отрезок $[-l, l]$ действительной оси при равномерном нагревании композиции на величину ΔT . Термоупругие потенциалы записываем согласно (9) в виде

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=1}^2 \Phi_{0k}(z), \quad \Psi_0(z) = \sum_{k=1}^2 \Psi_{0k}(z), \quad \Phi_1(x) = \sum_{k=1}^2 \Phi_{1k}(x), \quad \Psi_1(x) = \sum_{k=1}^2 \Psi_{1k}(x) \tag{24}$$

с такими сингулярными слагаемыми:

$$\begin{aligned} \Phi_{01}(z) &= A_{011}\theta_{011}^{\circ}(z) + A_{012}\zeta_{011}^{\circ}(z), \quad \Psi_{01}(z) = E_{011}\theta_{011}^{\circ}(z) + E_{012}\zeta_{011}^{\circ}(z) + \\ &+ A_{011}\delta_{011}(z) + A_{012}\varepsilon_{011}(z), \quad \Phi_{11}(x) = A_{11}\theta_{11}^{\circ}(x) + A_{12}\zeta_{012}^{\circ}(x) \\ \Psi_{11}(x) &= E_{11}\theta_{011}^{\circ}(x) + E_{12}\zeta_{011}^{\circ}(x) + A_{11}\delta_{011}(x) + A_{12}\varepsilon_{011}(x) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\theta_{011}^{\circ}(z) = \sqrt{\frac{z+l}{z-l}} - 1, \quad \zeta_{011}^{\circ}(z) = \sqrt{\frac{z-l}{z+l}} - 1, \quad \delta_{011}(z) = \sqrt{\frac{z+l}{z-l}} \frac{zl}{l^2 - z^2}$$

$$\varepsilon_{011}(z) = \sqrt{\frac{z-l}{z+l}} \frac{zl}{z^2 - l^2}$$

аналогичные представления для $\theta_{011}^{\circ}(x)$, $\zeta_{011}^{\circ}(x)$, $\delta_{011}(x)$, $\varepsilon_{011}(x)$.

Как следует из соотношений (12) на отрезке $(-1, 1)$ имеют место равенства

$$\sqrt{\frac{f \mp l}{z \pm l}} = \pm \sqrt{\frac{x \mp l}{x \pm l}}, \quad \sqrt{\frac{x \mp l}{x \pm l}} = -\sqrt{\frac{x+l}{x \pm l}}$$

Ограниченные слагаемые $\Phi_{02}(z)$, $\Psi_{02}(z)$, $\Phi_{12}(x)$, $\Psi_{12}(x)$ представляем согласно (14), где $G_{01}(z) = C_0 i$, $G_{02}(z) = 0$, $a_1(x) = C_1 i$, $a_2(x) = 0$, $C_0 = 2G_0 \varepsilon_0 / (1 + \kappa_0)$, ε_0 — угол поворота пластинки относительно координатной системы; $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$. Полученная система интегральных уравнений в результате превращения ядер интегральных уравнений на отрезке $[-l, l]$ в нули переходит в систему линейных алгебраических уравнений относительно плотностей. Решение ее имеет вид $u_0(t) = v_0(t) = u_1(x) = v_1(x) = 0$ при условиях (получающихся приравниванием выражений при радикалах):

$$\begin{aligned} A_{01s} - \bar{A}_{01s} - E_{01s} &= -A_{1s} + \bar{A}_{1s} + E_{1s}, \quad \kappa_0 A_{01s} + \bar{A}_{01s} + \bar{E}_{01s} = -\gamma_1 (\kappa_1 A_{1s} + \bar{A}_{1s} + \bar{E}_{1s}) \\ (s = \bar{1}, 2), \quad A_{011} + A_{012} + \bar{A}_{011} + \bar{A}_{012} + \bar{E}_{011} + \bar{E}_{012} &= A_{11} + A_{12} + \bar{A}_{11} + \\ + \bar{A}_{12} + \bar{E}_{11} + \bar{E}_{12}, \quad \kappa_0 (A_{011} + A_{012}) - (\bar{A}_{011} + \bar{A}_{012}) - (\bar{E}_{011} + \bar{E}_{012}) &= \\ = \gamma_1 [\kappa_1 (A_{11} + A_{12}) - (\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}) - (\bar{E}_{11} + \bar{E}_{12})] + g_1 \end{aligned} \quad (26)$$

$$g_1 = [\gamma_1 (1 + \kappa_1) C_1 - (1 + \kappa_0) C_0] i + (\gamma_1 \beta_1 - \beta_0) \Delta T$$

Присоединяя к (26) уравнения $A_{011} = A_{012}$, $E_{011} = E_{012}$, следующие из условий однозначности перемещений и отсутствия главного вектора внешних усилий, примененных ко включению, получим совместимую систему уравнений.

Равенство нулю главного момента внешних усилий, примененных к включению, при учете (24), (26) приводит к соотношению $\gamma_1 (1 + \kappa_1) C_1 - (1 + \kappa_0) C_0 = 0$. Отсюда следует, что при фиксировании пластинки относительно системы координат ($\varepsilon_0 = 0$) величины $C_0 = C_1 = 0$. Таким образом, потенциалы представляются формулами (24), (25), где $\Phi_{02}(z) = \Psi_{02}(z) = \Phi_{12}(x) = \Psi_{12}(x) \equiv 0$.

Подставляя найденные потенциалы в формулу 23 и полагая для правой вершины $\varphi_{11}^{(1)} = \pi$, $\varphi_{11}^{(2)} = -\pi$, а для левой $\varphi_{12}^{(1)} = 2\pi$, $\varphi_{12}^{(0)} = 0$, получим коэффициенты интенсивности термонапряжений

$$\begin{aligned} k_{11} &= (1 - s^2)(1 - \kappa_1 \kappa_0) P / N_0, \quad k_{12} = 0 \\ k_{21} &= -(1 + s) \kappa_0 [(1 + \kappa_0)(1 + s) + (1 + \kappa_1)(1 - s)] P / N_0, \quad k_{22} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$P = 4\sqrt{l}(\alpha_1 - \alpha_0)G_0\Delta T(1 + \kappa_0)^{-1}; \quad \gamma_1 = \frac{1-s}{1+s}$$

$$N_0 = [1 - s + \kappa_0(1 + s)][1 + s + \kappa_1(1 - s)]$$

справедливые для обеих концов включения.

В случае трещины ($s = -1, E_1 = 0$) $k_{11} = k_{12} = k_{21} = k_{22} = 0$, для абсолютно жесткого стрингера ($s = 1$) $k_{11} = k_{12} = k_{22} = 0, k_{21} = 4\sqrt{l}\alpha_0 G_0 \Delta T$, что согласуется с [6], учитывая принятое там распределение, и для однородной пластинки ($s = 0, \alpha_1 = \alpha_0, \nu_1 = \nu_0$) $k_{11} = k_{12} = k_{21} = k_{22} = 0$.

Из (27) вытекает, что интенсивность напряжений пропорциональна разности коэффициентов линейного расширения материалов матрицы и включения. Зависимость величин k_{11}/P и k_{21}/P от упругих свойств компонент, а именно, от относительной жесткости материала включения $s = (1 - \gamma_1)/(1 + \gamma_1)$ при коэффициентах Пуассона $\nu_0 = 0,3$ и $\nu_1 = 0,25$ показано на рисунке, откуда следует, что для жесткого включения ($s > 0$) преобладающее влияние имеет k_{21} . Во включении напряжения $\sigma_y = -2(E_{11} + 2A_{11}), \sigma_x = 2(E_{11} - 2A_{11}), \tau_{xy} = 0$ остаются постоянными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1972. 200 с.
2. Денисюк И.Т. Особенность напряжений анизотропной пластинки с угловым вырезом // Прикл. механика. 1996. Т. 32. № 1. С. 48–52.
3. Денисюк И.Т. Напряженное состояние вблизи особой линии поверхности раздела сред // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 64–70.
4. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1962. 600 с.
5. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
6. Денисюк И.Т., Садивский В.М. О напряженно-деформированном состоянии вблизи жестких включений, обусловленном термообработкой // Физ.-хим. механика материалов. 1983. № 1. С. 105–106.

Луцк

Поступила в редакцию
17.12.1996