

УДК 539.375

© 1999 г. В.В. БОЛОТИН, М.Ю. ПАНОВ, О.В. ТРИФОНОВ

МЕХАНИКА РОСТА ВНУТРЕННИХ УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН

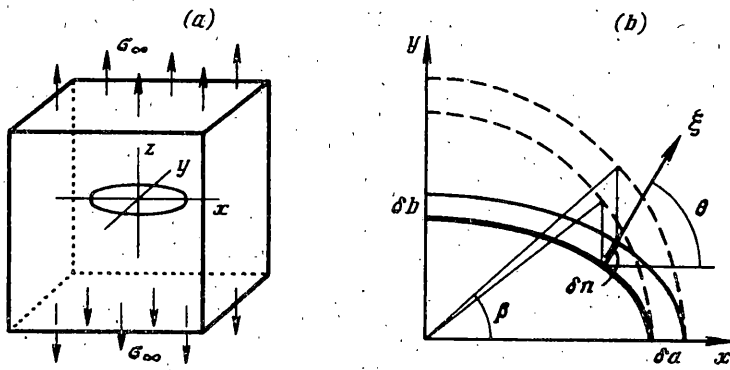
Теория усталостных трещин, основанная на синтезе механики разрушения и механики накопления рассеянных повреждений, применена для прогнозирования роста внутренних трещин отрыва эллиптической формы в упруго деформируемой повреждаемой среде. Условия устойчивости системы тело с трещиной – нагрузка дополнены уравнением накопления повреждений у фронта трещины и на его продолжении, а также уравнением, которое описывает изменение условий на фронте растущей трещины. Проведен численный анализ влияния свойств материала, начальных размеров трещины и начальных условий на ее фронте на число циклов до страгивания трещины, на изменение размеров трещины и соотношения между ними, на изменение меры повреждений и эффективного радиуса кривизны по периметру фронта трещины в процессе роста. Конечные результаты представлены в виде стандартных диаграмм, представляющих скорости роста характерных размеров трещины как функции размахов соответствующих коэффициентов интенсивности напряжений.

1. Усталостные трещины, как правило, зарождаются у поверхности циклически нагружаемых элементов конструкций и затем распространяются вглубь. Трещины, зародившиеся из внутренних дефектов или внутренних концентраторов напряжений, встречаются реже, однако также представляют интерес. Кроме того, они служат удобной моделью для того, чтобы апробировать методы, которые в дальнейшем могут быть применены к трещинам, зарождающимся у поверхности.

Теория роста усталостных трещин, основанная на синтезе механики разрушения и механики накопления рассеянных повреждений, была предложена в работах [1, 2]. Эта теория была применена для прогнозирования роста плоских внутренних [1–5] и краевых трещин [6, 7], а также трещин, взаимодействующих между собой или с границей раздела двух материалов [8, 9]. Кинетика роста внутренней трещины отрыва, имеющей в плане форму круга, была изучена в [10]. Предварительный анализ применительно к задаче о трещине эллиптической формы был выполнен в [11], где были получены выражения для обобщенных сил и проведено сопоставление с другими подходами к этой задаче в рамках механики квазихрупкого разрушения. Родственные задачи о распространении отслоений в композитах, имеющих в плане эллиптическую форму, рассмотрены в [12–15]. Обзор результатов можно найти в статье [16] и книгах [17, 18].

Прогнозирование роста усталостных трещин, размеры и форма которых заданы при помощи двух и более параметров, обычно проводят, используя эмпирические уравнения типа уравнений Пэриса – Эрдогана с заменой размаха ΔK_I коэффициента интенсивности напряжений K_I размахами локальных значений этого коэффициента. Типичные уравнения для эллиптической или полуэллиптической трещины имеют вид

$$\frac{da}{dN} = c(\Delta K_a)^m, \quad \frac{db}{dN} = c(\Delta K_b)^m \quad (1.1)$$



Фиг. 1

где $a \geq b$ длины полуосей эллипса, s и t эмпирические постоянные, ΔK_a и ΔK_b – значения размаха коэффициента интенсивности напряжения K_I у концов полуосей. Для внутренней трещины в теле больших размеров коэффициент интенсивности как функция эллиптического угла β (фиг. 1) определяется как

$$K_I(\beta) = \frac{\sigma_\infty(\pi b)^{1/2}}{E(k)} \left(\sin^2 \beta + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \beta \right)^{1/4} \quad (1.2)$$

где σ_∞ – заданное на бесконечности растягивающее напряжение, $E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода, $k^2 = 1 - (b/a)^2$. При $\beta = 0$ и $\beta = \pi/2$ соответственно получаем, что в правые части уравнений (1.1) входят значения размахов:

$$\Delta K_a = \frac{\Delta \sigma_\infty(\pi b)^{1/2}}{E(k)} \left(\frac{b}{a} \right)^{1/2}, \quad \Delta K_b = \frac{\Delta \sigma_\infty(\pi b)^{1/2}}{E(k)} \quad (1.3)$$

Для полуэллиптических трещин в формулы (1.2) и (1.3) вводят дополнительные поправочные коэффициенты, учитывающие, в частности, толщину плиты [19, 20].

Цель данной работы состоит в том, чтобы описать кинетику роста трещины, избегая использование эмпирических уравнений типа (1.1), примененных (чисто эвристически) к более сложным задачам, чем те, для которых эти уравнения могут считаться достаточно обоснованными. Кроме того, поставлена цель включить начальную и заключительную стадии роста трещины, поскольку уравнения (1.1) описывают лишь среднюю стадию.

Следуя работам [1–3, 17], будем трактовать упругое тело с трещиной в совокупности с приложенной нагрузкой как механическую систему с односторонними связями. Ограничиваясь квазистатическими процессами, будем полагать, что все состояния системы, включая возмущенные, являются состояниями равновесия в обычном смысле. Применим принцип виртуальных перемещений для систем с односторонними связями:

$$\delta W \leq 0 \quad (1.4)$$

При этом при вычислении виртуальной работы δW варьированию подлежат только координаты Гриффитса – неубывающие параметры, характеризующие форму и размеры трещины. В случае эллиптической трещины такими параметрами будут длины полуосей a и b (фиг. 1). Тогда

$$\delta W = (G_a - \Gamma_a)\delta a + (G_b - \Gamma_b)\delta b \quad (1.5)$$

где G_a и G_b – обобщенные силы, продвигающие трещину, Γ_a и Γ_b – соответствующие

силы сопротивления. Для упругого тела

$$G_a = -\partial U / \partial a, G_b = -\partial U / \partial b \quad (1.6)$$

где U – потенциальная энергия деформации. Ее величина дается формулой [21]

$$U = \text{const} - \frac{2\pi\sigma_\infty^2 ab^2(1-\nu)}{3\mu E(k)} \quad (1.7)$$

где μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона. Подставляя (1.7) в (1.6), получим

$$G_a = \frac{2\pi\sigma_\infty^2 b^2(1-\nu)}{3\mu E(k)} \left[1 + k'^2 \frac{D(k)}{E(k)} \right] \quad (1.8)$$

$$G_b = \frac{2\pi\sigma_\infty^2 ab(1-\nu)}{3\mu E(k)} \left[2 - k'^2 \frac{D(k)}{E(k)} \right]$$

$$D(k) = \frac{K(k) - E(k)}{k^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \beta d\beta}{[1 - k^2 \sin^2 \beta]^{3/2}}, \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

Отметим, что правые части формул (1.8) отличаются от формул, которые получаются формальным распространением формулы Ирвина

$$G = K_I^2(1 - \nu^2) / E \quad (1.9)$$

на случай эллиптической трещины с заменой K_I на локальное значение коэффициента интенсивности (1.2). Для сильно удлиненного эллипса численное расхождение между формулами (1.8) и (1.9) может оказаться велико. Сравнительный анализ различных подходов к определению обобщенных сил, продвигающих трещину эллиптической формы в плане, проведен в [11].

2. При определении обобщенных сил сопротивления необходимо учитывать изменение удельной работы разрушения γ вследствие накопления повреждений на фронте трещины и ее продолжении, т.е. в дальнем поле. Виртуальная работа разрушения вычисляется как

$$\delta W_f = -\oint \gamma(\beta) \delta n ds \quad (2.1)$$

где $\delta n(\beta)$ – виртуальное перемещение фронта трещины в направлении нормали к контуру n ; ds – элемент длины дуги фронта; интегрирование производится по всему контуру трещины. Представляя уравнение контура в виде $x = a \cos \beta$, $y = b \sin \beta$ и замечая, что угол наклона нормали n к оси Ox (фиг. 1) определяется из условия $\text{tg} \theta = (a/b) \text{tg} \beta$, находим:

$$\delta n(\beta) = \frac{b \delta a \cos^2 \beta + a \delta b \sin^2 \beta}{(a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)^{3/2}} \quad (2.2)$$

$$ds = (a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)^{1/2} d\beta$$

Подстановка формул (2.2) в (2.1) дает

$$\delta W_f = - \int_0^{2\pi} \gamma(\beta) (b \delta a \cos^2 \beta + a \delta b \sin^2 \beta) d\beta$$

откуда с учетом (1.5) получаем выражения для обобщенных сил сопротивления

$$\Gamma_a = \int_0^{2\pi} \gamma(\beta) b \cos^2 \beta d\beta, \quad \Gamma_b = \int_0^{2\pi} \gamma(\beta) a \sin^2 \beta d\beta \quad (2.3)$$

Значения удельной работы разрушения зависят от меры повреждений на фронте

трещины, которая в свою очередь зависит от истории изменения напряжений в рассматриваемой частице материала. Таким образом, уравнения (2.3) должны быть дополнены уравнениями накопления повреждений и изменения эффективной кривизны на фронте, а также формулами для напряжений у фронта трещины и на ее продолжении.

Будем характеризовать уровень повреждений скалярной мерой $\omega \in [0, 1]$, где значение $\omega = 0$ соответствует неповрежденному, $\omega = 1$ полностью поврежденному материалу. Примем, что рост этой меры определяется размахом $\Delta\sigma(\xi)$ напряжения отрыва $\sigma_z \equiv \sigma_z(\xi)$ в плоскости $z = 0$ в течение одного цикла нагружения. Здесь ξ – координата, отсчитываемая от границы трещины в направлении внешней нормали (фиг. 1). Кроме того, примем, что удельная работа разрушения γ зависит только от меры повреждений в каждой частице материала. Таким образом, должны быть заданы уравнения типа $\partial\omega/\partial N = f(\Delta\sigma, \omega)$ для скорости накопления повреждений и формула типа $\gamma = \gamma_0 h(\omega)$ для удельной работы разрушения поврежденного материала. При этом $f(\Delta\sigma, \omega) \geq 0$, $h(\omega) \geq 0$. На некотором отрезке из $[0, 1]$ функция $h(\omega)$ может принимать значения, большие единицы, что позволяет при необходимости включать в рассмотрение эффект экранирования, т.е. повышение трещиностойкости вследствие образования некоторой специфической системы микротрещин [22].

Фрактографическая картина у фронта трещины может быть весьма сложна. Для определения напряжений $\sigma(\xi)$ схематизируем трещину в виде сильно сплющенного эллипсоида. Полуоси этого эллипсоида в плоскости трещины, как и ранее, обозначим a и b . Размер третьей полуоси c выберем так, чтобы радиус кривизны ρ в плоскости $z = 0$ соответствовал концентрации напряжений на фронте. Эффективный радиус ρ , в свою очередь, зависит от скорости роста трещины и уровня повреждений на ее фронте, что позволяет учесть эффекты заострения и затупления фронта. В данной статье используем уравнение, предложенное в [16]:

$$\frac{d\rho}{dN} = \frac{\rho_s - \rho}{\lambda_\rho} \frac{dn}{dN} + (\rho_b - \rho) \frac{d\psi}{dN} \quad (2.4)$$

Здесь ρ – значение эффективного радиуса в каждой точке фронта; dn/dN – скорость роста трещины по нормали к ее текущему контуру; ψ – мера повреждения на фронте, т.е. при $\xi = 0$; ρ_b – "тупое" значение радиуса; ρ_s – его "острое" значение; λ_ρ – некоторая характерная длина (параметр материала). Первый член в правой части уравнения (2.4) характеризует заострение трещины вследствие ускорения ее роста, второй член – затупление из-за накопления повреждений на фронте.

Распределение напряжений в окрестности эллиптической полости – классическая задача теории упругости [23]. Конечные результаты имеют, однако, весьма громоздкую форму. Для очень сплюснутого эллипсоида возможны упрощения, носящие асимптотический характер. Другой путь – использование аналогии между коэффициентами концентрации и коэффициентами интенсивности напряжений. Эта аналогия обсуждалась неоднократно (см., например, [24, 25]). Было отмечено, что численные значения поправочных коэффициентов Z и Y в формулах для коэффициента концентрации напряжений κ и коэффициента интенсивности K_I :

$$\kappa = 1 + 2Z(a/\rho)^{1/2}, \quad K_I = Y\sigma_\infty(\pi a)^{1/2} \quad (2.5)$$

достаточно близки, а в некоторых случаях совпадают. Систематический анализ был выполнен недавно в [26], где было показано, что для узких щелей и разрезов расхождение не превышает нескольких процентов. Для сплюсненной эллиптической полости при равномерном растяжении по нормали к ее главной плоскости Мура [27] предложил формулу

$$\kappa(\beta) = \frac{2}{E(k)} \left(\frac{b}{\rho}\right)^{1/2} \left(\sin^2 \beta + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \beta\right)^{1/4} \quad (2.6)$$

аналогичную формуле (1.2) для коэффициента интенсивности напряжений.

В дальнейшем для напряжений $\sigma(\xi, \beta)$ используем формулу

$$\sigma(\xi, \beta) = \frac{\kappa(\beta)\sigma_\infty}{(1 + 4\xi/\rho)^{1/2}} \quad (2.7)$$

где $\kappa(\beta)$ определяется по формуле (2.6), а знаменатель аппроксимирует решение Нейбера [28] для распределения напряжений в окрестности концентратора. Известны другие полуэмпирические соотношения [26]. Их сопоставление показывает, что при $\rho \ll \min\{a, b\}$ и $\xi \leq 10\rho$ все они приводят к близким результатам, согласующимся с надежными численными данными.

3. Для дальнейшего анализа необходимо ввести специальные предположения об уравнениях накопления повреждений и о влиянии повреждений на удельную работу разрушения. Будем описывать кинетику повреждений уравнением [1, 16, 17]

$$\frac{\partial \omega}{\partial N} = \begin{cases} \left(\frac{\Delta\sigma - \Delta\sigma_{th}}{\sigma_d} \right)^m, & \Delta\sigma > \Delta\sigma_{th} \\ 0, & \Delta\sigma \leq \Delta\sigma_{th} \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь σ_d , $\Delta\sigma_{th}$ и m — параметры материала, принятые постоянными при заданной температуре и условиях окружающей среды. Напряжение σ_d характеризует сопротивление материала накоплению повреждений и имеет порядок "истинного" сопротивления отрыву. Напряжение $\Delta\sigma_{th} \geq 0$ характеризует пороговое сопротивление. Показатель степени $m > 0$ аналогичен показателю кривых усталости или показателю Пэри-са m в правых частях уравнений (1.1). При некоторых дополнительных упрощающих предположениях можно показать [1, 2], что численные значения этих показателей близки. Чтобы учесть обратное влияние меры ω на скорость ее роста, можно взять уравнение

$$\frac{\partial \omega}{\partial N} = \begin{cases} \left(\frac{\Delta\sigma - \Delta\sigma_{th}}{\sigma_d} \right)^m (1 - \omega)^{-n}, & \Delta\sigma > \Delta\sigma_{th} \\ 0, & \Delta\sigma \leq \Delta\sigma_{th} \end{cases} \quad (3.2)$$

при $n > 0$. Для удельной работы разрушения возьмем соотношение

$$\gamma = \gamma_0(1 - \omega^\alpha) \quad (3.3)$$

где γ_0 — значение удельной работы для неповрежденного материала; показатель $\alpha > 0$, например, $\alpha = 1$. Часть параметров материала, входящих в уравнения (3.1)–(3.3), можно оценить непосредственно из макроскопического эксперимента. Так, текущее значение меры повреждений ω определяется (при заданном α) путем сопоставления трещиностойкости материала при монотонном и циклическом режимах нагружения. Это позволяет оценить скорость $\partial\omega/\partial N$, а по ней — некоторые из параметров из уравнений (3.1) или (3.2). Более полная информация содержится в данных о росте трещины; применяя к этим данным известные методы параметрической идентификации, в принципе можно оценить все параметры задачи.

Расчет роста трещины проводится следующим образом. Начальные системы трещины a_0 и b_0 таковы, что при $N = 0$ состояние системы субравновесно, т.е. $\delta W < 0$. Из формулы (1.5) следует, что при этом

$$G_a < \Gamma_a, G_b < \Gamma_b \quad (3.4)$$

где обобщенные силы G_a и G_b даны формулами (1.8), а обобщенные силы Γ_a и Γ_b формулами (2.3). Первое достижение равенства означает страгивание трещины по

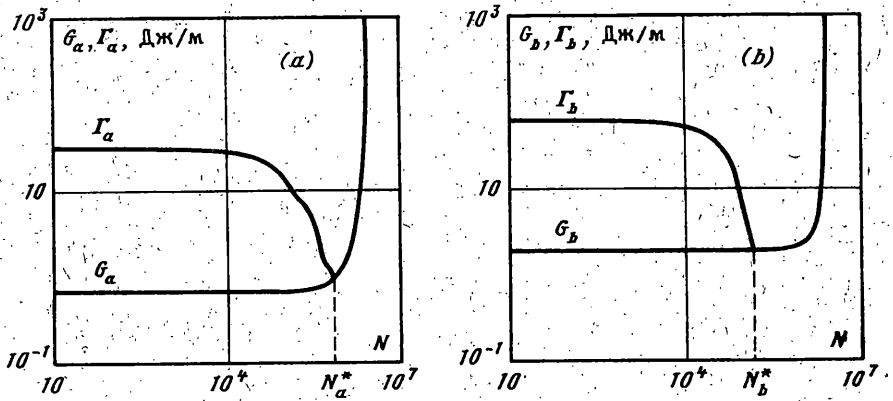
одной из полуосей. При достижении равенства $G_a = \Gamma_a$ или $G_b = \Gamma_b$ даем размерам a_0 или b_0 приращения Δa и Δb соответственно. Число циклов N при достижении равенства фиксируется. Далее расчет повторяется до следующего достижения равенства. Шаги Δa или Δb должны быть достаточно малы, чтобы можно было провести сглаживание по всем переменным, в частности, по $a(N)$ и $b(N)$. Расчет останавливается, если начиная с некоторого N , увеличение a или b приводит к соотношениям $G_a > \Gamma_a$ или $G_b > \Gamma_b$. Это означает нарушение условия (1.4), т.е. наступление неустойчивого состояния (квазихрупкого разрушения). Неустойчивость возможна также при достижении условий $G_a = \Gamma_a$, $\partial G_a / \partial a > \partial \Gamma_a / \partial a$ или $G_b = \Gamma_b$, $\partial G_b / \partial b > \partial \Gamma_b / \partial b$. Более детальный анализ устойчивости состояний тел с трещинами дается в [18, 29].

Для расчета были приняты следующие данные: $E = 200$ ГПа; $\nu = 0,3$; $\gamma_0 = 20$ кДж/м²; $\rho_s = 10$ мкм; $\rho_b = \lambda \rho_s = 100$ мкм. В уравнении (3.1) было принято $\sigma_d = 20$ ГПа, $\Delta \sigma_{th} = 200$ МПа, $m = 4$; в уравнении (3.3) $\alpha = 1$. Расчеты выполнены для режима нагружения $\Delta \sigma_{\infty} = 300$ МПа, $R = \sigma_{\infty}^{\min} / \sigma_{\infty}^{\max} = 0,2$.

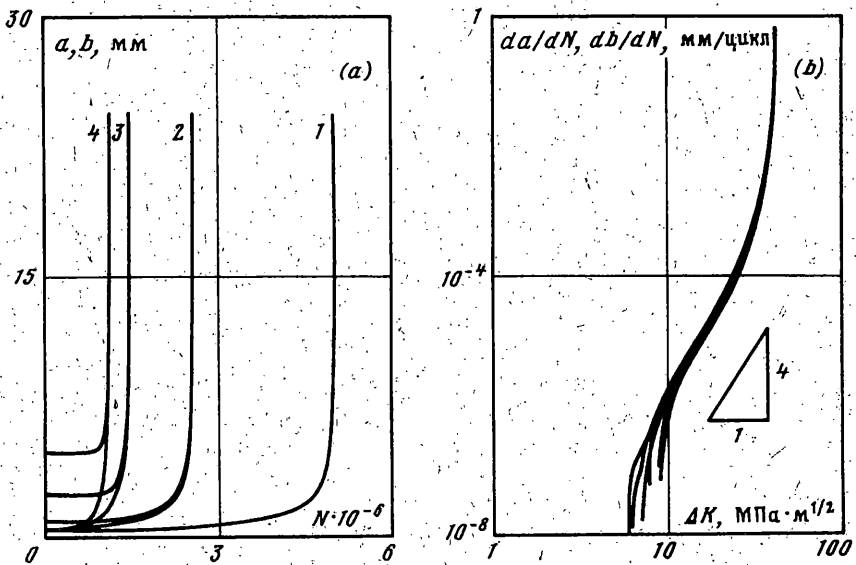
Поведение обобщенных сил в процессе роста трещины показано на фиг. 2 для начальных данных $a_0 = 1$ мм, $b_0 = 0,5$ мм, $\rho_0 = 50$ мкм. Страгивание трещины происходит в направлении малой полуоси при $N_b^* = 0,21 \cdot 10^6$. Рост в направлении большей полуоси начинается значительно позднее, при $N_a^* = 0,705 \cdot 10^6$. На фиг. 2, a видно "неспокойное" поведение функций $\Gamma_a(N)$ после начала роста трещины по другой обобщенной координате. Это объясняется сложным характером взаимодействия между переменными, входящими в уравнения задачи. Изменение соотношения между a и b , da/dN и db/dN влияет на распределение эффективных кривизн по периметру трещины, а эти кривизны, в свою очередь, существенно влияют на скорость накопления микроповреждений. В результате меняется соотношение между обобщенными силами, что вызывает изменение скорости роста и т.д. Эти сложные эффекты можно проследить непосредственно, по изменению $\rho(\beta)$ и $\psi(\beta)$ в процессе роста трещины.

На фиг. 3, a показано изменение длин полуосей $a(N)$ и $b(N)$ при различных начальных условиях. Кривые 1, 2, 3 и 4 построены при $b_0 = 0,5$ мм и $a_0 = 0,5$; 1; 2,5 и 5 мм соответственно. По мере роста эллиптическая трещина приближается к круговой, что аналогично известному эффекту в механике квазихрупкого разрушения [30]. Скорости da/dN и db/dN представлены на фиг. 3, b в функции от соответствующих размахов ΔK_a и ΔK_b обозначенных просто ΔK . При малых начальных размахах скорости имеют порядок 10^{-8} мм/цикл, что близко к значениям, которые обычно ассоциируют с порогом роста усталостных трещин. Пороговое значение коэффициента интенсивности имеет порядок $\Delta K_{th} \sim \Delta \sigma_{th} (\pi r)^{1/2}$. При подстановке сюда значений $\Delta \sigma_{th} = 200$ МПа, $r = 10^{-4}$ м это дает значения порядка нескольких единиц, измеряемых в МПа·м^{1/2}. Вблизи пороговых значений наблюдается расхождение кривых, отвечающих a и b , а также различным значениям a_0 и b_0 . Далее кривые практически сливаются в одну. Угловой коэффициент этой кривой на средней стадии роста близок к показателю m в уравнениях (3.1) и (3.2). Аналогичный факт отмечался неоднократно, начиная с [1]. Он объясняется тем, что на средней стадии рост трещин в основном контролируется накоплением повреждений на фронте и происходит при уровне повреждений, близком к предельному. Заключительная стадия роста происходит с ускорением и заканчивается вблизи критического значения коэффициента интенсивности $K_C = (\gamma_0 E)^{1/2} \approx 65$ МПа·м^{1/2}.

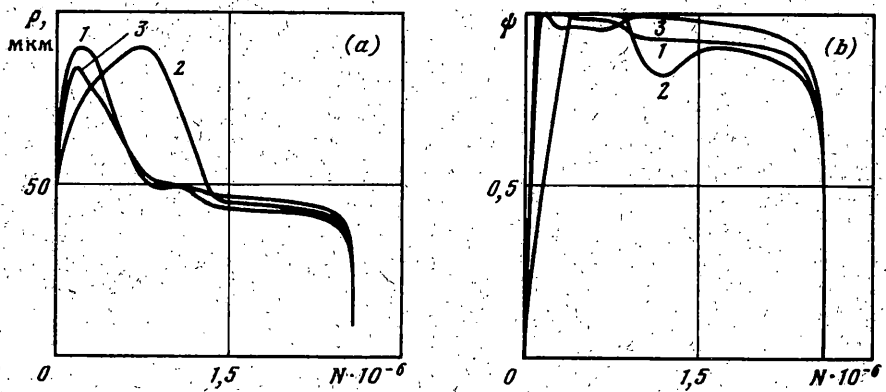
Проследим за изменением переменных, которые существенным образом входят в теорию [16-18], хотя не могут быть измерены непосредственно. Это эффективный радиус кривизны ρ , характеризующий концентрацию напряжений на фронте, и мера



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

повреждений на фронте ψ . На фиг. 4, *a, b* представлены графики изменения ρ и ψ в функции от N при $a_0 = 1$ мм, $b_0 = 0,5$ мм. Кривые 1 построены для $\beta = \pi/2$, т.е. для концов малой полуоси, кривые 2 для $\beta = 0$. Страгивание трещины начинается у конца малой полуоси. В течение инкубационной стадии ρ и ψ – монотонно возрастающие функции N , а момент страгивания близок к моменту, когда эти функции достигают максимума. Далее следует заострение фронта вплоть до значений, близких к "острому" радиусу ρ_s . Страгивание фронта у большой полуоси (кривые 2) происходит значительно позднее. Характер зависимости $\psi(N)$ отличается в этом случае от случая $\beta = \pi/2$. На значительном участке стадии роста мера повреждений близка к предельному значению $\psi = 1$. Наблюдается немонотонное изменение меры повреждений, которое можно объяснить взаимодействием нескольких факторов, влияние которых в значительной степени носит противоположный характер. Правда, этот эффект находится в пределах $\pm 10\%$ и почти не проявляется на диаграммах роста трещин. Для полноты на фиг. 4 показано изменение радиуса ρ и меры ψ при $\beta = \pi/4$ (кривые 3). Здесь тоже можно наблюдать немонотонный характер функции $\psi(N)$. По-видимому, эти особенности присущи и другим задачам, где размеры трещин описываются при помощи двух и более параметров. При этом рост по одному из них может повлиять на рост по другим параметрам, что заметно проявляется, если анализировать изменения на фронте растущей трещины.

Заключение. Задача о росте внутренней усталостной трещины отрыва эллиптической формы в плане в линейно-деформируемой повреждаемой среде была рассмотрена в рамках теории, предложенной В.В. Болотиным. При этом учтено снижение трещиностойкости по контуру трещины в зависимости от уровня накопленных повреждений. Методом численного моделирования изучена зависимость размеров растущей трещины от ее начальной формы, а также распределение меры затупления фронта и меры усталостных повреждений вдоль фронта трещины. Снятие допущения о том, что трещина в процессе роста сохраняет эллиптическую форму в плане, требует применения методов вычислительной механики для трехмерной задачи теории упругости. Исследование в этом направлении будет продолжено.

Выполнение настоящей работы частично поддержано Российским фондом фундаментальных исследований (грант 96-01-01488, 99-01-00282).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. Уравнения роста усталостных трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 153–160.
2. Болотин В.В. Объединенные модели в механике разрушения // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 127–137.
3. Bolotin V.V. A unified approach to damage accumulation and fatigue crack growth // Engng. Fract. Mech. 1985. V. 22. № 3. P. 387–398.
4. Болотин В.В., Лебедев В.Л. Механика роста усталостных трещин в среде с микроповреждениями // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 2. С. 307–317.
5. Болотин В.В., Ковех В.М. Численное моделирование роста усталостных трещин в среде с микроповреждениями // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 2. С. 132–142.
6. Bolotin V.V. On random fatigue crack propagation // Structural Safety and Reliability // Eds. G.I. Schuëller, M. Shinozuka, J.T.P. Yao. Rotterdam: Balkema, 1994. P. 1053–1060.
7. Bolotin V.V. Fatigue crack propagation in random media // Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics // Eds. W. Kliemann and N. Sri Namachchivaya. Boca Raton: CRC Press, 1995. P. 361–381.
8. Kodex В.М. Взаимодействие усталостных трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 155–158.
9. Kodex В.М. Поведение усталостной трещины, выходящей на границу двух сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 141–145.
10. Болотин В.В., Минаков Б.В., Чирков В.П. Влияние начальных условий на страгивание и распространение усталостных трещин // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 73–79.

11. Болотин В.В. Об обобщенных силах в аналитической механике разрушения // Новожиловский сб. / Под ред. Н.С. Соломенко. С.-Петербург: Судостроение, 1992. С. 161–170.
12. Болотин В.В. Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов // Механика композит. материалов. 1984. № 2. С. 239–255.
13. Болотин В.В. Повреждение и разрушение композитов по типу расслоений // Механика композит. материалов. 1987. № 3. С. 424–432.
14. Кисляков С.А. Устойчивость и рост отслоений в цилиндрической оболочке из композитного материала при сжатии // Механика композит. материалов. 1985. № 4. С. 653–657.
15. Нефедов С.В. Анализ роста эллипсоидальных отслоений в композитах при длительных квазистатических нагрузках // Механика композит. материалов. 1988. № 5. С. 827–833.
16. Bolotin V.V. Mechanics of fatigue cracks growth as a synthesis of micro – and macromechanics of fracture. // Handbook of Fatigue Crack Propagation in Metallic Structures / Ed. A. Carpinteri. Amsterdam: Elsevier, 1994. P. 883–911.
17. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 448 с.
18. Bolotin V.V. Stability Problems in Fracture Mechanics. New York: Wiley Interscience, 1996. 188 p.
19. Newman J.C. A review and assessment of the stress-intensity factors for surface cracks // Part-Through Crack Fatigue Life Prediction. ASTM STP 687 / Ed. J.B. Change. Philadelphia: ASTM, 1979. P. 16–42.
20. Carpinteri A. Propagation of surface cracks under cyclic loading. // Handbook of Fatigue Crack Propagation in Metallic Structures / Ed. A. Carpinteri. Amsterdam: Elsevier, 1994. P. 633–705.
21. Си Дж., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение / Под ред. Г. Либовица. Т. 2. М.: Мир, 1975. С. 67–190.
22. Hutchinson J.W. Crack tip shielding by microcracking in brittle solids // Acta Metall., 1987. V. 35. P. 1605–1619.
23. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970, 940 с.
24. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения. В кн.: Разрушение (Под ред. Г. Либовица). Т. 2. М.: Мир, 1975. С. 204–335.
25. Creager M., Paris P.C. Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking // Int. J. Fracture Mech. V. 3. № 2. 1967. P. 247–251.
26. Shin C.S., Man K.C., Wang C.M. A practical method to estimate the stress concentration of notches // Int. J. of Fatigue. 1994. V. 16. № 4. P. 242–256.
27. Mura T. Micromechanics of defects in solids. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1987. 587 p.
28. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 204 с.
29. Bolotin V.V. Fracture from the stand-point of non-linear stability // Int. J. Non-Linear Mech. 1994. V. 29. № 4. P. 569–585.
30. Гольдштейн Р.В., Ентов В.М. Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.11.1997