МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1999

УДК 539.375

© 1999 г. А.И. ГЛУШКО, И.И. НЕЩЕРЕТОВ

О КОНТИНУАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗКАХ. Ч. 2

В публикуемой статье продолжаем анализ работ, посвященных построению континуальных моделей разрушения[1]. Однако здесь основное внимание уделяется моделям, описывающим процессы деформирования и разрушения горных пород.

1. Хорошо известно, что горные породы разрушаются под действием как растягивающих, так и сжимающих напряжений, причем их прочность в поле растягивающих напряжений существенно ниже, чем прочность в поле сжимающих напряжений [1–3]. Если физические основы процессов деформирования и разрушения в поле растягивающих напряжений более или менее ясны и во многом схожи с процессами разрушения в металлах при откольных явлениях, то физика процессов, определяющих разрушение горных пород в поле сжимающих напряжений, к настоящему времени изучена слабо. Экспериментальные исследования направлены в основном на изучение поведения материалов на макроуровне. Этим объясняется тот факт, что практически все известные модели, описывающие разрушение горных пород, являются феноменологическими.

Если сопоставить поведение горных пород при разрушении с аналогичным поведением металлов, то следует отметить два обстоятельства. Во-первых, металл в поле умеренных сжимающих напряжений никогда не разрушается, и может изменять свои физические свойства обратимо при фазовых переходах первого или второго рода. В отличие от металлов горные породы не выдерживают больших сжимающих напряжений, и необратимо деформируются, изменяя физические свойства. Во-вторых, при необратимом деформировании металлов не происходит "переупаковки", т.е. плотность материала в разгруженном состоянии постоянна и практически совпадает с начальной. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, говорят, что металлы пластически несжимаемы.

Для горных пород, наоборот, наблюдается увеличение удельного объема среды в разгруженном состоянии, т.е. плотность материала уменьшается. В этом случае говорят, что среда разрыхляется и наблюдается эффект дилатансии. Очевидно, что значительно сложнее провести испытания и получить надежные опытные данные при существенно нестационарных нагрузках. Сам материал горных пород, как правило, обладает, по сравнению с практически однородными металлами, неоднородностью характеристик в пределах одного и того же массива, наличием инородных включений и т.д. Для материалов горных пород характерен значительно больший объем микродефектов, чем для металлов. В горных породах сложность проведения лабораторных экспериментов усугубляется еще тем обстоятельством, что подготовка образ-

[1] См. статью тех же авторов "О континуальных моделях разрушения твердых тел при нестационарных нагрузках. Ч. 1". Изв. РАН МТТ 1999 № 1, с. 124–138. Заметим, что в данной работе не преследовалась цель библиографической, а тем более исторической полноты.

цов сопряжена с необратимым изменением физико-механических характеристик по сравнению с их значениями в ненарушенном массиве.

Если бы даже эти явления отсутствовали, то представляется принципиально невозможным установить разумные количественные зависимости, описывающие поведение любых материалов, исходя из одного анализа экспериментальных данных без привлечения дополнительных предположений и рассуждений физического характера о протекающих явлениях.

Поэтому практически с первых работ по исследованию нестационарных процессов стали обращаться к численному моделированию. Успех такого подхода во многом зависит от решения ряда проблем. В их числе необходимо назвать: построение достаточно простой математической модели нестационарного деформирования и разрушения; разработку численных методов решения систем уравнений с частными производными, и, наконец, надежное определение параметров модели на основе анализа полученных экспериментальных данных. Здесь рассмотрим только те работы, которые направлены на решение проблемы построения математической модели, описывающей поведение горных пород под действием нестационарных нагрузок в поле сжимающих напряжений. При этом в изложении будем следовать хронологическому порядку. Анализ базируется на работах только российских авторов. Ряд работ [4–7], где разрушение трактуется как некоторый мгновенный акт на фронте сильного разрыва (фронта разрушения), здесь подробно не рассматривается. В основе данного подхода к разрушению горных пород лежит гипотеза, что перед фронтом сильного разрыва должно выполняться некоторое условие, так называемый критерий разрушения. В свою очередь критерии условно разделяются на силовые и энергетические. В соответствие с этим работы данного направления можно разбить на две группы. В каждой группе исходят из соответствующего критерия и строят решение на фронте разрыва и движении плоской волны в упругой среде. Хотя в этих работах молчаливо предполагалось, что аналогичные рассуждения справедливы и для случая сложного напряженного состояния, однако работ, в которых данная схема была распространена на решение конкретных трехмерных задач, впоследствии так и не появилось.

Существуют и другие работы, авторы которых описывают разрушение, не вводя явно параметров (и соответствующих уравнений), отвечающих за неупругое поведение материалов, а используя известные представления и положения теории упругости, дополненные условием пластичности. Одной из первых работ такого рода была [8], в которой предложен метод численного моделирования процессов деформирования и откольного разрушения твердых тел, не учитывающий накопления в среде микродефектов. Принимается, что в среде растягивающие напряжения σ_n на любой площадке не могут превышать некоторого предельного значения σ^*, $\sigma_n \le \sigma^*$ ($\sigma_n = \sigma_{ij}n_in_j$, $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$ – единичная нормаль к рассматриваемой площадке). Чтобы описать дальнейшее поведение среды, авторы прибегают к дискретизации сплошной среды. Расчетная область разбивается на конечное число ячеек, и считается, что среда в ячейке не разрушена, пока не выполнено $\sigma_n = \sigma^*$. С момента выполнения данного равенства нормальные усилия на рассматриваемой площадке полагаются равными нулю, а данная ячейка считается разрушенной. Существенным недостатком такого подхода к моделированию разрушения является тот факт, что физическое явление представляется как один из шагов вычислительной процедуры, и тем самым зависит от дискретизации расчетной области. Более подробный анализ этого подхода можно найти в [9]. Там, в частности, установлено, что определяемые по этой модели значения величин, характеризующих откольную зону, существенно меньше, чем аналогичные значения, определяемые в экспериментах.

2. Одна из первых моделей, в которой разрушение рассматривалось как некоторый процесс неупругого деформирования, была предложена в [10]. В ее основе лежат следующие гипотезы и предположения. "Деформации сдвига являются основной причиной изменения прочности материала и возникновения (и роста) пористости[2]. При напряжениях меньше предела текучести среда является упругой; при выполнении условия текучести девиатор скоростей деформаций e'_{ij} связан с девиатором тензора напряжений S_{ij} уравнениями Прандтля–Рейсса:

$$DS_{ij} / Dt + \lambda S_{ij} = 2Ge'_{ij} \tag{2.1}$$

где D/Dt – производная по Яуманну, G – модуль сдвига. Поверхности нагружения, на которых выполняются условия текучести, имеют следующий вид:

$$\tau = \Phi(\gamma, P, E), \quad \tau = (\tfrac{1}{2} S_{ij} S_{ij})^{1/2}, \quad \gamma = \tfrac{1}{2} \int_0^t e'^p_{ij} e'^p_{ij} dt \tag{2.2}$$

здесь τ – интенсивность касательных напряжений, γ – параметр упрочнения, $e^{p'}_{ij}$ – девиатор тензора скорости неупругой деформации, $P = -\sigma_{ii}/3$ – давление, E – внутренняя энергия.

Полный удельный объем среды V представляется в виде суммы удельных объемов "скелета" V_S и необратимой части V_h, приближенно равного объему пустот:

$$V = V_S + V_h, \quad V_S = f(p_S, E), \quad p_S = P(1 - V / V_h) \tag{2.3}$$

В уравнениях (2.3) p_S – давление, "действующее в скелете" V_h – пористость. Для ее определения предлагается использовать уравнение

$$\dot{V}_h / V = \Lambda(\gamma, P, E)\dot{\gamma} - \{H(\dot{P}) / K_1(\gamma, P, E) - [1 - H(\dot{P})] / K_2(\gamma, P, E)\}\dot{P} - \alpha(\gamma, P, E)\dot{E} \tag{2.4}$$

Здесь точка над величиной – символ производной по времени, Λ – "коэффициент дилатансии, K_1 и K_2 – модули сжатия среды за вычетом сжимаемости скелета для нагрузки и разгрузки соответственно, α – коэффициент, зависящий от теплового расширения скелета"; функция $H(x) = 1$, если $x \geq 0$ и $H(x) = 0$ если $x > 0$.

В уравнениях и соотношениях (2.2)–(2.4) обращает внимание на себя явная зависимость эмпирических функций $\Phi, f, \Lambda, K_1, K_2$ и α от внутренней энергии E. Однако никаких конкретных соображений по их определению в работе не содержится.

3. Затем последовал цикл работ [11–13]. Известно, что механизм разрушения горных пород существенно зависит от характера их напряженно-деформированного состояния: при больших сжимающих напряжениях разрушение вызывается интенсивными сдвиговыми деформациями и сопровождается разрыхлением (дилатансией), а при растягивающих напряжениях процесс разрушения характеризуется отрывом. При интенсивных взрывных нагрузках проявляются оба механизма: вдали от центра взрыва происходит разрушение отрывом, а в области, прилегающей к центру, где возникают большие сжимающие напряжения реализуется разрушение от сдвига. Чтобы отразить эти особенности поведения горных пород при разрушении, в рассматриваемой модели предлагается использовать три группы определяющих соотношений: соотношения "квазиупругого деформирования" при неразрушающих нагрузках и системы уравнений, описывающие сдвиговое разрушение с разрыхлением и разрушение отрывом, которые будем для краткости обозначать блоками (A), (C) и (B) модели соответственно.

В блоке (B) через $\sigma_i, \varepsilon_i, \varepsilon_i^p, \varepsilon_i^e$, обозначены главные значения тензоров напряжений, тензоров полных, пластических и упругих деформаций; $E = \{E_{ij}\}$ – матрица модулей упругости, $F = \{F_{ij}(\varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p, \varepsilon_3^p)\}$ – матрица податливостей, $EF = I, I$ – единичная матрица, ψ_j – потенциал пластического течения: $i, j = 1, 2, 3$. Отрыв описывается не в рамках континуальной модели разрушения с привлечением параметра, явно характери-

[2] Здесь и далее кавычками выделяется прямое цитирование авторского текста.

зующего повреждаемость, а как "развернутый по времени процесс развития упругопластической анизотропии", который описывается вдоль главных направлений следующими уравнениями

$$d\sigma_k / dt + \lambda_k \sigma_k = E_{ik} d\varepsilon_i / dt - \sigma_j E_{ik} dF_{ij} / dt \quad (k = 1, 2, 3) \tag{3.1}$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^p + \varepsilon_i^e, \quad \varepsilon_i^e = F_{ij}\sigma_i, \quad d\varepsilon_i^p = \lambda_j \partial\psi_j / \partial\sigma_i, \quad \psi_j = F_{ij}\sigma_i\sigma_j \tag{3.2}$$

Условия "текучести (отрыва) задаются равенствами $\sigma_k = \sigma_{0t}$ (ε_k^p); $\lambda_j \equiv 0$ при $\sigma_k < \sigma_{0t}$ (ε_k^p), "$\sigma_{0t}(\varepsilon_k^p)$– предел прочности, зависящий от накопленного ущерба и направления".

Чтобы записать уравнения состояния в виде, подобном формуле (3.1), необходимо предположить, что тензор напряжений и тензоры деформаций (полных, упругих, пластических) коаксиальны, т.е. направления главных осей всех этих тензоров совпадают. Однако явно такая гипотеза в работах не только не обсуждается, но даже и не сформулирована. В связи с этим возникает вопрос о согласованности гипотезы о коаксиальности тензоров с вышеупомянутой трактовкой отрыва как процесса развития упругопластических деформаций. Так как определяющие уравнения не содержат в явном виде выражение для диссипации энергии при разрушении, то и не сформулированы условия ее неотрицательности; тем самым этот вопрос остается открытым.

Разрушение "хрупких тел при сжатии" (блок (C)) описывается в рамках модели упругопластического течения уравнениями Прандтля–Рейсса (2.1). Условие прочности принимается в виде

$$S_{ij}S_{ij} = Y^2(p)/3 \tag{3.3}$$

где S_{ij} – девиатор тензора напряжений, а "предел прочности" $Y(p)$ необратимо уменьшается в соответствии с кинетическим уравнением

$$dY/dt = \varphi(Y - Y_1(p),\ Y - Y_2(p)), \quad Y|_{t\le T} = Y_1, \quad Y|_{t \ge T+\tau} = Y_2 \tag{3.4}$$

В (3.4) T – "момент начала разрушения, τ – характерное время разрушения, φ – функция, которая задается с помощью одной из нижеследующих формул: $\varphi_1 = \mathrm{const}$, $\varphi_2 = -\beta(Y - Y_2)$, $\varphi_3 = -\beta[(Y_1 - Y)(Y - Y_2)]^{1/2}$", причем авторы "отдают предпочтение третьему варианту". (Неясно, правда, зачем в таком случае приводить в модели первые два?) "Для оценки τ используется выражение $\tau = d_p(r)/C_f$, $d_p(r)$ – средний размер обломка" на эпицентральном расстоянии r, C_f – "характерная скорость распространения трещин, в качестве которой принята скорость волн Рэлея". Функции $Y = Y_1(p)$ – "кривая прочности исходного грунта", и $Y = Y_2(p)$ – "кривая прочности разрушенного грунта", определяются так

$$Y_i(p) = Y_{0i} + \mu_i p/[1 + \mu_i p(Y_{pi} - Y_{0i})] \quad (i = 1, 2) \tag{3.5}$$

Здесь p – давление; μ_i, Y_{pi}, Y_{0i} – некоторые эмпирически определяемые параметры; $\mu_i = \mu_i(r)$, $Y_{0i} = Y_{0i}(r)$.

Обратим внимание на введение в явном виде в уравнения модели величины τ – характерного времени разрушения, в большинстве других моделей являющейся искомой. Предлагаемое определение τ вносит в модель дополнительные предположения. Вид функций φ свидетельствует о том, что он выбирался из соображений удобства вычислений, а не из анализа результатов конкретного эксперимента. Обращаем внимание и на такой факт. Рассмотрение предела прочности $Y(p)$ в качестве одного из определяющих параметров модели неминуемо влечет за собой его появление в выражениях, определяющих компоненты тензора напряжений σ_{ij}, чего нет в модели. Другими словами, авторы молчаливо предполагают, что в выражениях для σ_{ij} члены, содержащие $Y(p)$, малы по сравнению с остальными.

При выполнении (3.3) в блоке C определяется объемная необратимая деформация ε^p:

$$\frac{d\varepsilon^p}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\Lambda(P,\varepsilon)\frac{d\gamma^p}{dt} + \left(\frac{1}{K_i} - \frac{1}{K_{st}}\right)\frac{dp}{dt}, \quad d\gamma^p = \sqrt{\varepsilon'^p_{ij}\varepsilon'^p_{ij}}\,dt \tag{3.6}$$

В (3.6) $i = m$ при $dp \geq 0$, $i = r$ при $dp > 0$, K_m, K_r – "объемные модули семейства гидростат нагрузки и разгрузки; $K_r = K_{st}$". Явный вид функции $\Lambda(p, \varepsilon)$ не приведен.

Зависимость для объемного деформирования имеет следующий вид

$$p = p_c(V) + G(E - E_c)/V, \quad E_c = -\int p_c(V)dV \tag{3.7}$$

где E, V – удельные энергия и объем, а "кривая холодного сжатия" имеет простой вид уравнения Тэта

$$p_c = K[(V_0/V)^n - 1]/n \tag{3.8}$$

Заметим, что в описании блока C ([11], стр. 31, 34, 39–40) отсутствуют указания, где и в каком виде брать значения для параметров G, K, V_0, n, как и отсутствует ссылка на уравнение, из которого должно определяться E. Отметим также, что авторы определили только объемную необратимую деформацию; выражение для объемной упругой деформации в [11] отсутствует.

Квазиупругое деформирование при неразрушающих нагрузках (блок A) описывается системой уравнений

$$\begin{gathered}
d\varepsilon'_{ij}/dt = (1/2G_d)(dS_{ij}/dt) + \mu_{0s}(S_{ij} - S^{st}_{ij})/2G_{st} + |H_{ij}|(1 - 1/\varphi_S)\,\mathrm{sign}(S_{ij} - S^{st}_{ij}) \\
d\varepsilon/dt = (1/K_d)(dp/dt) + \mu_{0p}(p - p_{st})/K_{st} + |H|(1 - 1/\varphi)\,\mathrm{sign}(p - p_{st}) \\
H_{ij} = (\varepsilon'_{ij} - \varepsilon'_{ij,0})\{1 - (S_{ij} - S_{ij,0})/[2G_0(\varepsilon'_{ij} - \varepsilon'_{ij,0})]\}/(t - t_0 + \delta) \\
H = (\varepsilon - \varepsilon_0)\{1 - (p - p_0)/[K_0(\varepsilon - \varepsilon_0)]\}/(t - t_0 + \delta) \\
\varphi_s = \exp\left(\left|\frac{\sqrt{J_2} - \sqrt{J_{2,ST}}}{E_{st}}\right|^\beta\right), \quad \varphi = \exp\left(\left|\frac{p - p_{st}}{E_{st}}\right|^\beta\right)
\end{gathered} \tag{3.9}$$

где S_{ij}, ε'_{ij} – девиаторы тензоров напряжений и деформаций, $\varepsilon = \rho/\rho_0 - 1$; G_0, G_d, G_{st}, K_0, K_d, K_{st} – "идеальный, динамический и статический модули сдвига и сжатия; μ_{0s}, μ_{0p} – коэффициенты стационарной вязкости". Индексам st соответствуют "статические значения напряжений": $S^{st}_{ij} = 2G_{st}\varepsilon'_{ij}$, $p_{st} = K_{st}\varepsilon$; t – время, δ – константа с размерностью времени, t_0 – момент прихода возмущения в частицу, нижним индексом 0 обозначено состояние частицы в момент t_0.

Не будем обсуждать, насколько хорошо уравнения (3.9) описывают опытные данные, однако отметим, что их запись противоречит одному из основных правил механики: определяющие уравнения модели должны быть инвариантны относительно преобразований координат. Представленные выше уравнения не удовлетворяют этому правилу, т.к. содержат функции типа модуль или sign, использующие в качестве аргументов компоненты тензора.

К вышесказанному необходимо добавить следующее. Модель очень сильно перегружена множеством параметров и экспериментально определяемых функций, причем физический смысл некоторых неясен, а строгое определение их отсутствует. Формально в монографии [11] предлагаются "способы определения констант". Определение в основном сводится к численному моделированию конкретного опыта (причем того же класса, что и тот эксперимент, с которым далее сравнивается численное решение) с варьированием констант модели. Также предлагается использование корреляционных зависимостей, полученных другими авторами. При этом не обсуждаются ни условия проведения опытов, ни достоверность корреляционных зависимостей. Строго говоря, предлагаемые способы можно использовать для оценки параметров, но их нельзя рассматривать как методы определения констант. Предложенная модель используется для решения только одной задачи – распространение возмущений при камуфлетном взрыве, правда, сильно усложненной наличием зоны полиморфных изменений, влиянием масштабного фактора и т.д. Распространение модели на другие задачи в [11–13] отсутствует.

4. В [14] предложена модель[3], также базирующаяся на некотором обобщении теории пластического течения. В ее основе лежат следующие постулаты. Поведение горной породы описывается уравнениями модели некоторого упругопластического тела с упрочнением.

Условие пластичности записано следующим образом:

$$\Phi = \Phi(P, \tau, k_i) \quad (i = 1, ...3) \tag{4.1}$$

В (4.1) $P = \sigma_{kk}/3$ – первый инвариант тензора напряжений или давление, τ – величина, пропорциональная второму инварианту девиатора тензора напряжений, $\tau = {}^3/_4\, S_{ij}S_{ij}$, k_i – параметр упрочнения, вообще говоря, зависящий от i-го участка пути нагружения. Область в пространстве напряжений σ_{ij}, где $\Phi < 0$, соответствует состоянию упругости, а поверхность в этом же пространстве, на которой выполняется условие $\Phi = 0$, называется поверхностью текучести. Аналогично [16] вводятся понятия активного и нейтрального процессов нагружения. Предполагается, что тензор скоростей деформаций e может быть представлен в виде суммы

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p \tag{4.2}$$

Тензор скоростей упругих деформаций e^e связан с тензором напряжений уравнениями

$$2Ge_{ij}^e = DS_{ij}/Dt \ (i \neq j) \quad K\varepsilon_{ii}^e = -dP/dt \tag{4.3}$$

Здесь D/Dt – производная в смысле Олдройда, K, G – модули объемного сжатия и сдвига. Тензор скоростей неупругих деформаций e^p определяется с помощью неассоциированного закона течения

$$e_{ij}^p = ({}^2/_3\, \Lambda\tau\delta_{ij} + S_{ij})d\lambda/dt \tag{4.4}$$

Параметр $\Lambda = \Lambda(P, k_i)$ называется скоростью дилатансии и определяется из анализа опытных данных; δ_{ij} – символ Кронекера. Величина $d\lambda$ положительна при активном процессе нагружения, и равна нулю в остальных случаях. Ее можно определить явно, если продифференцировать по времени уравнение (4.1) по правилу сложной функции и воспользоваться уравнениями (4.2)–(4.4). В модели требуется, чтобы при активном нагружении скорость диссипации механической энергии W была положительной $dW/dt = \sigma_{ij}e_{ij}^p > 0$.

Вторая часть работы посвящена определению скорости дилатансии и поверхности текучести из анализа опытных данных, полученных при испытаниях цилиндрических образцов из песчаника. Далее без какой-либо мотивировки постулируется, что поверхность текучести может быть представлена как объединение трех поверхностей, каждая из которых образована соответствующей кривой на плоскости переменных

[3] В [15] приводится дальнейшее обобщение данной модели на случай материала горной породы, которая наряду с исходной анизотропией обладает и анизотропией процесса разрушения.

P, τ. Первая поверхность (i = 1) соответствует процессам деформирования, сопровождающимся упрочнением, другая (i = 2) – разупрочнению, третья (i = 3) – соответствует разрушенному материалу ("остаточная прочность").

К описанию модели в данной работе имеется некоторое количество замечаний. Поверхности текучести Ф представлены в инвариантной форме (4.1), из которой следует, что они симметричны относительно прямой, перпендикулярной девиаторной плоскости. Между тем, из формы записи экспериментальных зависимостей (см. [14], стр. 115, формулы (2.1)–(2.3)), являющихся основой для построения поверхности Ф, видно, что упомянутая симметрия в опытных данных отсутствует. Данный факт остался вне внимания авторов. В формуле (3.1) ([14], стр. 116) введен параметр k_3, который затем нигде явно не используется, а его количественное определение отсутствует.

В модели используется большое число параметров, принимающих различные значения в зависимости от изменения других, не менее сложных, величин. Все это порождает большую громоздкость и служит источником логических ошибок, а учитывая то, что разные параметры модели могут быть определены с различной точностью, может привести, например, к возможной "нестыковке" отдельных участков предельной поверхности Ф.

В [14] утверждается, что численные значения констант, описывающих различные "предельные поверхности", зависят от скорости деформирования. Тем самым модель не адекватна рассмотренным авторами экспериментальным данным, так как в определяющих уравнениях отсутствует параметр, явно зависящий от скорости деформирования. Обращает на себя внимание еще одно утверждение авторов [14]. В работе полагается, что с помощью формулы

$$\frac{D\lambda}{Dt}=\left\{\frac{3GS_{ij}e_{ij}}{8\tau^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}-K\frac{e_{ij}\partial\Phi}{2\tau\partial P}+\frac{Dk_i}{2\partial Dt}\frac{\partial\Phi}{\partial k_i}\right\}\left\{\varepsilon_{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}-\Lambda K\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right\}^{-1} \tag{4.5}$$

удается выразить величину $D\lambda/Dt$. Однако это неверно. В числитель формулы (4.5) входит производная по времени от параметра упрочнения Dk_i/Dt. Но $k_i = k_i(\varepsilon^p, \gamma^p)$ (где ε^p, γ^p – "пластические деформации объема и сдвига") и дифференцируя это выражение по правилу сложной функции, получим

$$\frac{Dk_i}{Dt}=\frac{\partial k_i}{\partial\varepsilon^p}\frac{D\varepsilon^p}{Dt}+\frac{\partial k_i}{\partial\gamma^p}\frac{D\gamma^p}{Dt} \tag{4.6}$$

Учитывая, что $d\varepsilon^p/dt = e$, подставим (4.4) в формулу (4.6), а затем результат – в формулу (4.5). Из полученного уравнения вытекает правильное выражение для множителя $D\lambda/Dt$. В связи с этим возникают новые вопросы о разрешимости уравнения (4.5) относительно величины $D\gamma/Dt$ и об условиях ее знакоопределенности.

5. Остановимся еще на одном подходе к описанию континуального разрушения, предложенном в работах [17–20]. Интерес к этим работам вызван утверждением автора о том, что "рост повреждаемости в термоупругих средах управляется не кинетическим уравнением, а конечным соотношением, связывающим текущее значение повреждаемости с текущими значениями деформации, энтропии и распределенного источника повреждений". Чтобы понять ход рассуждений, лежащих в основе цитируемого утверждения, остановимся подробнее на анализе модели, следуя ее изложению в [20], как наиболее полному, в частности, используя принятую там систему обозначений и терминологию. В качестве первого предположения принимается, что для описания поведения повреждающейся среды следует ввести, наряду с общепринятыми параметрами состояния (**F** – градиент деформаций, θ – температура, η – удельная энтропия, ε – удельная внутренняя энергия), "некоторый тензор второго ранга π, который служит мерой поврежденности материала", и "в общем случае не определяется ни текущим значением $\{\mathbf{F}(t), (t)\}$, ни даже всей предысторией

$\{\mathbf{F}(\tau), (\tau)\}, -\infty < \tau \le t$". Тензору поврежденности π далее сопоставляется тензор второго ранга Π – "реакция материала на тензор поврежденности π[4]". Используя эти величины, закон сохранения энергии можно сформулировать в следующем виде

$$\rho_\kappa \dot{\varepsilon} = \mathbf{T}_\kappa : \dot{\mathbf{F}} + Q_T + Q_f, \quad Q_T = \mathbf{Div}\mathbf{q}_\kappa + \rho_\kappa r_T, \quad Q_f = \rho_\kappa(r_f - \dot{\varepsilon}_f) \qquad (5.1)$$

В (5.1) символ (:) обозначает операцию свертки, нижний индекс (κ) обозначает начальную конфигурацию, ρ – плотность среды, "$\mathbf{T}_\kappa$ – несимметричный тензор напряжений Пиола–Кирхгофа первого рода", $\mathbf{q}_\kappa$ – вектор потока тепла в переменных начальной конфигурации, "Q_T – приток энергии, обусловленный теплопроводностью и распределенными источниками тепла r_T. Приток энергии Q_f обусловлен распределенными источниками и стоками не термомеханической природы. Скалярная величина r_f – плотность распределенных источников энергии, связанных с изменением повреждаемости материала за счет внешнего воздействия на геометрию и количество микродефектов. Она является произвольно заданным внешним полем и, в частности, может быть тождественно равна нулю. В отличие от r_f величина $\dot{\varepsilon}_f$ отлична от нуля в любом процессе изменения повреждаемости и представляет собой плотность распределенной поверхностной энергии".

Напомним, что в уравнение закона сохранения энергии могут входить только внешние притоки энергии к частице, которые возникают за счет различных механизмов взаимодействия, отличных от работы макроскопических сил [21, стр. 201]. Второй принцип термодинамики в модели формулируется в виде "локального неравенства"

$$\delta_M + \delta_T + \delta_f \ge 0 \qquad (5.2)$$

$$\delta_M \equiv \theta\dot{\eta} - Q_T = \theta\dot{\eta} - (\rho_\kappa^{-1}\mathbf{Div}\mathbf{q}_\kappa + r_T) \qquad (5.3)$$

$$\delta_T \equiv (\theta\rho_\kappa)^{-1}\mathbf{q}_\kappa\nabla_\kappa\theta; \quad \delta_f \equiv \pi : \dot{\Pi} - Q_f = \pi : \dot{\Pi} + \dot{\varepsilon}_f - r_f$$

Здесь δ_M – внутренняя (механическая) диссипация, δ_T – диссипация, связанная с теплопроводностью среды; величина δ_f называется автором "диссипацией континуального разрушения". Формулировка второго начала термодинамики в таком виде вводится, по-видимому, впервые. В связи с этим напомним классическую запись [21, стр. 239]:

$$\rho\theta\dot{\eta} = q^e + \dot{q}$$

где q^e – приток тепла к частице, величина $\dot{q}$ называется некомпенсируемым теплом, $\dot{q} \ge 0$, причем $\dot{q} = 0$ при обратимых процессах. Важно отметить, что в последнее уравнение не входят внешние притоки энергии, в частности, не должны входить внешние притоки энергии, связанные с величинами $\dot{\varepsilon}_f$ и r_f. Если переписать (5.1) в виде $Q_T + Q_f = \rho_\kappa\dot{\varepsilon} - \mathbf{T}_\kappa : \dot{\mathbf{F}}$, то из (5.2) можно получить "неравенство диссипации"

$$-\dot{\varepsilon} + \rho_\kappa^{-1}\mathbf{T}_\kappa : \dot{\mathbf{F}} + \theta\dot{\eta} + \pi : \dot{\Pi} + \delta_T \ge 0 \qquad (5.4)$$

В соответствии с [20], введем две совокупности параметров состояния $\lambda = \{\mathbf{F}, \eta, \Pi, \nabla_\kappa\theta\}$ и $\Sigma = \{\varepsilon, \mathbf{T}_\kappa, \theta, \pi, \varepsilon_f, \mathbf{q}_\kappa\}$. Обращаем внимание на следующее обстоятельство. В [20] λ не присваивается никакого наименования, и явно не говорится о независимости ее величин. Тем не менее, автор, как видно и из названия статьи, строит свою модель, используя методы и принципы механики сплошной среды. Тогда из его рассуждений следует, что λ в этом контексте может рассматриваться только как полная система определяющих параметров. Следовательно, величины, входящие в λ, независимы, и

[4] Обращает на себя внимание терминология последнего предложения.

меняются в известных пределах произвольно. При анализе модели исходим из данного предположения.

Следуя [20, стр. 305], нелинейный термоупругий повреждающийся материал определяется, как среда, для которой величины из совокупности Σ представляются в виде функций от λ. Так как неравенство (5.4) должно выполняться для всех возможных движений среды, а величины $\dot{\mathbf{F}}, \dot{\eta}, \dot{\Pi}$ считаются независимыми, можно получить "необходимые и достаточные" условия, при которых выполняется это неравенство

$$\mathbf{T}_\kappa = \rho_\kappa \partial\varepsilon / \partial\mathbf{F}, \;\; \theta = \partial\varepsilon / \partial\eta, \;\; \partial\varepsilon / \partial(\nabla_\kappa \theta) = 0, \;\; \pi = \partial\varepsilon / \partial\Pi, \;\; \delta_T \geq 0 \tag{5.5}$$

Эти уравнения представляют собой определяющие соотношения модели термоупругой повреждающейся среды.

В работе утверждается, что равенство

$$\delta_M + \delta_f = 0 \tag{5.6}$$

также относится к "необходимым и достаточным" условиям выполнения (5.4). Однако, используя те же стандартные выкладки, из рассматриваемой системы уравнений, и в частности, из (5.4), никак нельзя получить (5.6), в отличие от предыдущих условий (5.5). По сути, это дополнительное предположение. Далее предполагается, что "распределенный сток энергии $\dot{\varepsilon}_f$ вместе с источниками r_f равен нулю, если $\dot{\Pi} = 0$. Как следствие получают, что $\dot{\varepsilon}_f$ может быть представлен в виде

$$\dot{\varepsilon}_f = \mathbf{G} : \dot{\Pi}, \;\; \mathbf{G} = \partial\varepsilon_f / \partial\Pi \tag{5.7}$$

где $\varepsilon_f = \varepsilon_f(\Pi)$ – некоторая известная функция. Величина r_f задается формулой

$$r_f = \mathbf{G}_* : \dot{\Pi} \tag{5.8}$$

где $\mathbf{G}_*$ – произвольно "заданный тензор второго ранга, определяющий плотность внешних источников разрушения". Условие (5.6) и тот факт, что δ_M не зависит от $\dot{\Pi}$, позволяют прийти к выводу, что $\delta_M = 0$ и $\delta_f = 0$ при любых $\dot{\Pi}$. Используя последнее равенство и подставив в уравнение (5.3) выражения (5.7), (5.8), получим

$$(\partial\varepsilon_f / \partial\Pi + \mathbf{G} - \mathbf{G}_*) : \dot{\Pi} = 0$$

Отсюда следует уравнение

$$\partial\varepsilon_f(\mathbf{F}, \eta, \Pi) / \partial\Pi + \mathbf{G}(\Pi) - \mathbf{G}_*(t) = 0$$

которое определяет связь величины Π с текущими значениями $\mathbf{F}$, η и тензора $\mathbf{G}_*$. При $\mathbf{G}_*(t) = 0$, в частности, получается уравнение

$$\partial\varepsilon_f(\mathbf{F}, \eta, \Pi) / \partial\Pi + \mathbf{G}(\Pi) = 0$$

означающее, что величины ($\mathbf{F}$, η и Π) оказываются зависимыми. Такой результат является прямым следствием принятия допущения (5.6).

Для иллюстрации некоторых свойств модели в [22] приводится решение задачи о расширении сферической полости, расположенной в безграничной среде, и находящейся под действием давления.

6. В [23] была предложена модель, описывающая разрушение горных пород при интенсивных кратковременных сжимающих нагрузках. Характерной особенностью модели является явно сформулированная гипотеза о том, что накопление повреждений и связанное с ним изменение модулей являются основным фактором, определяющим поведение материалов при деформировании и разрушении. В основе модели лежат следующие предположения. Принимается, что изменение свойств и характеристик твердого тела по мере накопления микродефектов в процессе разрушения может быть охарактеризовано скалярной величиной D, называемой повреждаемостью. Считается, что при быстропротекающем разрушении распределение микродефектов по направлениям однородно. Внутренняя энергия среды E есть квадратичная функция тензора упругих деформаций ε:

$$E = \tfrac{1}{2}\lambda(D)\mathbf{I}^2(\varepsilon) + \mu(D)\mathbf{I}(\varepsilon : \varepsilon)$$

где $\mathbf{I}$ – первый инвариант тензора ε, λ, μ – параметры Ламе, зависящие от повреждаемости; (:) – знак операции свертки.

Функция $\mu(D)$ монотонно убывает при возрастании D, а модуль λ однозначно связан с μ, причем функция $\lambda = \lambda(\mu)$ монотонно убывает; это предположение является непосредственным распространением результатов экспериментальных исследований работы [24] на любые горные породы. Существуют поверхности $\Phi(\varepsilon)$ и $\Psi(\varepsilon)$ такие, что для областей, в которых напряжения σ меньше величин Φ (и Ψ), не происходит накопления повреждений (соответственно, нет влияния скорости деформирования на зависимости σ–ε).

В модели реализована следующая система определяющих соотношений

$$\dot{\mu} = -h(\mu)H(\Phi)\{e_0(\Phi) + \gamma/[(\gamma+\gamma_0)\tau_1(\Phi)]\} \tag{6.1}$$

$$\dot{\varepsilon} = \mathbf{e} - [\varepsilon - \mathbf{I}(\varepsilon)\mathbf{G}\Psi]/\tau_2(\varepsilon) - \Lambda(D)\mathbf{G}\dot{\mu}, \quad \sigma = \mathbf{s} + \chi$$

Первое уравнение описывает возникновение и кинетику роста микроповреждений, второе существенно обобщает известное в теории упругопластического течения соотношение о представлении тензора скоростей деформаций в виде упругой и неупругой частей, третье представляет тензор напряжения в виде суммы, где

$$\mathbf{s} = \partial E/\partial\varepsilon = \lambda(D)\mathbf{I}(\varepsilon) + \mu(D)\mathbf{I}(\varepsilon) \tag{6.2}$$

а главные значения χ_i тензора χ, коаксиального тензору $\mathbf{e}$, предлагается определять так

$$\chi_i = -\alpha(D)\mathbf{I}(\mathbf{s})\,\mathrm{sign}(e_i) \tag{6.3}$$

В уравнениях (6.1)–(6.3) приняты следующие обозначения: $\mathbf{e}$ – тензор скоростей деформаций, γ – второй инвариант девиатора скоростей деформаций, $\mathbf{G}$ – единичный тензор, h, e_0, γ_0, τ_1, τ_2, Λ, α – экспериментально определяемые функции. Зависимости (6.1)–(6.3) вместе с уравнениями сохранения импульса и энергии образуют полную систему уравнений, реализующих данную модель. Поясним физический смысл приведенных уравнений. Первое уравнение (6.1) при малых скоростях деформирования линейно связывает приращения модуля μ с приращениями деформаций; а при больших скоростях оно аналогично уравнению [25], описывающему процессы релаксации. Первый член второго уравнения (6.1) – традиционный в упругости и пластичности, второй – отражает факт зависимости кривых напряжение – деформация от скорости деформирования ("вязкость"), третий отвечает за накопление повреждений. Тезор $\mathbf{s}$ в (6.2) ассоциируется с деформациями "скелета" среды, а тензор χ в (6.3) обусловлен силами трения в среде с повреждениями, причем трение имеет двоякую природу – трение "берегов" микродефектов и трение "разрушенного" материала, находящегося в микродефектах.

Хотя в [23] и констатируется, что имеющихся данных недостаточно, чтобы получить количественные оценки для имеющихся в модели параметров и привести явные выражения для используемых функций, тем не менее, в работе, приведены ограничения в виде неравенств, которым должны удовлетворять некоторые из параметров модели.

В работе решена краевая задача об определении напряженно-деформированного состояния цилиндрического тела, вызванного действием нестационарной нагрузки, приложенной к боковой поверхности тела. Интенсивность нагрузки такова, что в теле возникают микроповреждения. Задача решалась оригинальным разностно-характеристическим методом; из анализа решения следует, что данная модель качественно правильно описывает процесс дилатансии горных пород при нестационарных нагрузках, несмотря на всевозможные упрощения и самые грубые оценки параметров. Установлено, что рассматриваемая система уравнений не сводится ни к одной из известных до этого моделей. Позже в [26] модель была обобщена на случай конечных деформаций. Там же сформулированы неравенства для параметров модели, удовлетворение которым приводит к гиперболичности системы определяющих уравнений.

Заметим, что для проведения количественных оценок на основе предлагаемой модели не хватает специфических экспериментальных данных, таких, как зависимость модулей деформируемого материала от скоростей распространения упругих волн (и повреждаемости), а также зависимостей, связывающих объем микродефектов с параметрами, характеризующими текущее напряженно-деформированное состояние. К сожалению, имеющиеся результаты экспериментальных работ всецело ориентированы на модели, основанные на различных вариантах и обобщениях теории пластичности.

7. Основу модели, предложенной в работе [27], составляют следующие предпосылки и гипотезы. Сдвиг описывается известными соотношениями теории пластического течения – уравнениями Прандтля–Рейсса[5]. Считается, что скорость не оказывает влияния на процесс деформирования. Наряду с использованием традиционного в теории упругопластического течения соотношения о представлении тензора скоростей деформаций в виде упругой и неупругой частей авторы работы используют дополнительное предположение о разложении объемной части тензора скорости пластической деформации на гидростатическую ε_H^p и дилатансионную составляющие ε_D^p. Последняя принята пропорциональной скорости изменения инвариантов девиатора тензора напряжения J_j ($j = 1, 2, 3$):

$$\varepsilon_D^p = A_j H(W)\, dJ_j/dt \tag{7.1}$$

где H – функция, определенная в п. **2**, A_j – некоторые функции, явно в работе не определенные, $W = S_{ij}\varepsilon'_{ij}$, S_{ij} – девиатор тензора напряжений, ε'_{ij} – девиатор тензора скоростей деформаций.

Считается, что материал любой скальной породы обладает тремя "предельными" механическими характеристиками – "условиями начальной, максимальной и остаточной прочности". Первая определяет поведение материала при текучести (т.е. при возникновении неупругих деформаций); вторая соответствует условию, при котором материал заведомо разрушится (максимальная прочность). Наконец, третья характеристика количественно описывает поведение разрушенного материала. Результаты экспериментов, на которых базируются авторы [27], получены при исследовании деформирования и разрушения скальных пород под действием сжимающих ($\sigma \geq 0$, $\sigma = \sigma_{kk}/3$, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений) квазистатических нагрузок.

В работе для случая простых (пропорциональных) траекторий нагружения при обобщении результатов экспериментальных исследований по разрушению горных пород получены эмпирические зависимости деформационного типа для ε_D^p:

$$\varepsilon_D^p = \varphi_i + \alpha_i\left(\beta_i f_i(\sqrt{J_2})/[g_i(\sigma - R)]\right)^{k_j} \quad (i = 1, 2) \tag{7.2}$$

[5] Авторы, приводя данные соотношения, ссылаются на работу [28]. Напомним, что именно в этой работе С. Григоряном была выдвинута плодотворная гипотеза о том, что процессы сдвигового деформирования грунта описываются теми же соотношениями, что и для металлов, и полученными в классической работе Рейсса Е. [29]. (Ее русский перевод опубликован в сборнике [30].) Использование этой гипотезы в моделях, описывающих поведение грунтов под действием динамических нагрузок, в настоящее время превратилось в общее место.

В (7.2) $i = 1$ соответствует "допредельному режиму нагружения", $i = 2$ – "запредельному режиму нагружения", φ_i, α_i, β_i, k_i – экспериментальные параметры; f_i, g_i – некоторые функции, R – предел прочности породы при одноосном растяжении.

В данной модели обращает внимание на себя ряд обстоятельств.

1. Хотя авторы и оговариваются, что "предлагаемая модель может рассматриваться как предельная – динамическая и статическая" (что это такое, подробно не оговаривается) и "конкретный вид для двух предельных моделей будет различным для одного и того же материала", приведенные зависимости получены при обработке результатов только квазистатических опытов. Ввиду того, что в работе никаких слов о динамике, кроме цитированных, нет, это ограничивает использование модели только квазистатическими режимами нагружения.

2. Приведенные в работе формальные выражения для определения ε_H^p имеют вид, исключающий возможность как дальнейшего их анализа, так и использования для количественной оценки.

3. Хорошо известно (смотри, например [16]), что уравнения теории упругопластической деформации в полной мере описывают деформирование материала при простом нагружении, т.е. когда компоненты девиатора напряжений изменяются монотонно и пропорционально одному параметру. Известно, что использование этих уравнений, адекватных уравнениям нелинейно упругого тела, для описания пластических деформаций при сложных зигзагообразных путях нагружения приводит к неудовлетворительным результатам. Более того, в теории пластичности естественным является обратный вопрос – какими должны быть нагрузки, прикладываемые к телу, чтобы в каждой точке его могли реализоваться условия простого нагружения. Но этот аспект совершенно выпал из внимания авторов как данной работы, так и [10].

Но именно результаты экспериментов на простых траекториях и использовались при выводе соотношений (7.2). Так как конкретный тип зависимостей (7.1) в работе не приведен, и отсутствуют какие-либо указания, как эти зависимости построить в общем случае, то данную модель правильнее считать удобной схемой, позволяющей производить экспресс-оценки величины дилатансионной составляющей пластической деформации для цитированных в работе экспериментов. В подтверждение данного соображения говорит еще и такой факт. В зависимостях (7.2) явно входит в качестве аргумента величина R. Тем не менее, ни о каких реальных физических причинах, влияющих на появление в данном выражении величины предела прочности на одноосное растяжение, в работе не упоминается. Это еще раз подтверждает факт, что выражения (7.2), несмотря на свой инвариантный вид, носят чисто формальный характер.

8. Итак, рассмотрено несколько примеров континуальных моделей разрушения. Хотя список моделей на этом не исчерпывается, и можно было бы проанализировать ряд других работ, идеи и методы построения данных моделей отражают практически все многообразие теоретических подходов к описанию разрушения материалов горных пород при нестационарных нагрузках.

Поводя итоги, необходимо сказать следующее. Приходится констатировать, что в данной области знания термины и понятия не установились. Много внимания уделяется общеизвестным фактам, тогда как нередко трудные для понимания места излагаются излишне кратко; нередко вводятся и избыточные понятия (характерный пример – термин разгрузка, имеющий содержательный смысл для описания объемного деформирования, нередко распространяется и на сдвиг).

Необходимость привлечения для построения модели дополнительных правдоподобных рассуждений и допущений, непротиворечивость которых может быть определена только неявно, полностью аналогична ситуации в моделях откола, и, по-видимому, отражает факт, общий для всей теории разрушения. В отличие от ситуации с описанием откольного разрушения металлов, большинство моделей разрушения горных пород основаны на различных обобщениях теории пластического течения.

За редким исключением, отсутствует термодинамическая проверка, т.е. вывод неравенств, которым должны подчиняться используемые в модели параметры и функции. Впрочем, тоже можно сказать и о работах, в которых предложены модели откольного разрушения для металлов. Практически отсутствует анализ экспериментов, необходимых для определения характеристик данной модели. Однако это весьма важно, т.к. у некоторых моделей количество параметров весьма велико, а, как известно, различные параметры следует определять в независимых опытах, т.е. в таких, в которых реализуется отличный от других вид напряженного состояния.

Видимо, говорить о какой-то классификации моделей на данном этапе преждевременно. Применяющаяся в этих целях терминология из теории пластичности (вязкоупругая модель, упругопластическая модель) малоинформативна вследствие своей неполноты. Так, обычно опускается, что модель может быть в известном смысле различной при описании сдвига и объемного деформирования; четко не выделяются особенности в описании механизма разрушения и т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шок Р.* Поведение горных пород под действием больших напряжений // Удар, взрыв и разрушение. М.: Мир, 1981. С. 116–130.
2. *Николаевский В.Н., Лифшиц Л.Д., Сизов И.А.* Механические свойства горных пород. Деформации и разрушение // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1978. Т. 11. С. 123–250.
3. *Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г.* Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979. 301 с.
4. *Григорян С.С.* Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения горных пород // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С. 643–669.
5. *Слепян Л.И.* О волне хрупкого разрушения // Инж. ж. МТТ. 1968. № 4. С. 190–192.
6. *Галин Л.А., Черепанов Г.П.* О самоподдерживающем разрушении напряженного хрупкого тела // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. № 3. С. 543–546.
7. *Николаевский В.Н.* Предельная скорость фронта разрушения и динамические перегрузки хрупких материалов. Препринт № 123. М.: Ин-т пробл. механики АН СССР, 1979. 57 с.
8. *Майнчен Дж., Сак С.* Метод расчета "Тензор" // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 185–211.
9. *Зеленский А.С., Нещеретов И.И.* Учет откольного разрушения в задаче о взаимодействии продольной волны с цилиндрической полостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 125–129.
10. *Коротков П.Ф.* О математической модели постепенного разрушения горных пород и превращении их в пористые сыпучие среды // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 6. С.1357–1360.
11. *Замышляев Б.В., Евтерев Л.С.* Модели динамического деформирования и разрушения грунтовых сред. М.: Наука, 1990. 212 с.
12. *Замышляев Б.В., Евтерев Л.С., Кривошеев С.Г., Пилипко Ю.В.* Модель динамического деформирования и разрушения горных пород // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 3. С. 268–271.
13. *Замышляев Б.В., Евтерев Л.С., Пилипко Ю.В.* Квазиупругая модель деформирования скальных грунтов // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 2. С. 326–329.
14. *Капустянский С.М., Николаевский В.Н.* Количественная формулировка упругопластической дилатансионной модели (на примере песчаника) // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 113–123.
15. *Капустянский С.М.* Упругопластическая дилатансионная модель анизотропных сред // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. № 8. С. 50–59.
16. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 324 с.
17. *Кондауров В.И.* Уравнения релаксационного типа для вязкоупругих сред с конечными деформациями // ПММ. 1985. Т. 49. № 5. С. 791–800.
18. *Кондауров В.И., Петров И.Б.* Расчет процессов динамического деформирования упругопластических тел с учетом континуальности разрушения // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 6. С. 1344–1347.

19. *Кондауров В.И.* Энергетический подход к задаче континуального разрушения твердого тела // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 6. С. 17–22.
20. *Кондауров В.И.* Континуальное разрушение нелинейноупругих тел // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 302–310.
21. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 535 с.
22. *Кондауров В.И., Никитин Л.В.* Теоретические основы реологии геоматериалов. М.: Наука, 1990. 206 с.
23. *Глушко А.И., Нещеретов И.И.* О кинетическом подходе к разрушению горных пород // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 140–146.
24. *Gupta I.N.* Seismic velocities in rock subjected to axial loading up to shear fracture // J. Geophys. Res. 1973. V. 78. № 29. P. 6936–6942.
25. *Годунов С.К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 303 с.
26. *Глушко А.И.* Об одном подходе к разрушению горных пород // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 130–135.
27. *Григорян С.С., Джанашия С.В., Рыков Г.В.* К вопросу о математической модели деформирования и разрушения скальных пород // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 133–140.
28. *Григорян С.С.* Об основных представлениях динамики грунтов // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 1057–1074.
29. *Reuss A.* Berücksichtigung in der Plastizitätstheorie // Z. angew. Math. Mech. 1930. Bd. 10. № 3. S. 266–274.
30. Теория пластичности / Под ред. Ю.Н. Работнова. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 452 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.04.1997