

УДК 539.215; 539.374

© 1999 г. Б.А. РЫЧКОВ

О ДЕФОРМАЦИОННОМ УПРОЧНЕНИИ ГОРНЫХ ПОРОД

Механизм деформационного упрочнения горных пород при сжимающих напряжениях моделируется с помощью понятия сопротивления сдвигу от локальных (идеализированных) скольжений, которые при определенных условиях сопровождаются разрыхлением материала. Используется упрощенная концепция скольжения в трактовке М.Я. Леонова. Считается, что исследуемые материалы в области упругих деформаций являются ортотропными. Рассмотрено пропорциональное и сложное нагружение.

1. Механика деформации горных пород. Как известно, опыты Т. Кармана и Р. Бекера впервые выявили, что материалы, являющиеся хрупкими (мрамор, песчаник) при обычных испытаниях на растяжение и сжатие, становятся пластичными при сжатии с наложенным высоким гидростатическим давлением [1]. В экспериментах П. Бриджмена [2] установлено, что в условиях одноосного сжатия цилиндрических образцов мрамора и талькохлорита возникает остаточное увеличение их объема. Такое разрыхление материала, как показали опыты А.Н. Ставрогина [3, 4], при наложении на состояние сжатия всестороннего давления с ростом последнего вначале усиливается, затем уменьшается и совсем исчезает при некотором соотношении между минимальным и максимальным главными напряжениями. Эффект разрыхления невозможно отождествлять с ростом уже имеющихся трещин [5]. Естественно считать, что в зонах локальных скольжений (перемещений дислокаций и других дефектов кристаллической структуры) происходит [6, 7] развитие микротрещин в силу наличия различного рода препятствий на пути движения указанных дефектов. Учет подобного механизма неупругой деформации приводит к известным затруднениям при разработке теории течения [7, 8]. Это связано, в частности, с неопределенностью реального смысла поверхности нагружения [9] и с тем, что при сложном напряженном состоянии для горных пород единая кривая деформационного упрочнения в каких-либо общепринятых обобщенных координатах отсутствует [10].

Предлагаемый ниже синтез концепции скольжения [11] и разрыхления [6] позволяет обойти все основные спорные вопросы, связанные с выбором параметра упрочнения и с поиском инвариантной формы поверхностей нагружения (текучести).

Деформацию дилатантных материалов можно представить [6] в виде суммы трех слагаемых: упругой, чисто пластической (происходящей без изменения объема) и деформации разрыхления, причем последние две составляющие должны быть связаны с общей природой явления неупругости.

Для упругой составляющей деформации закон Гука не всегда выполняется [4], если предполагать исходную начальную изотропию горных пород. Для многих из них приемлемо предположение об ортотропной симметрии в исходном состоянии [12].

Рассмотрим ортотропный материал. Для него в случае трехосного сжатия компоненты тензора упругих деформаций в главных осях согласно обобщенному закону

σ_{1y}	σ_1	ε_1	$-\varepsilon_2$	e_1	$-e_2$	Γ_1	$-\Gamma_2$
0	800	1,70	0,70	1,60	0,45	0,10	0,25
780	945	2,30	1,20	1,89	0,53	0,41	0,67
0,069	1000	2,05	0,78	1,87	0,47	0,18	0,31
940	1200	2,70	1,36	2,24	0,57	0,46	0,79
	1300	3,20	1,88	2,43	0,67	0,77	1,27
0,116	1000	1,88	0,52	1,77	0,41	0,11	0,11
1025	1200	2,48	0,86	2,13	0,49	0,35	0,37
	1416	3,70	1,88	2,51	0,58	1,19	1,30
0,178	1200	2,80	0,80	1,98	0,40	0,82	0,40
1200	1600	4,28	1,72	2,64	0,53	1,64	1,19
	1760	4,88	2,20	2,91	0,59	1,97	1,61
0,233	1600	2,76	0,68	2,47	0,42	0,29	0,26
1300	2000	3,96	1,36	3,08	0,53	0,88	0,83
	2320	5,62	2,32	3,58	0,61	2,04	1,71
0,322	2000	3,08	0,48	2,73	0,30	0,35	0,18
2000	2400	4,16	0,80	3,28	0,36	0,88	0,44
	2800	6,40	1,92	3,83	0,42	2,57	1,50
0,407	3000	4,56	0,48	3,60	0,13	0,96	0,35
2460	3800	7,70	1,60	4,55	0,17	3,15	1,43
0,51	4000	5,60	0,48	3,98	-0,35	1,62	0,83
3000	5000	8,48	1,28	4,97	-0,43	3,51	1,71
	5600	11,44	2,24	5,57	-0,48	5,87	2,72
0,707	5000	5,14	-1,43	3,02	-1,68	2,12	0,25
4500	6000	6,43	-1,57	3,63	-2,01	2,80	0,44
	7000	8,28	-1,43	4,23	-2,35	4,05	0,92

Гука определяются по формулам [13]:

$$e_1 = \frac{1}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_2 - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_3, \quad e_2 = \frac{1}{E_2} \sigma_2 - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_3,$$

$$e_3 = \frac{1}{E_3} \sigma_3 - \frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_2 \quad (E_i, \nu_{ij} - \text{const}; i, j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

Напряжения сжатия (σ_i) считаются положительными.

В опытах А.Н. Старогина [3, 4] $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$, а вид напряженного состояния характеризовался отношением $\sigma_2/\sigma_1 = c$. Начальный участок диаграммы деформирования (до $\sigma_1 = 0,1-0,15 \sigma_{1y}$, σ_{1y} – предел упругости) не рассматривался, поскольку при этом происходило уплотнение материала, вызывающее нелинейную зависимость деформации от напряжения. Далее его состояние стабилизировалось, что проявилось в виде линейной связи между напряжением и деформацией вплоть до σ_{1y} . Именно по этому (второму) участку диаграммы определялись [3] упругие константы при одноосном сжатии. Следуя этой методике и полагая материал начально ортотропным, определим константы, входящие в (1.1). Для этого в качестве исходных данных используем соответствующие табличные (полученные в опыте [4]) значения напряжений и деформации для каких-либо двух напряженных состояний (c). Подобный прием осуществлен ранее [14] для пластичного материала.

Для талькохлорита [4] было выбрано $c = 0,116$ и $c = 0,322$. В результате найдены такие константы и их комбинации:

$$E_1 = 4,99 \cdot 9,81 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = 0,279$$

$$[\nu_{21}/E_2 + \nu_{31}/E_3]^{-1} = 5,05 \cdot 9,81 \cdot 10^5 \text{ МПа} \quad (1.2)$$

$$[1/E_2 - \nu_{32}/E_3]^{-1} = [1/E_3 - \nu_{23}/E_2]^{-1} = 7,87 \cdot 9,81 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

В таблице для всех осуществленных в эксперименте [3] видов напряженного состояния приведены (для талькохлорита) значения напряжений, превышающие пределы упругости, и вызванные ими (замеренные в опыте) деформации ϵ_1 и ϵ_2 , а также вычисленные по формулам (1.1) с использованием (1.2) упругие компоненты деформации e_1 и e_2 . Для пределов упругости σ_{1y} (в первой колонке таблицы) указаны значения, определенные в [4]. Неупругие компоненты (Γ_1 и Γ_2) в этой таблице представляют собой разность между общими и упругими деформациями. Размерность напряжений – $9.81 \cdot 10^5$ МПа, деформаций – % с увеличением в 10 раз.

Деформации сжатия ($\epsilon_1, e_1, \Gamma_1$) считаются положительными.

Как видно из соотношения между компонентами Γ_1 и Γ_2 , при достаточно высоком гидростатическом давлении ($c = 0,322; 0,407; 0,51$) талькохлорит начинает вести себя как пластичный материал ($\Gamma_2/\Gamma_1 \approx -0,5$). Это обстоятельство является решающим аргументом в пользу сделанного предположения о характере начальной анизотропии и неизменности (в процессе неупругой деформации) вычисленных выше упругих параметров материала. Следовательно, в рассматриваемом случае компоненты тензора упругих деформаций в выбранных осях можно определять по формулам (1.1).

При меньшем всестороннем давлении ($c < 0,322$) $|\Gamma_2| > 0,5 \Gamma_1$. Это неравенство обуславливается разрыхлением: именно при малых значениях c наблюдается в опыте остаточное увеличение объема. При $c = 0,707$ следует отметить обратное явление: $|\Gamma_2| < 0,5 \Gamma_1$, т.е. при этом возникает, очевидно, уплотнение материала. Но о количественной стороне этого явления трудно судить, так как испытания при других подобных состояниях (при $c > 0,5$ и $c \neq 0,707$) отсутствуют.

Такой же анализ составляющих замеренных в опыте компонент деформации при трехосном сжатии проведен еще для двух горных пород: мрамора-II и песчаника Д-8 [4]. Для них все перечисленное выше подтвердилось.

Исходные опытные данные мрамора-II взяты при $c = 0,116$ и $c = 0,321$. Согласно (1.1) получено

$$E_1 = 6,39 \cdot 9,81 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = 0,302$$

$$[\nu_{21}/E_2 + \nu_{31}/E_3]^{-1} = 5,46 \cdot 9,81 \cdot 10^5 \text{ МПа} = E_{12}$$

$$[1/E_2 - \nu_{32}/E_3]^{-1} = 9,61 \cdot 9,81 \cdot 10^5 \text{ МПа} = E_{23}$$

Для песчаника Д-8 исходными послужили состояния при $c = 0,176$ и $c = 0,232$. Для него с учетом только что введенных выше обозначений (для комбинаций определяемых параметров) найдено:

$$E_1 = 2,46 \cdot 9,81 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = 0,199$$

$$E_{12} = 2,24 \cdot 9,81 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad E_{23} = 2,8 \cdot 9,81 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

2. Условие текучести и неупругая деформация. Согласно упрощенной концепции скольжения [11] вначале рассматриваются локальные сдвиги как плоскопараллельные смещения прослоек материала в условиях плоскопластической деформации. Следуя Мору, будем считать, что эти сдвиги возникают, если на некоторой площадке касательное τ_η и нормальное σ_η напряжения удовлетворяют условию

$$\tau_\eta = s_0 - \mu \sigma_\eta \quad (2.1)$$

где μ и s_0 – параметры материала, определяемые из эксперимента. Правая часть формулы (2.1) называется начальным сопротивлением сдвигу (s_η).

В плоскости, повернутой относительно площадки действия максимального касательного напряжения (T) на угол β , нормальное и касательное напряжения опреде-

ляются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta} &= \sigma_0 + T \sin 2\beta, \quad \tau_{\beta} = T \cos 2\beta \\ \sigma_0 &= (\sigma_1 + \sigma_3)/2, \quad T = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 \quad (\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 > 0) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Учитывая (2.2), условие текучести (2.1) представим в виде

$$s_0 - \mu(\sigma_0 + T \sin 2\beta_0) = T \cos 2\beta_0 \quad (2.3)$$

где β_0 — неизвестный угол, определяющий направление первого сдвига, отсчитываемый от направления действия максимального касательного напряжения T .

При первом скольжении касательные к кривым $s_{\eta} = s_{\eta}(\beta)$ и $\tau_{\eta} = \tau_{\eta}(\beta)$ совпадут [15], т.е.

$$ds_{\eta}/d\beta = d\tau_{\eta}/d\beta \quad \text{при} \quad \beta = \beta_0 \quad (2.4)$$

$$s_{\eta} = s_0 - \mu(\sigma_0 + T \sin 2\beta) \quad (2.5)$$

Отсюда вытекает

$$\operatorname{tg} 2\beta_0 = \mu \quad (2.6)$$

Таким образом, величина угла β_0 , характеризующего направление первого сдвига, определяется параметром μ . Его величину, в отличие от некоторых прежних представлений, будем считать зависящей от вида напряженного состояния (c).

Из соотношения (2.3) и (2.6) следует

$$T = (s_0 - \mu\sigma_0)(1 + \mu^2)^{-1/2} \quad (2.7)$$

где T и σ_0 даются формулами (2.2) (напомним: сжимающие напряжения здесь считаются положительными).

Нормальное напряжение σ_0 не должно влиять на условие текучести, когда исследуемые материалы становятся пластичными. Для талькохлорита это наблюдается при $c \geq 0,322$. Как показали проведенные расчеты, пределы упругости (σ_1) этой горной породы (представленные в таблице) отображаются условием (2.7), если принять

$$\begin{aligned} s_0 &= 680 \cdot 9,81 \text{ МПа и} \\ \mu &= \mu(c) = 0,58 - 1,8 c \quad \text{при} \quad c \leq c_p, \\ \mu &= 0 \quad \text{при} \quad c \geq c_p = 0,322 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для мрамора-II получено: $s_0 = 650 \cdot 9,81 \text{ МПа}$ и $\mu(c) = 0,8 - 1,35 c$ при $c \leq c_p$; $\mu = 0$ при $c \geq c_p = 0,351$.

Для песчаника Д-8: $s_0 = 2000 \cdot 9,81 \text{ МПа}$, $\mu(c) = 1,77 - 10,5 c + 15,5 c^2$ при $c \leq c_p$; $\mu = 0$ при $c \geq c_p = 0,322$.

Итак, полученные значения параметра $\mu(c)$ отражают (в указанных пределах изменения вида напряженного состояния) влияние наложения гидростатического давления на изменение предела упругости при сжатии. Вместе с тем этот параметр определяет, как указывалось выше (см. формулу (2.6)), площадку первого локального сдвига при достижении предела упругости. При последующем пропорциональном нагружении интенсивность скольжений по этой площадке наибольшая. Естественно полагать, что она является и плоскостью среза при разрушении нагружаемого таким образом образца. Следовательно, можно считать, что угол β_0 определяет и угол ориентирования плоскости среза относительно главных осей тензора напряжений. Экспериментальные данные [4] на этот счет достаточно хорошо соответствуют зависимости (2.6).

Согласно модели скольжения [11] и механизма разрыхления [6] при элементарном

скольжении прослоек материала в направлении l возникает пластическая деформация сдвига $d\Gamma_{nl}^0$ и относительное удлинение $d\Gamma_n^*$ в направлении n , ортогональном l :

$$d\Gamma_{nl}^0 = r(\beta)d\beta, \quad d\Gamma_n^* = \lambda d\Gamma_{nl}^0 \quad (2.9)$$

где λ – положительный множитель, называемый коэффициентом разрыхления, $r(\beta)$ – интенсивность основных скольжений, которые по определению [11] происходят в плоскостях, параллельных второй главной оси тензора напряжений, и в направлениях, перпендикулярных к этой оси.

Составляющие пластической деформации и разрыхления в главных осях, обусловленные основными скольжениями, будут

$$\Gamma_1^0 = -\Gamma_3^0 = -\frac{1}{2} \int \cos 2(\beta - \beta_0) r(\beta) d\beta, \quad \Gamma_1^* = \frac{1}{2} \lambda \int [1 + \sin 2(\beta - \beta_0)] r(\beta) d\beta, \quad (2.10)$$

$$\Gamma_3^* = \frac{1}{2} \lambda \int [1 - \sin 2(\beta - \beta_0)] r(\beta) d\beta$$

Здесь интегрирование производится по всем направлениям l , по которым произошли сдвиги.

Чтобы учесть вклад в пластическую деформацию всех других ("дополнительных" к основным) скольжений, постулируется [11] некоторая связь между приращениями главных пластических деформаций от основных и дополнительных скольжений, которая зависит от отношения главных касательных напряжений. Поскольку это отношение не меняется, из указанного в [11] вытекает, что в данном случае суммарные компоненты пластической деформации (Γ_i^+ , $i = 1, 2, 3$) будут такими:

$$\Gamma_1^+ = 2\Gamma_1^0, \quad \Gamma_2^+ = \Gamma_3^+, = -\Gamma_1^+ / 2 \quad (2.11)$$

Из этого следует, что в качестве площадки, по которой рассматриваются основные скольжения, может служить площадка действия главного касательного напряжения τ_{12} , а не только площадка действия главного касательного напряжения τ_{13} (так как $\tau_{12} = \tau_{13} = T$). Это, в свою очередь, приводит к тому (как будет показано ниже после вычисления интегралов (2.10)), что компоненты деформации разрыхления оказываются равными

$$\Gamma_1^* = \Gamma_2^* = \Gamma_3^* = -\lambda \Gamma_1^+ \quad (2.12)$$

3. Деформационная анизотропия при монотонной деформации. Прочностные свойства материала при неупругой деформации, согласно развиваемой модели, характеризуются сопротивлением сдвигу. Для осесимметричного напряженно-деформированного состояния его можно задать с помощью обычных инвариантов тензора напряжений, не используя какие-либо эквивалентные напряжения, учитывающие начальную анизотропию. Учет анизотропии необходим, когда рассматриваются (как, например, в [16]) более сложные напряженные состояния ортотропного материала, охватывающие значительную часть всей поверхности текучести в пространстве напряжений.

Следуя разработанной методике [11, 17], сопротивление сдвигу S_β представим в виде

$$S_\beta = s_0 - \mu \sigma_\beta + \Psi(T, \sigma_0, c) r_\beta + A [1 - \cos 2(\beta - \beta_0)] (r_\beta \equiv r(\beta)) \quad (3.1)$$

$$A = 2\sigma_{1y}(1 - c) \quad (3.2)$$

$$\Psi(T, \sigma_0, c) = k[(T\sqrt{1 + \mu^2} + \mu\sigma_0) / s_0 - 1]^\alpha \quad (3.3)$$

Параметры k и α определяются при аппроксимации диаграмм упрочнения. Ин-

тенсивность скольжений r_β находится из условия равенства сопротивления сдвигу S_β компоненте касательного напряжения τ_β . Зная r_β , вычислим компоненты неупругой деформации по формулам (2.10), в которых $r_\beta \neq 0$ в направлениях скольжений $\beta \in [\Theta_1, \Theta_2]$. Границы области скольжений $\Theta_{1,2}$ определяются из условия непрерывности скольжений, т.е. $r(\Theta_{1,2}) = 0$. Опуская промежуточные выкладки, в результате получим

$$\Gamma_1^+ = (T\sqrt{1+\mu^2} + A)N(\Theta)(2\Psi)^{-1}$$

$$\Gamma_1^* = \Gamma_3^* = -\lambda(T\sqrt{1+\mu^2} + A)N_1(\Theta)(2\Psi)^{-1} \quad (3.4)$$

$$2\Theta = \arccos[(s_0 + A - \mu\sigma_0)/(T\sqrt{1+\mu^2} + A)]$$

$$N(\Theta) = \Theta - \sin 4\Theta/4, \quad N_1(\Theta) = \sin 2\Theta - 2\Theta \cos 2\Theta \quad (3.5)$$

Здесь введены обозначения для раствора веера скольжений (2Θ) и срединного направления в этом веере (δ):

$$\Theta = (\Theta_2 - \Theta_1)/2, \quad \delta = (\Theta_1 + \Theta_2)/2 \quad (3.6)$$

причем, наряду с (3.5), имеем

$$\tan 2\delta = (\mu T + A \sin 2\beta_0)/(T + A \cos 2\beta_0) \quad (3.7)$$

Из сравнения (2.6) и (3.7) следует, что при пропорциональном нагружении $\delta \equiv \beta_0$. Разлагая функции $N(\Theta)$ и $N_1(\Theta)$ в ряд по степеням Θ , получим:

$$N(\Theta) = 8\Theta^3/3 + o(\Theta^5) = N_1(\Theta) \quad (\Theta \ll 1) \quad (3.8)$$

Следовательно, с точностью до малых порядка Θ^5 из (3.8) и (3.4) вытекает $\Gamma_1^* = -\lambda\Gamma_1^+$, что и приводит к соотношению (2.12).

Окончательно связь между заданными напряжениями и вызванными ими неупругими деформациями ($\Gamma_i, i = 1, 2, 3$) можно записать в параметрическом виде (через параметр Θ) следующим образом:

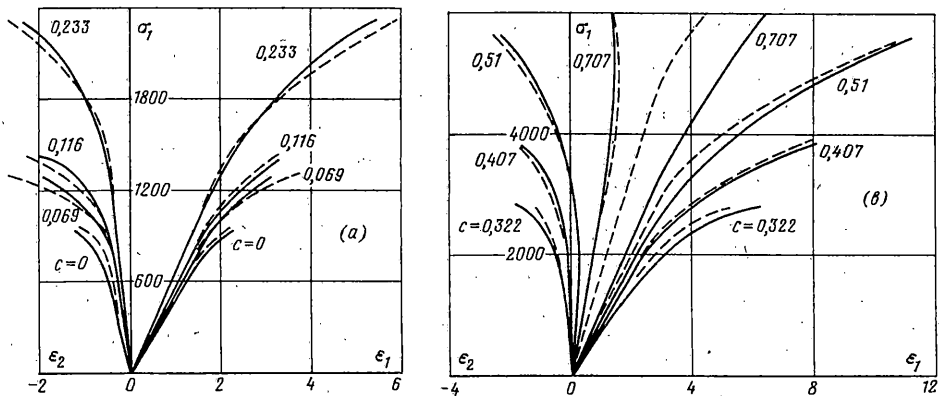
$$\Gamma_1 = (1 - \lambda)(T\sqrt{1+\mu^2} + A)N(\Theta)(2\Psi)^{-1}$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_3 = -(1/2 + \lambda)(T\sqrt{1+\mu^2} + A)N(\Theta)(2\Psi)^{-1} \quad (3.9)$$

Итак, при одноосном сжатии и при наложении на это состояние гидростатического давления вплоть до некоторого предельного его значения увеличение объема за счет разрыхления по предлагаемой модели пропорционально величине пластической деформации тела, что согласуется с теорией пластического разрыхления В.В. Новожилова [18].

4. Сопоставление с экспериментальными данными. Для определения материальных параметров k и α , введенных в зависимость (3.3), для талькохлорита используем одну из диаграмм упрочнения $\epsilon_1 = \epsilon_1(\sigma_1, c)$ при таком значении c , при котором материал становится пластичным. Как видно из таблицы, такая диаграмма при $c = 0,51$ отвечает бесспорно не разрыхляющемуся материалу и имеет наиболее протяженный участок упругопластической деформации. Аппроксимация экспериментальной зависимости $\epsilon_1 = \epsilon_1(\sigma_1, 0,51)$ с помощью определяющих соотношений (3.9) и (1.1) (при значениях всех других параметров, определенных ранее) дает $\alpha = -0,122$, $k = 2,245 \cdot 9,81 \cdot 10^4$ МПа.

Сравнение расчетных и экспериментальных деформаций ϵ_1 при других c показало, что для данного материала найденные значения α и k не зависят от вида напряженного



Фиг. 1

состояния, т.е. являются константами материала, если положить $\lambda(c) = \mu(c)$ (коэффициент $\mu(c)$ выражается формулой (2.8)).

Диаграмма упрочнения для продольной (ϵ_1) деформации и соответствующие поперечные (ϵ_2) деформации показаны на фиг. 1а, б. Размерность напряжений – $9,81^{-1}$ МПа, деформаций – $1 \cdot 10^3$. Сплошные линии – эксперимент, штриховые – расчет. Диаграммы расположены по мере возрастания параметра c : на фиг. 1, а нижние кривые $\epsilon_1 = \epsilon_1(\sigma_1, c)$ и $\epsilon_2 = \epsilon_2(\sigma_1, c)$ соответствуют $c = 0$, далее с нарастанием упрочнения – для $c = 0,069$; $0,116$; $0,233$. Диаграмма для $c = 0,178$ на этой фигуре не приведена, так как по экспериментальным данным упругий ее участок имеет наклон, меньший чем при $c = 0,116$, что противоречит обобщенному закону Гука (1.1) и, вероятно, является каким-то "выбросом" из довольно-таки четко проявленной закономерности в соответствующем изменении упругих деформаций.

На фиг. 1; б нижние кривые приведены для $c = 0,322$, выше – для $c = 0,407$; $0,51$; $0,707$. Заметное расхождение расчетного и экспериментального упругого участков диаграммы $\epsilon_1 = \epsilon_1(\sigma_1, 0,707)$ – это, по всей видимости, результат возникновения при высоком гидростатическом давлении уплотнения материала, которое начинает проявляться и при $c = 0,51$. Об этом же, как уже упоминалось выше, свидетельствует анализ соотношения между поперечной и продольной деформациями для данного ($c = 0,707$) напряженного состояния.

В целом относительно малые отклонения между расчетными и экспериментальными кривыми упрочнения при разных c имеют знакопеременные значения. Следовательно, предсказываемые таким образом деформации горных пород при сжимающих напряжениях достаточно хорошо соответствуют экспериментальным данным в том виде, в каком они получаются в опыте.

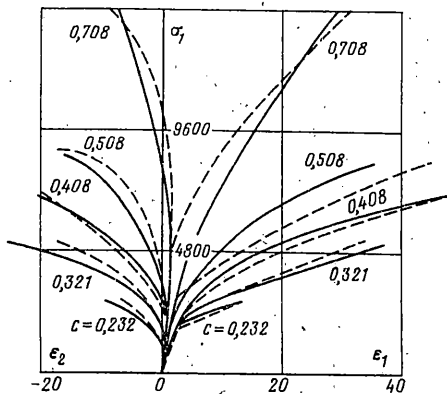
Для мрамора характер упрочнения при малых и больших значениях c , в отличие от талькохлорита, постоянно меняется; но для пластической составляющей деформации упрочнение остается близким к линейному. Соотношение между чисто пластической деформацией и разрыхлением также оказалось более сложным, чем в предыдущем случае. В результате обработки экспериментальных данных для мрамора-II получено

$$\Psi(T, \sigma_0, c) = k(c)$$

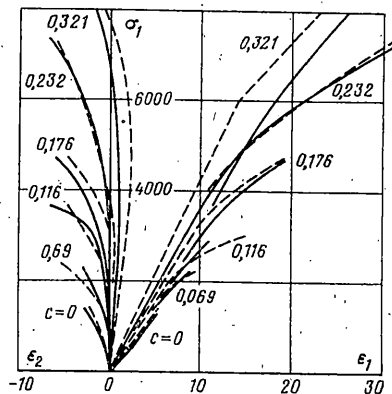
$$k(c) = k_0(1 - 1,826c), \quad k_0 = 2,8 \cdot 9,81 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \quad c \leq c_p = 0,351$$

$$k(c) = k_p[1 + 1,4(c - c_p)], \quad k_p = 10 \cdot 9,81 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad c \geq c_p$$

$$\lambda(c) = 0,44 + 0,175c - 4,09c^2, \quad c \leq c_p = 0,351; \quad \lambda = 0 \text{ при } c \geq c_p$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Сравнение расчетных и экспериментальных диаграмм упрочнения мрамора-II дано на фиг. 2 (обозначения такие же, как на фиг. 1). Диаграммы приведены для значений c , начиная с $c = 0,323$ (нижняя кривая на фиг. 2); верхние кривые – соответственно для $c = 0,321; 0,408; 0,507; 0,708$. При меньших c такое графическое сравнение не дано, поскольку расхождение между расчетными и экспериментальными диаграммами настолько мало что они практически сливаются друг с другом. И напротив, как и для предыдущего материала, заметна разница в упругой области деформирования при $c = 0,708$ и $c = 0,508$. Причина этого, повторяем, на наш взгляд, в изменении структуры материала (уплотнение) при высоком гидростатическом давлении, что (в противовес разрыхлению) пока не отражается осуществляемым моделированием из-за недостатка экспериментальных данных.

Для песчаника Д-8 определяющая функция Ψ по-прежнему задается формулой (3.3), в которой надо положить $k = 3,708 \cdot 9,81$ МПа и

$$\alpha = \begin{cases} 0,5 - 6,135(c_0 - c) & \text{при } c \leq c_0 = 0,232 \\ 0,5 & \text{при } c \geq c_0 \end{cases}$$

Заметим, что при $c > 0,321$ экспериментальные данные для песчаника Д-8 отсутствуют [4], а при $c = 0,321$ этот материал ведет себя как пластичный. Коэффициент его разрыхления для всех напряженных состояний можно принять вдвое меньше коэффициента $\mu(c)$, зависимость которого от c приведена в предшествующем тексте. Диаграммы упрочнения песчаника показаны на фиг. 3 (обозначения прежние).

Нижняя кривая на фиг. 3 $\epsilon_1 = \epsilon_1(\sigma_1, 0)$ соответствует одноосному сжатию ($c = 0$). Эксперимент (см. сплошную линию) отражает наличие уплотнения материала при малых деформациях с момента начала нагружения: четко видна выпуклость этой диаграммы к оси абсцисс на начальном участке. Выше расположены диаграммы для $c = 0,069; 0,116; 0,176; 0,232$ и $0,321$. Экспериментальная кривая $\epsilon_1 = \epsilon_1(\sigma_1, 0,176)$ имеет, как и при одноосном сжатии, начальный выгнутый к низу участок вплоть до деформации $\epsilon_1 = 1,5 \cdot 10^{-3}$. Это на фиг. 3 не показано, так как в противном случае эта кривая "перережет" диаграммы деформирования при меньших c . Однако этот факт был учтен при определении упругих констант материала (см. п. 1), и поэтому расчетная и экспериментальная кривые для этого случая оказались разнесены (на фигуре) между собой в области их линейного (упругого) участка.

Следует еще отметить, что у песчаника значительно большая эффективная пористость по сравнению с талькохлоритом и мрамором (см. петрографические характеристики горных пород [4, приложение 8]). Очевидно, поэтому его уплотнение, конкурирующее с разрыхлением и сменяющее, в конце концов, последнее, происходит

при меньшем гидростатическом давлении, чем у первых двух материалов. Этим можно объяснить расхождение расчетной и экспериментальной кривых $\epsilon_1 = \epsilon_1(\sigma_1, 0,321)$.

Приведенные соотношения связи между напряжениями и неупругими деформациями справедливы и в случае сложного нагружения при монотонной [11] деформации, когда не происходит разгрузка ни в каком из направлений происшедших скольжений, а интенсивность скольжений в этих направлениях или растет, или, по крайней мере, не уменьшается. Одним из условий монотонности является требование постоянного расширения веера скольжений. Поскольку согласно (3.6) границы веера равны $\Theta_{1,2} = \delta \pm \Theta$, указанное выполняется, если скорости изменения величин δ и Θ удовлетворяют неравенству $\dot{\delta} < \dot{\Theta}$. Отсюда вытекает ограничение на скорость изменения компонент тензора напряжений, при которой возможна монотонная деформация.

Условия монотонности легко проверяются при непосредственных вычислениях компонент деформации (3.4) при заданной траектории нагружения. Такие расчеты были проведены для талькохлорита и мрамора, для которых сложное нагружение осуществлялось [4] заданием вначале всестороннего давления до некоторого значения $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma^*$ при последующем постоянном боковом давлении $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma^*$ с ростом сжимающего напряжения σ_1 . Установлено, что при этом реализуется монотонная деформация. Но ее количественное описание осуществить не удалось из-за отсутствия в [4] необходимых табличных данных. Между тем авторы [4] указывают на большое расхождение в значениях неупругой осевой деформации образцов талькохлорита при пропорциональном и осуществленном сложном нагружениях при некоторых одинаковых в том и в другом случае значениях c (фиг. 3,42 в [4]). Не вдаваясь в подробности предложенного [4] объяснения этому факту (что, в частности, связано с введенными [4] координатами обобщенной кривой остаточной деформации, когда оказывается задействованной величина предела упругости), отметим еще одну, несомненно существенную причину. Как явствует из фиг. 3,40 [4], на которой дан график изменения предела упругости $\tau_y = \tau_y(c)$, значения предела $\tau_y(c)$ при пропорциональном и сложном нагружениях в отдельных случаях заметно отличаются между собой. Так, например, при $c = 0,335$ в случае сложного нагружения $\tau_y = 500 \cdot 9,81$ МПа, тогда как при пропорциональном нагружении для этого c согласно выведенной в [4] аппроксимирующей формуле (см. формулу (3.22) в [4]) $\tau_y = 636 \cdot 9,81$ МПа, что на 21% больше предыдущего значения. Это означает, что и диаграмма $\epsilon_1 = \epsilon_1(\sigma_1, c)$ при сложном нагружении конкретного образца будет значительно отличаться от такой же (но усредненной) диаграммы при пропорциональном нагружении в сторону занижения деформации ϵ_1 , как и наблюдалось в эксперименте.

Подобных различий в механических характеристиках образцов мрамора не отмечается [4] при таком же изменении условий испытания, вследствие чего диаграммы упрочнения в сопоставимых случаях не отличаются между собой.

Таким образом, развиваемая концепция скольжения и разрыхления вполне удовлетворительно отражает свойства деформационного упрочнения при характерных напряженных состояниях разных горных пород, различных по прочности и пластичности, но сходных по степени разрыхления материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1967. 863 с.
2. Бриджмен П. Исследования больших пластических деформаций и разрыва. М.: Изд-во иностр. лит. 1955. 444 с.
3. Каталог механических свойств горных пород. Л.: ВНИМИ, 1973. 267 с.
4. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979. 301 с.
5. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. М.: Оборонгиз, 1952. 556 с.

6. *Леонов М.Я., Паняев В.А., Русинко К.Н.* Зависимость между деформациями и напряжениями для полухрупких тел // Инж. ж. МТТ. 1967. № 6. С. 26–32.
7. *Rudnicki J.W., Rice J.R.* Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // J. Mech. and Phys. Solids. 1975. V. 23. No. 6. P. 371–394.
8. *Капустянский С.М., Николаевский В.П.* Количественная формулировка упругопластической дилатансионной модели (на примере песчаника) // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 113–123.
9. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
10. *Зарецкий-Феокистов Г.Г.* Об экспериментальных кривых деформирования горных пород в сложном напряженном состоянии // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1989. № 6. С. 43–49.
11. *Леонов М.Я., Нисневич Е.Б., Рычков Б.А.* Плоская теория пластичности, основанная на синтезе скольжений // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 6. С. 43–39.
12. *Капустянский С.М.* Упругопластическая дилатансионная модель анизотропных сред // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. № 8. С. 50–59.
13. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1979. 415 с.
14. *Жигалкин В.М., Рычков Б.А.* Анизотропное упрочнение ортотропного материала // ПМТФ. 1995. № 5. С. 81–86.
15. *Русинко К.Н., Кунеев В.И.* Плоскопластическая деформация полухрупкого тела // Сложная деформация твердого тела. Фрунзе: Илим, 1969. С. 136–145.
16. *Рычков Б.А.* Концепция скольжения и механика ортотропного материала // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 1. С. 70–79.
17. *Рычков Б.А.* Сложная деформация пластических материалов при нагружениях без поворота главных осей тензора напряжений // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 112–119.
18. *Новожилов В.В.* О пластическом разрыхлении // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 681–689.

Бишкек

Поступила в редакцию
16.07.1996