МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1999

УДК 539.376

© 1999 г. И.Ю. ЦВЕЛОДУБ

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПУТЯХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Изучается задача о нахождении оптимального пути деформирования в условиях ползучести, приводящего к заданным остаточным деформациям с наименьшей поврежденностью материала при ограничениях на продолжительность процесса и величину эквивалентного напряжения. В отличие от аналогичной задачи [1], где фактически рассматривались только вязкие материалы, у которых деформация в момент разрушения в испытаниях на длительную прочность при постоянном напряжении уменьшается с ростом последнего, в данной работе исследуются также и хрупкие материалы, для которых отмеченная зависимость меняется на противоположную. Кроме того, указываются наиболее неблагоприятные среди всех простых пути деформирования, приводящие при тех же условиях к наибольшей поврежденности. Это позволяет получить нижнюю и верхнюю оценки поврежденности материала по известным остаточным деформациям. Рассматривается также задача оптимального (в смысле энергетических затрат) разрушения материала при указанных выше ограничениях.

1. Изотермический процесс одноосной ползучести и разрушения разупрочняющихся материалов (как вязких, так и хрупких) хорошо описывается известными уравнениями Ю.Н. Работнова [1, 2]:

$$\eta = B_1\sigma^n(1-\Omega)^{-m}, \quad \dot{\Omega} = B_2\sigma^p(1-\Omega)^{-q} \tag{1.1}$$

где $\sigma > 0$ – напряжение, $\eta = \dot{\varepsilon}^c$ – скорость деформации ползучести ε^c, Ω ($0 \leqslant \Omega \leqslant 1$) – параметр поврежденности, B_1, B_2, n, m, p, q – положительные константы материала; точка означает дифференцирование по времени t. В естественном недеформированном состоянии $\Omega = 0$, а в момент разрушения $\Omega = 1$.

Стандартные испытания на ползучесть и длительную прочность проводятся при постоянных напряжениях. В этом случае из (1.1) с учетом равенств $\varepsilon^c = \Omega = 0$ при $t = 0$ получим [2]:

$$\varepsilon^c/\varepsilon_* = 1-(1-t/t_*)^{1-m/(q+1)}, \quad t_*^{-1} = B_2(q+1)\sigma^p \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_* = B_1\sigma^{n-p}/[B_2(q+1-m)]$$

(t_* – время до разрушения). Отсюда следует, что $\varepsilon^c(t_*)$ будет конечной величиной, причем $\varepsilon^c(t_*) = \varepsilon_*$, только при выполнении условия

$$q+1-m > 0 \tag{1.3}$$

которое, как видно из (1.2), эквивалентно неравенству $\ddot{\varepsilon}^c > 0$, т.е. вогнутости кривой $\varepsilon^c = \varepsilon^c(t)$, что и наблюдается в экспериментах на ползучесть разупрочняющихся материалов.

Как известно [2, с. 365–366], в определении константы q (или m) по результатам отмеченных выше испытаний существует произвол. Однако, если использовать условие (1.3), то путем введения нового параметра поврежденности ω, изменяющегося в тех же пределах, что и Ω, исходные уравнения ползучести (1.1) можно привести к аналогичному виду, в котором $q = m$.

Для этого достаточно положить

$1 - \omega = (1 - \Omega)^{q+1-m}$

причем $0 \leqslant \omega \leqslant 1$ ввиду (1.3). Подставляя это равенство в (1.1) и заменяя $m/(q + 1 - m)$ на m и $(q + 1 - m)B_2$ на B_2, получим

$$\eta = B_1\sigma^n(1-\omega)^{-m}, \quad \dot{\omega} = B_2\sigma^p(1-\omega)^{-m} \tag{1.4}$$

В отличие от (1.1) система (1.4) содержит только пять неизвестных констант, которые, как легко видеть, определяются из экспериментов при постоянных напряжениях. Следовательно, упомянутого выше произвола в данном случае не будет.

Обобщим соотношения (1.4) на сложное напряженное состояние как и в [1]:

$$\eta_{kl} = B_1 s^n (1-\omega)^{-m} \quad \partial s/\partial\sigma_{kl}, \quad \dot{\omega} = B_2 s^p (1-\omega)^{-m} \tag{1.5}$$

где $s = s(\sigma_{kl})$, $s > 0$ – инвариант, играющий роль эквивалентного напряжения и являющийся выпуклой однородной первой степени функцией компонент напряжений σ_{kl}, совпадающей при одноосном растяжении с σ; η_{kl} – компоненты скоростей деформаций ползучести. В (1.5) и ниже $k, l = 1, 2, 3$.

Зависимости (1.5) можно обратить, т.е. выразить σ_{kl} и $\dot{\omega}$ через η_{kl} и ω [2]:

$$\sigma_{kl} = s\partial H/\partial\eta_{kl}, \quad \dot{\omega} = \phi(1-\omega)^{\beta} \tag{1.6}$$

$$s = [B_1^{-1}H(1-\omega)^m]^{1/n}, \quad \phi = B_0 H^{\alpha}, \quad B_0 = B_2 B_1^{-\alpha}, \quad \alpha = p/n, \ \beta = m(\alpha - 1)$$

где $H = H(\eta_{kl})$, $H > 0$ – однородная первой степени выпуклая функция, такая, что $Hs = W$, где $W = \eta_{kl}\sigma_{kl}$ – мощность удельной рассеянной при ползучести энергии.

Утверждение о выпуклости функции $H = H(\eta_{kl})$ следует из того, что $s = s(\sigma_{kl})$ – выпуклая. Действительно, зафиксируем некоторое значение $\omega \geqslant 0$. Тогда $\eta_{kl} = \eta_{kl}(\sigma_{mn})$ и $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}(\eta_{mn})$. Из (1.6) и равенства [1] $\eta_{kl} = H\partial s/\partial\sigma_{kl}$ получим для приращений напряжений и скоростей деформаций:

$$\delta\sigma_{kl} = \delta s\partial H/\partial\eta_{kl} + s\partial^2 H/(\partial\eta_{kl}\partial\eta_{mn})\delta\eta_{mn}$$

$$\delta\eta_{kl} = \delta H\partial s/\partial\sigma_{kl} + H\partial^2 s/(\partial\sigma_{kl}\partial\sigma_{mn})\delta\sigma_{mn}$$

Умножая первое из этих равенств на $\delta\eta_{kl}$, а второе – на $\delta\sigma_{kl}$ и суммируя по k и l, получим

$$\delta\sigma_{kl}\delta\eta_{kl} = \delta s\delta H + s\delta^2 H = \delta H\delta s + H\delta^2 s$$

Отсюда $\delta^2 H = Hs^{-1}\delta^2 s \geqslant 0$, так как $\delta^2 s \geqslant 0$.

2. Сформулируем задачу оптимального деформирования: среди всех возможных путей деформирования элемента среды, приводящих к заданным деформациям ползучести ε^c_{kl**}, необходимо выбрать такой, при котором накапливается наименьшая поврежденность ω. При этом продолжительность t_0 процесса и допустимые напряжения ограничены, т.е. $0 < t_0 \leqslant t_{**}$, $s(t) \leqslant s_{**}$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ (t_{**} и s_{**} – заданные величины). Считаем, что эти ограничения совместны, т.е. такие пути существуют. Напряженно-деформированное состояние элемента среды при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ предполагается однородным; $\omega = 0$ и $\varepsilon^c_{kl} = 0$ при $t = 0$. (В аналогичной задаче в [1] время деформирования фиксировалось, т.е. $t_0 = t_{**}$, и рассматривался только случай $\alpha > 1$, т.е. $p > n$, что, как видно из (1.2), соответствует классу материалов, у которых при одноосной ползучести деформация ε_* в момент разрушения уменьшается с ростом напряжения).

В зависимости от величины α, определенной в (1.6), будем различать далее 3 случая.

1. $\alpha > 1$, т.е. $p > n$, и, как следует из (1.6), $\beta > 0$. Покажем, что оптимальным является путь с постоянными скоростями деформаций во всем возможном временном интервале $[0, t_{**}]$, т.е. при $t_0 = t_{**}$ и $\eta_{kl} = \varepsilon^c_{kl**} / t_{**}$.

Для доказательства заметим, что при $\alpha > 1$ функция $\phi = B_0 H^\alpha$ из (1.6) является выпуклой, поэтому [1]:

$$\phi - \phi_0 \geqslant \frac{\partial\phi}{\partial\eta_{kl}}\Big|_{\eta_{kl}=\eta_{kl0}}(\eta_{kl} - \eta_{kl0}) = \phi_0' \frac{\partial H}{\partial\eta_{kl}}\Big|_{\eta_{kl}=\eta_{kl0}}(\eta_{kl} - \eta_{kl0}) \tag{2.1}$$

$$\phi - \phi' H < 0$$

Из (1.6) следует, что

$$1 - \omega(t) = \varphi\left(\int_0^t \phi dt\right), \quad \varphi(x) = [1 - (1-\beta)x]^{1/(1-\beta)} > 0 \tag{2.2}$$

причем, поскольку $\varphi''(x) > 0$ (так как $\beta > 0$), имеет место неравенство

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \geqslant \varphi'(x_1)(x_2 - x_1), \quad \varphi'(x) = -[\varphi(x)]^\beta \tag{2.3}$$

Здесь и далее в этом пункте индексом "0" снабдим величины, относящиеся к оптимальному пути, в данном случае к пути с постоянными скоростями деформаций в интервале $[0, t_{**}]$, а индексом "1" – к любому другому пути в интервале $[0, t_1]$, $t_1 \leqslant t_{**}$. Тогда для величин поврежденностей ω_{00} и ω_{11}, накопленных к моментам $t = t_{**}$ и $t = t_1$ соответственно, из (2.1)–(2.3) найдем

$$\omega_{11} - \omega_{00} = \varphi\left(\int_0^{t_{**}} \phi_0 dt\right) - \varphi\left(\int_0^{t_1} \phi_1 dt\right) \geqslant a\left(\int_0^{t_1} \phi_1 dt - \int_0^{t_{**}} \phi_0 dt\right) \geqslant \tag{2.4}$$

$$\geqslant a\left\{\int_0^{t_1} [\phi_0 + \chi_{kl0}(\eta_{kl1} - \eta_{kl0})]dt - \int_0^{t_{**}} \phi_0 dt\right\} = a(\phi_0 - \chi_{kl0}\eta_{kl0})(t_1 - t_{**}) =$$

$$= a(\phi_0 - \phi_0' H_0)(t_1 - t_{**}) \geqslant 0$$

$$a = \left[\varphi\left(\int_0^{t_1} \phi_1 dt\right)\right]^\beta, \quad \chi_{kl0} = \phi_0' \frac{\partial H}{\partial\eta_{kl}}\Big|_{\eta_{kl}=\eta_{kl0}}$$

где использовались равенства $\int \eta_{kl1} dt = \varepsilon^c_{kl**} = \eta_{kl0} t_{**}$, $\eta_{kl}\partial H / \partial\eta_{kl} = H$, последнее из которых является следствием однородности функции $H = H(\eta_{kl})$.

Полученный результат совпадает с аналогичным из [1], где в отличие от рассмотренной выше задачи время деформирования t_{**} задавалось изначально и не могло варьироваться.

Указанный оптимальный путь существует, если ограничения по напряжениям и продолжительности процесса совместны, что в данном случае, как следует из (1.6), эквивалентно выполнению неравенства $H_{**} \leqslant B_1 s^n_{**} t_{**}$, $H_{**} = H(\varepsilon^c_{kl**})$.

2. $\alpha = 1$, т.е. $p = n$. В этом случае, как видно из (1.6), $\omega = B_0 H$, поэтому оптимальным будет любое простое деформирование, когда $\varepsilon^c_{kl} = \varepsilon^c_{kl**} f(t)$ ($f(0) = 0$, $\dot f(t) \geqslant 0$), в любом временном интервале $[0, t_0]$, $t_0 \leqslant t_{**}$, при условии выполнения ограничения $s(t) \leqslant s_{**}$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

Действительно, ввиду однородности функции H и ее выпуклости, что вследствие (2.1) приводит к неравенству

$$H_1 \geqslant \frac{\partial H}{\partial \eta_{kl}} \mid \eta_{kl} = \eta_{kl0}\eta_{kl1}$$

будем иметь

$$\omega_{11} - \omega_{00} = B_0\left(\int_0^{t_1} H_1 dt - \int_0^{t_0} H_0 dt\right) \geqslant \int_0^{t_1} \chi_{kl0}\eta_{kl1} dt - \int_0^{t_0} \chi_{kl0}\eta_{kl0} dt = \chi_{kl0}(\varepsilon^c_{kl**} - \varepsilon^c_{kl**}) = 0 \quad (2.5)$$

где учтено, что χ_{kl0} из (2.4) – однородные нулевой степени функции, поэтому при $\eta_{kl0} = \varepsilon^c_{kl**}\dot{f}(t)$ они не зависят от времени.

3. $\alpha < 1$, т.е. $p < n$, что соответствует хрупким материалам [2], у которых, как следует из (1.2), деформация ε_* возрастает с ростом напряжения σ. Покажем, что оптимальным является путь, при котором напряжения постоянны в интервале $[0, t_0]$, причем величина s достигает максимально возможного значения, т.е. $s_0 = s_{**}$. Легко видеть, что и в этом случае будет иметь место простое деформирование, поэтому из (1.6) находятся компоненты напряжений $\sigma_{kl0} = s_{**}\partial H_{**} / \partial\varepsilon^c_{kl**}$, $H_{**} = H(\varepsilon^c_{kl**})$. Интегрируя второе уравнение (1.5) при $s = s_{**}$, определим $\omega = \omega(t)$, после чего из третьего соотношения (1.6) выразим $H = H(t)$ и, подставив затем в равенство $H_{**} = \int H dt$ $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$ найдем время деформирования

$$t_0 = \frac{1 - (1 - B_1^{-1} B_2 s_{**}^{p-n} H_{**})^{m+1}}{(m+1) B_2 s_{**}^p} \quad (2.6)$$

Для доказательства сформулированного утверждения с учетом (1.5), (1.6) и неравенства $s_{**}^{n-p} \geqslant s_1^{n-p}$ будем иметь

$$B_1 B_2^{-1} s_{**}^{n-p}(\omega_{11} - \omega_{00}) = B_1 B_2^{-1} s_{**}^{n-p}\left[\int_0^{t_1} B_2 s_1^p (1-\omega_1)^{-m} dt - \int_0^{t_0} B_2 s_{**}^p (1-\omega_0)\right] dt \geqslant \quad (2.7)$$

$$\geqslant \int_0^{t} H_1 dt - \int_0^{t_0} H_0 dt \geqslant 0$$

где использовалось вытекающее из (1.6) равенство $H = B_1 s^n (1 - \omega)^{-m}$. Последнее неравенство в (2.7) следует из (2.5).

Указанный путь существует, если выполняется неравенство $t_0 \leqslant t_{**}$, где величина t_0 определена в (2.6).

3. Укажем теперь для всех рассмотренных выше ситуаций наиболее неблагоприятные среди всех простых пути деформирования (т.е. когда компоненты деформаций изменяются пропорционально функции времени $f = f(t), f(0) = 0, \dot{f}(t) \geqslant 0$), приводящие при принятых ограничениях $(0 < t_0 \leqslant t_{**}, s \leqslant s_{**})$ к наибольшей поврежденности в конце процесса деформирования. Как будет показано ниже, такой путь для $\alpha > 1$ $(\alpha < 1)$ совпадает с указанным выше оптимальным путем для $\alpha < 1$ $(\alpha > 1)$.

В этом пункте индекс "0" будет относиться к величинам, соответствующим наиболее неблагоприятным путям.

1. $\alpha > 1$, т.е. $p > n$. В этом случае искомым является путь с постоянными напряжениями σ_{kl0}, причем $s_0 = s_{**}$, в интервале $[0, t_0]$, где t_0 определено в (2.6). Действительно, учитывая, что $s_{**}^{n-p} \leqslant s_1^{n-p}$ и деформирование является простым, по аналогии с (2.7) будем иметь

$$B_1 B_2^{-1} s_{**}^{n-p}(\omega_{11} - \omega_{00}) \leqslant \int_0^{t_1} H_1 dt - \int_0^{t_0} H_0 dt = H_{**}\left(\int_0^{t_1} \dot{f}_1 dt - \int_0^{t_0} \dot{f}_0 dt\right) = 0$$

поскольку

$$H(\varepsilon^c_{kl**}\dot{f}_i)=\dot{f}_i H_{**};\quad \int\limits_0^{t_i}\dot{f}_i dt=1\quad (i=0,1)$$

2. $\alpha=1$, т.е. $p=n$. В этом случае, как показано в п. 2, все простые пути приводят к одной и той же поврежденности в конце процесса деформирования.

3. $\alpha<1$, т.е. $p<n$, следовательно, $\beta<0$. В этом случае наиболее неблагоприятный – путь с постоянными скоростями деформаций в интервале $[0,\ t_{**}]$. Действительно, учитывая, что при $\alpha<1$ будем иметь $\phi-\phi'H>0$, $\phi_1\leqslant\phi_0+\phi_0'(H_1-H_0)$, поскольку $\phi''<0$, и неравенство (2.3) меняет знак на противоположный, по аналогии с (2.4) получим

$$\omega_{11}-\omega_{00}\leqslant a\left(\int\limits_0^{t_1}\phi_1 dt-\int\limits_0^{t_{**}}\phi_0 dt\right)\leqslant a\left\{\int\limits_0^{t_1}[\phi_0+\phi_0'(H_1-H_0)]dt-\int\limits_0^{t_{**}}\phi_0 dt\right\}=$$

$$=a(\phi_0-\phi_0'H_0)(t_1-t_{**})\leqslant 0$$

ввиду того, что (константа a определена в (2.4)):

$$\int\limits_0^{t_1}H_1 dt=H_{**}=H_0 t_{**},\quad t_1\leqslant t_{**}$$

Найденные наиболее и наименее благоприятные (в указанном выше смысле) пути позволяют получить нижнюю и верхнюю оценки поврежденности материала по известным остаточным деформациям (если последние можно отождествить с деформациями ползучести), возможному временному интервалу $[0,\ t_{**}]$, в течение которого материал мог подвергаться внешним воздействиям, и максимально возможному значению s_{**} величины s (например, $s_{**}=\sigma_T$, где σ_T – предел текучести, если известно, что пластические деформации отсутствовали). Конечно, получение верхних оценок возможно при условии, что при $0<t\leqslant t_{**}$ деформирование хотя бы в первом приближении можно считать простым. Такая ситуация имеет место для многих тонкостенных элементов конструкций, работающих в условиях повышенных температур, когда проявляются свойства ползучести, поскольку зачастую внешние нагрузки являются постоянными во времени, что приводит к монотонному изменению прогибов. Тогда, например, для пластины, подвергавшейся неизвестным по величине внешним воздействиям указанного вида, по остаточным прогибам (малым в сравнении с ее толщиной) можно определить все компоненты деформаций [1] и, следовательно, оценить остаточный прочностной ресурс.

Другим примером может служить оценка поврежденности на контуре L отверстия (концентратора) произвольной формы в пластине, если при $0\leqslant t\leqslant t_{**}$ оно было свободно от внешних нагрузок (т.е. последние были приложены вне L) и если на L известны компоненты вектора остаточных перемещений в плоскости пластины. По этим данным можно определить на L остаточные тангенциальные деформации [3], при этом отличной от нуля компонентой напряжений при $0\leqslant t\leqslant t_{**}$ будет только тангенциальная. Следовательно, в каждой точке L имело место одноосное напряженное состояние, причем значения ε^c_{**} известны, что и позволяет получить упомянутые оценки.

4. В этом разделе рассмотрим задачу оптимального разрушения материала, которую можно сформулировать следующим образом: требуется указать такой путь деформирования (или нагружения), чтобы за время $t_0\leqslant t_{**}$ разрушить элемент среды, т.е. чтобы выполнялось равенство $\omega(t_0)=1$, при наименьших затратах энергии и при ограничении на величину s: $s(t)\leqslant s_{**}(0\leqslant t\leqslant t_0)$.

Выпишем некоторые необходимые соотношения. Удельная рассеянная энергия $A(t) = \int W dt$, где $W = \eta_{kl}\sigma_{kl}$, причем вследствие (1.5):

$$W = B_1 s^{n+1}(1-\omega)^{-m} \tag{4.1}$$

Отсюда и из второго уравнения (1.5) получим

$$\dot{\omega} = B_2 B_1^{-\gamma} W^{\gamma}(1-\omega)^{m(\gamma-1)}, \quad \gamma = p/(n+1) \tag{4.2}$$

Из (4.2) видно, что при деформировании с постоянной мощностью рассеяния W время t_* до разрушения будет конечным (следовательно, конечной будет и затраченная энергия) только при условии

$$\varkappa \equiv m(1-\gamma) + 1 > 0 \tag{4.3}$$

Тогда из (4.2) следует, что для любого нагружения имеет место равенство

$$B_2 B_1^{-\gamma} \varkappa \int_0^{t_*} W^{\gamma} dt = 1 \tag{4.4}$$

Как и прежде, индекс "0" будет относиться к оптимальному пути, индекс "1" – к любому другому; t_{00}, t_{11} и A_{00}, A_{11} – моменты разрушения и соответствующие им энергии для указанных путей.

В зависимости от величины γ из (4.2) будем различать 3 случая.

1. $\gamma \geqslant 1$, т.е. $p > n + 1$. Покажем, что оптимальным будет являться деформирование, при котором $s_0 = s_{**}$; при этом время t_{00} до разрушения определяется из (1.6): $t_{00}^{-1} = B_2(m+1)s_{**}^{p}$. Предполагаем, что такой путь существует, т.е. $t_{00} \leqslant t_{**}$.

Действительно, поскольку $s_{**}^{n-p+1} \leqslant s_1^{n-p+1}$, из (1.5) и (4.1) получим

$$0 = B_1 B_2^{-1} s_{**}^{n-p+1}\left(\int_0^{t_{11}} \dot{\omega}_1 dt - \int_0^{t_{00}} \dot{\omega}_0 dt\right) \leqslant \int_0^{t_{11}} W_1 dt - \int_0^{t_{00}} W_0 dt = A_1 - A_0$$

2. $\gamma = 1$, т.е. $p = n + 1$, когда согласно (4.2) $\dot{\omega} = B_2 B_1^{-1} W$. Это соответствует уже упоминавшемуся энергетическому варианту теории ползучести и длительной прочности, когда затраченная на разрушение энергия A_* не зависит от пути деформирования и является характеристикой материала $A_* = B_1 B_2^{-1}$.

3. $\gamma < 1$, т.е. $p < n + 1$. В этом случае выполняется условие (4.3) и оптимальным будет деформирование с постоянной мощностью диссипации W_0 в течение максимально возможного времени, т.е. $t_{00} = t_{**}$. Величина W_0 определяется из (4.2): $W_0 = B_1(B_2 \varkappa t_{**})^{-1/\gamma}$. Для того, чтобы выполнялось ограничение по напряжениям, достаточно, как видно из (4.1), чтобы $W_0 \leqslant B_1 s_{**}^{n+1}$.

Для доказательства сформулированного утверждения из (4.4) с использованием неравенства $W_1^{\gamma} \leqslant W_0^{\gamma} + \gamma W_0^{\gamma-1}(W_1 - W_0)$ получим

$$0 = \int_0^{t_{11}} W_1^{\gamma} dt - \int_0^{t_{**}} W_0^{\gamma} dt \leqslant \int_0^{t_{11}} \gamma W_0^{\gamma-1}(W_1 - W_0) dt - \int_{t_{11}}^{t_{**}} W_0^{\gamma} dt \leqslant$$

$$\leqslant \gamma W_0^{\gamma-1}\left(\int_0^{t_{11}} W_1 dt - \int_0^{t_{**}} W_0 dt\right) = \gamma W_0^{\gamma-1}(A_{11} - A_{00}) \quad (t_{11} \leqslant t_{**} \text{ и } W_0^{\gamma} > \gamma W_0^{\gamma})$$

Рассмотренную задачу можно несколько видоизменить, используя вместо энергетического критерия оптимального разрушения аналогичный деформационный: при указанных ограничениях требуется указать такой путь деформирования, при котором величина $Q = \int H dt$ (совпадающая при одноосном растяжении с деформацией) в момент разрушения будет наименьшей.

Эта задача совершенно аналогична предыдущей: вместо (4.2) надо взять второе уравнение (1.6), из которого вместо (4.4) будем иметь равенство

$$B_0(1-\beta)\int_0^{t_*} H^\alpha dt = 1$$

При этом условие конечности времени t_* до разрушения при $H = \text{const}$, аналогичное (4.3), имеет вид $\beta < 1$ (величина β определена в (1.6)).

Тогда повторяя рассуждения, приведенные в этом разделе выше, и заменяя W на H и γ на α, убеждаемся в том, что оптимальные для разрушения пути совпадают с наиболее неблагоприятными путями, рассмотренными в п. 3, т.е. при $\alpha > 1$ $s_0 = s_{**}$; при $\alpha = 1$ все пути приводят к одной и той же величине Q в момент разрушения; при $\alpha < 1$ $H_0 = \text{const}$ при $0 \leqslant t \leqslant t_{**}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-01645).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цвелодуб И.Ю.* Об оптимальных путях деформирования в условиях ползучести. Некоторые приложения к задачам обработки материалов давлением // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 128–136.
2. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. *Шваб А.А.* Неклассическая упругопластическая задача // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 1. С. 140–146.

Новосибирск

Поступила в редакцию 13.02.1998