МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1998

УДК 539.214;539.374

© 1998 г. В. Д. КЛЮШНИКОВ

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТИПА ШЕЙКИ ПРИ БИЛИНЕЙНОЙ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ

Исследуется неустойчивость типа шейки для разномодульного материала [1] с диаграммой растяжения–сжатия в виде двузвенной ломаной с точкой излома в начале координат. Использовано три подхода к задаче устойчивости массивных тел – классический [2, 3], Лейбензона–Ишлинского [4, 5] и неклассический [6]. Главная задача исследования – выявление возможности в рамках указанных подходов описания эффекта неустойчивости типа шейки.

1. Рассматривается упругий материал с потенциалом

$$W = \frac{1}{2}(a\theta^2 + 2b\Delta^2 - 2c\theta\Delta) \tag{1.1}$$

$$\theta = \varepsilon_{mn}\delta_{mn}, \quad \Delta^2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad \theta/\Delta = \gamma, \quad \varepsilon_{ij}/\Delta = \gamma_{ij} \quad (a, b, c - \text{const}) \tag{1.2}$$

и, следовательно, с определяющим соотношением

$$\sigma_{ij} = \partial W/\partial\varepsilon_{ij} = (a\theta - c\Delta)\delta_{ij} + (2b - c\gamma)\varepsilon_{ij} \tag{1.3}$$

При растяжении (индекс +) и сжатии (индекс –), когда ненулевыми параметрами напряжения и деформациями являются σ_{11}, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}$, $\theta = (1 - 2\nu)\varepsilon_{11}$, $\Delta = |\varepsilon_{11}|\sqrt{1+2\nu^2}$ из (1.3) следует

$$\begin{gathered} \sigma_{11} = [a(1-2\nu) - c\tilde{\varepsilon}\sqrt{1+2\nu^2} + 2b - c\tilde{\varepsilon}(1-2\nu)/\sqrt{1+2\nu^2}]\varepsilon_{11} = E_\pm\varepsilon_{11} \\ \sigma_{22} = [a(1-2\nu) - c\tilde{\varepsilon}\sqrt{1+2\nu^2} - 2b\nu + c\tilde{\varepsilon}\nu(1-2\nu)/\sqrt{1+2\nu^2}] = 0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

где $\tilde{\varepsilon}$ – знак параметра ε_{11}. Из первого соотношения следует, что задание (1.1) обеспечивает указанную выше билинейность и определяет модуль растяжения E_+ (при $\tilde{\varepsilon} = 1$, $\nu = \nu_+$) и сжатия E_- (при $\tilde{\varepsilon} = -1$, $\nu = \nu_-$). Второе соотношение из (1.4) дает два уравнения для параметров ν_+ (при $\tilde{\varepsilon} = 1$) и ν_- (при $\tilde{\varepsilon} = -1$).

В последующем, наряду с соотношениями (1.3) потребуется их представление в приращениях или скоростях

$$d\sigma_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{mn}}d\varepsilon_{mn} = E^*_{ijmn}d\varepsilon_{mn} \tag{1.5}$$

После несложных преобразований получим

$$E^*_{ijmn} = a\delta_{ij}\delta_{mn} + 2b\delta_{im}\delta_{jn} - \frac{c}{\Delta}[\varepsilon_{mn}\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}\delta_{mn} + \theta(\delta_{im}\delta_{jn} - \gamma_{mn}\gamma_{ij})]$$
$$\gamma_{mn} = \varepsilon_{mn}/\Delta \qquad (1.6)$$

В дальнейшем задача о шейке будет рассматриваться в рамках плоской деформации, при малых докритических деформациях, когда

$$\varepsilon_{33} = \dot{\varepsilon}_{33} = \varepsilon_{13} = \dot{\varepsilon}_{13} = 0, \quad \varepsilon_{23} = \dot{\varepsilon}_{23} \qquad (1.7)$$

Здесь и в дальнейшем $d\varepsilon_{ij}$ и $d\sigma_{ij}$ будут заменены на $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и $\dot{\sigma}_{ij}$ – скорости деформаций и напряжений. Если ещё учесть, что в докритическом состоянии $\gamma_{12} = 0$, то связь в скоростях напряжений и деформаций будет

$$\dot{\sigma}_{11} = A\dot{\varepsilon}_{11} + C\dot{\varepsilon}_{22}, \quad \dot{\sigma}_{22} = C\dot{\varepsilon}_{11} + B\dot{\varepsilon}_{22}, \quad \sigma_{12} = 2D\dot{\varepsilon}_{12} \qquad (1.8)$$

$$A = a + 2b - c[2\gamma_{11} + \gamma(1 - \gamma_{11}^2)], \quad B = a + 2b - c[2\gamma_{22} + \gamma(1 - \gamma_{22}^2)]$$

$$C = a - c\gamma(1 - \gamma_{11}\gamma_{22}), \quad D = b - c/2\gamma, \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \qquad (1.9)$$

где v_i – компоненты скорости перемещения.

2. Рассмотрим задачу о шейке в постановке Лейбензона–Ишлинского [4, 5]. В этом подходе используются обычные линейные уравнения равновесия в скоростях (приращениях), а отличие составляют краевые условия. В общем виде [6] уравнения в объеме тела V и краевые условия на поверхности тела Σ представляются в виде

$$\dot{\sigma}_{ij} = 0\ (V), \quad \dot{\sigma}_{ij}n_j^0 = \begin{cases} \sigma_{ki}^0 v_{j,k} n_j^0 \\ (\sigma_{ki}^0 v_{j,k} - \sigma_{ki}^0 v_{k,i})n_j^0 \end{cases} \quad (\Sigma) \qquad (2.1)$$

Здесь и далее индекс ноль означает принадлежность параметра к докритическому состоянию, n_j – компонента единичной нормали к поверхности Σ, причем верхняя строчка отвечает мертвой нагрузке, а нижняя – следящей.

В силу (1.8) уравнения равновесия в скоростях будут

$$\begin{aligned} &Av_{1.11} + Dv_{1.22} + (C + D)v_{2.12} = 0 \\ &Bv_{2.22} + Dv_{2.11} + (C + D)v_{1.12} = 0 \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Дифференцируя первое из (2.2) дважды по x_1, дважды по x_2, а второе уравнение по x_1 и x_2 получаем

$$\begin{aligned} &-(C + D)v_{2.1211} = Av_{1.1111} + Dv_{1.2211} \\ &-(C + D)v_{2.1222} = Av_{1.1122} + Dv_{1.2222} \\ &Bv_{2.2212} + Dv_{2.1112} + (D + C)v_{1.1212} = 0 \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Внося первые два соотношения из (2.3), разрешенные относительно производных v_2 в третье и вводя обозначения

$$A/B = n, \quad (AB - 2CD - C^2)/(DB) = 2m \qquad (2.4)$$

получаем

$$v_{1.2222} + 2mv_{1.1122} + nv_{1.1111} = 0 \qquad (2.5)$$

Аналогичным образом получается совпадающее с (2.5) уравнение для v_2. Решение ищем в виде

$$v_1 = \phi_1(\lambda x_2)\sin\lambda x_1, \quad v_2 = \phi_2(\lambda x_2)\cos\lambda x_1 \qquad (2.6)$$

и, обозначая штрихом производную по аргументу λx_2, получаем из (2.5) уравнение для ϕ_i и соответствующее характеристическое уравнение

$$\phi_i^{IV} - 2m\phi_i'' + n\phi_i = 0, \quad s^4 - 2ms^2 + n = 0 \tag{2.7}$$

Откуда для корней характеристического уравнения получим

$$S_{1,2} = \alpha_\pm = \pm(m + \sqrt{m^2 - n})^{\frac{1}{2}}, \quad S_{3,4} = \beta_\pm = \pm(m - \sqrt{m^2 - n})^{\frac{1}{2}} \tag{2.8}$$

Решение для шейки должно состоять из четного ϕ_1 и нечетного ϕ_2, т.е.

$$\phi_1(\lambda x_2) = C_1 \operatorname{ch}\alpha\lambda x_2 + D_1 \operatorname{ch}\beta\lambda x_2, \quad \phi_2(\lambda x_2) = C_2 \operatorname{sh}\alpha\lambda x_2 + D_2 \operatorname{sh}\beta\lambda x_2 \tag{2.9}$$

Краевые условия при $x_2 = \pm h$, где h – половина толщины образца в виде полосы, на основании (2.1) при $n_1^\circ = 0$ и $\sigma_{ij}^\circ = 0$, кроме σ_{11}° для мертвой и следящей нагрузки совпадают и представляются в виде

$$\dot\sigma_{22} = 0, \quad \dot\sigma_{12} = \sigma_{11}^\circ v_{2.1} \tag{2.10}$$

В продифференцированном по x_1 виде эти условия с помощью (2.3) представляются следующим образом:

$$\phi_1'' + p\phi_1 = 0, \quad \phi_2'' + q\phi_2 = 0 \tag{2.11}$$

$$p = [C(D + C) - AB]/BD, \quad q = [(C + D)(D - \sigma_{11}^\circ) - D^2]/BD \tag{2.12}$$

С учетом (2.9) краевые условия (2.11) примут вид

$$\begin{aligned} &C_1(\alpha^2 + p)\operatorname{ch}\alpha\lambda h + D_1(\beta^2 + p)\operatorname{ch}\beta\lambda h = 0 \\ &C_2(\alpha^2 + q)\operatorname{sh}\alpha\lambda h + D_2(\beta^2 + q)\operatorname{sh}\beta\lambda h = 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Недостающие условия вытекают из (2.3):

$$A\phi_1 - D\phi_1'' + (C + D)\phi_2' = 0, \quad (C + D)\phi_1'' + B\phi_2'' - D\phi_2 = 0$$

или с учетом (2.6):

$$\begin{aligned} &[(A - D\alpha^2)C_1 + \alpha(C + D)C_2]\operatorname{ch}\alpha\lambda x_2 + [(A - D\beta^3)D_1 + \beta(C + D)D_2]\operatorname{ch}\beta\lambda x_2 \\ &[(C + D)\alpha C_1 + (B\alpha^2 - D)C_2]\operatorname{sh}\alpha\lambda x_2 + [(C + D)\beta D_1 + (B\beta^2 - D)D_2]\operatorname{sh}\beta\lambda x_2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

В силу тождественного удовлетворения этих уравнений по x_2 квадратные скобки должны быть равны нулю. В получающихся четырех уравнениях независимыми оказываются только два. Действительно, определитель из 1 и 3 скобок в силу (2.4) будет

$$\begin{bmatrix} A - D\alpha^2 & (C - D)\alpha \\ (C + D)\alpha & B\alpha^2 - D \end{bmatrix} = -(\alpha^4 - 2m\alpha^2 + \alpha^4)BD = 0 \tag{2.15}$$

Аналогично доказывается зависимость второй и четвертой скобок. Таким образом из (2.14) следуют два независимых уравнения, приводящих к соотношениям

$$C_2 = -\frac{A - D\alpha^2}{\alpha(D + C)}C_1, \quad D_2 = -\frac{A - D\beta^2}{\beta(D + C)}D_1$$

Внося их в (2.13), получим два однородных уравнения для постоянных C_1, D_1 с определителем

$$(A - D\alpha^2)(\alpha^2 + q)(\beta^2 + p)\beta \operatorname{sh}\alpha\lambda h \operatorname{ch}\lambda\beta h - \\ - (A - D\beta^2)(\beta^2 + q)(\alpha^2 + p)\alpha \operatorname{sh}\beta\lambda h \operatorname{ch}\lambda\alpha h \tag{2.16}$$

Для существования решения для C_1, D_1 данный определитель должен быть равен нулю. Разрешая получающиеся уравнения относительно параметра q, получим

$$q = \alpha\beta \frac{\beta(A - D\beta^2)(\alpha^2 + p)\operatorname{sh}\beta\lambda h \operatorname{ch}\alpha\lambda h - \alpha(A - D\alpha^2)(\beta^2 + p)\operatorname{sh}\alpha\lambda h \operatorname{ch}\beta\lambda h}{\alpha(A - D\beta^2)(\alpha^2 + p)\operatorname{sh}\beta\lambda h \operatorname{ch}\alpha\lambda h - \beta(A - D\alpha^2)(\beta^2 + p)\operatorname{sh}\alpha\lambda h \operatorname{ch}\beta\lambda h} \tag{2.17}$$

Параметр λ находится из требования

$$\int_{-h}^{h} \dot\sigma_{11} dx_2 |_{\pm} l = 0$$

где l – полудлина полосы. На основании (1.8), (2.6) это условие будет удовлетворено, если $\cos\lambda l = 0$ или $\lambda l = \pi/2$. Таким образом параметр $k = \alpha\lambda h$ в формулах (2.16), (2.17) будет равен

$$k = \alpha/2(h/l) \tag{2.18}$$

и будет включать малый параметр. Если положить $h/\alpha \ll 1$, то $\operatorname{sh}k \cong k$, $\operatorname{ch}k \cong 1$, тогда формула (2.17) примет вид

$$q = -\frac{\alpha^2(A - D\alpha^2)(\beta^2 + p) - \beta^2(A - D\beta^2)(\alpha^2 + p)}{(A - D\alpha^2)(\beta^2 + p) - (A - D\beta^2)(\alpha^2 + p)} \tag{2.19}$$

Используя свойства корней α и β (2.4), (2.8) формулы (2.12) и равенства

$$2mD - A = -C(2D + C)/B, \quad A + Dp = C(C + D)/B \tag{2.20}$$

нетрудно привести формулу (2.19) к виду

$$q = \frac{-BDn + C(C + 2D)p}{C(C + D)} \tag{2.21}$$

которая совместно с (2.12) дает критическое значение напряжения

$$\sigma_{11}^{\circ} = (AB - C^2)/C \tag{2.22}$$

Выражение $AB - C^2$ – определитель соотношения (1.9), который в силу однозначной разрешимости этих соотношений относительно $\dot\varepsilon_{ij}$ должен быть положительным. Следовательно, критическое значение (2.22) положительно и относится к неустойчивости типа шейки.

3. Рассмотрим классический вариант. В этом случае уравнения в скоростях имеют вид [2, 3]:

$$(\dot\sigma_{ij} + \sigma_{jk}^{\circ} v_{i,k})_{,j} = 0 \ (V), \quad \dot\sigma_{ij} n_j^{\circ} = \begin{cases} \sigma_{jk}^{\circ} v_{i,k} n_j^{\circ} & (\Sigma) \\ 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

В рассматриваемой задаче краевые условия на (Σ), как легко видеть, и для мертвых и для следующих нагрузок совпадают и вырождаются в условия $\dot\sigma_{12} = 0$, $\dot\sigma_{22} = 0$.

Внешняя нагрузка входит только в уравнения равновесия и на основе (1.8), (1.9) имеют вид

$$A^*v_{1.11}+Dv_{1.22}+(C+D)v_{2.12} = 0, \quad A^* = A+\sigma_{11}^{\circ}$$
$$Bv_{2.22}+D^*v_{2.11}+(C+D)v_{1.12} = 0, \quad D^* = D+\sigma_{11}^{\circ} \tag{3.2}$$

из которых, аналогично (2.5) следуют для v_1, v_2 одинаковые уравнения

$$n^*v_{1.1111}+2m^*v_{1.1122}+v_{1.2222} = 0 \tag{3.3}$$

$$n^* = A^*D^*/BD, \quad 2m^* = [A^*B-2DC-C^2-D(D-D^*)]/(BD) \tag{3.4}$$

Указанные выше краевые условия, продифференцированные по x_1 и выраженные через v_k, будут

$$Bv_{2.21}+Cv_{1.11}=0, \quad v_{1.21}+v_{2.11}=0 \tag{3.5}$$

Из первых и вторых соотношений в (3.2) и (3.5) найдем

$$v_{1.22}-p^*v_{1.11}=0, \quad v_{2.22}-q^*v_{2.11}=0 \tag{3.6}$$

$$p^*=[C(C+D)-A^*B]/(BD), \quad q^*=[(C+D)D-D^*D]/(BD) \tag{3.7}$$

Решение будем искать в виде

$$v_1 = \psi_1(\lambda x_2)\sin\lambda x_1, \quad v_2 = \psi_2(\lambda x_2)\cos\lambda x_1 \tag{3.8}$$

Тогда из (3.3) и (3.4) получим уравнение для ψ_i и характеристическое уравнение

$$\psi_i^{IV}-2m^*\psi_i''+\psi_i = 0, \quad s^4-2m^*s^2+n^* = 0 \tag{3.9}$$

Общее решение состоит из четного ψ_1 и нечетного ψ_2:

$$\psi_1(\lambda x_2) = C_1\operatorname{ch}\alpha\lambda x_2+D_1\operatorname{ch}\beta\lambda x_2, \quad \psi_2(\lambda x_2) = C_2\operatorname{sh}\alpha\lambda x_2+D_2\operatorname{sh}\beta\lambda x_2 \tag{3.10}$$

а краевые условия будут

$$\psi_1''+p^*\psi_1 = 0, \quad \psi_2''+q^*\psi_2 = 0 \ (\Sigma) \tag{3.11}$$

или в силу (4.8):

$$C_1(\alpha^2+p^*)\operatorname{ch}\alpha\lambda h+D_1(\beta^2+p^*)\operatorname{ch}\beta\lambda h = 0,$$
$$C_2(\alpha^2+p^*)\operatorname{sh}\alpha\lambda h+D_2(\beta^2+p^*)\operatorname{sh}\beta\lambda h = 0 \tag{3.12}$$

Компенсация краевых условий производится на основании (3.2), (3.8) и далее вполне аналогично п. 2 с заменой $A \longrightarrow A^*$, $m \longrightarrow m^*$, $n \longrightarrow n^*$, $p \longrightarrow p^*$, $q \longrightarrow q^*$. Параметр D в результирующей формуле для q^* остается неизменным. В частности, с указанной заменой остается справедливой формула (2.20):

$$q^* = \frac{-BDn^*+C(C+2D)p^*}{C(C+D)} \tag{3.13}$$

С другой стороны, из краевых условий (3.7) $q^*=(C-\sigma_{11}^{\circ})/B$, так что, приравнивая правые части этих выражений, получим

$$\sigma_{11}^{\circ} = -(AB-C^2)/B \tag{3.14}$$

Как указано в п. 2, $AB-C^2>0$, и, следовательно, формула (3.14) выдает отрицательное критическое значение σ_{11}°. Таким образом, классический подход не в состоянии описать эффект типа шейки.

4. Определенный интерес представляет подход, основанный на уравнениях [6]:

$$(\dot{\sigma}_{ij} - \sigma^{\circ}_{jk} v_{i,k})_{,j} = 0 \ (V), \quad \dot{\sigma}_{ij} n^{\circ}_j = \begin{cases} \sigma^{\circ}_{jk} v_{i,k} n^{\circ}_j \ (\Sigma) \\ 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

– один из неклассических подходов, главное отличие которого состоит в возможности замыкания некоторых задач устойчивости в напряжениях. Это свойство можно использовать и в задаче о шейке. Но в этой задаче имеется максимально простой пусть получения решения: если известно решение для классического варианта, то решение для (4.1) получается просто заменой знака напряжения σ°_{jk}, ибо при этом уравнения (4.1) переходят в уравнения (3.1).

Таким образом неклассический вариант, в противоположность классическому выявляет эффект неустойчивости типа шейки подобно подходу Лейбензона–Ишлинского, но с разными значениями критического напряжения

$$\sigma^{\circ}_{11} = (AB - C^2)/C, \quad \sigma^{\circ}_{11} = (AB - C^2)/B \tag{4.2}$$

На основании формул (1.9) и $\gamma < 0$:

$$B - C = 2b - c(2\gamma_{22} - \gamma\gamma_{22}^2 - \gamma\gamma_{11}\gamma_{22}) \tag{4.3}$$

и, следовательно, $B > C$ и минимальным будет втрое из (4.2) значение, отвечающее неклассическому подходу, которое и надо полагать в конкретный расчет.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00343).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н.* Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 29–34.
2. *Trefftz E.* Zur Theorie der Stabilität des elastishen Ileichgewichts // ZAMM. 1933. Bd. 13. H2. S. 160–165.
3. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
4. *Лейбензон Л.С.* О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Сб. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1951. Т. 1. С. 50–85.
5. *Ишлинский А.Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. мат. ж. 1954. Т. 6. № 2. С. 140–146.
6. *Клюшников В.Д.* Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во МГУ, 1986. 224 с.

Москва

Поступила в редакцию 23.XII.1997