МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1998

УДК 531.383

© 1998 г. Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ

ОБЩИЕ ОЦЕНКИ РАЗВИТИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТРЕХМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СКАЛЯРНО НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Линейная теория устойчивости стратифицированных в поле силы тяжести сред является классическим объектом изучения в механике деформируемого твердого тела, гидро- и геодинамике. Начиная с работ Г. Тейлора и С. Гольдштейна, а затем С. Чандрасехара и П. Дразина, большое внимание уделялось точному либо приближенному решению линеаризованных уравнений движения и дисперсионно-волновому анализу. Наряду с этим получили распространение интегральные (энергетические) методы, устанавливающие достаточные условия устойчивости и оценивающие сверху декремент затухания и инкремент роста возмущений. Данные результаты применительно к невязким и ньютоновским течениям собраны и обобщены в ряде монографий и обзоров [1–6]. Современное направление исследований в рамках линеаризованной модели характеризуется усложнением определяющих соотношений среды, кинематики невозмущенного процесса, геометрии области течения и других внешних параметров.

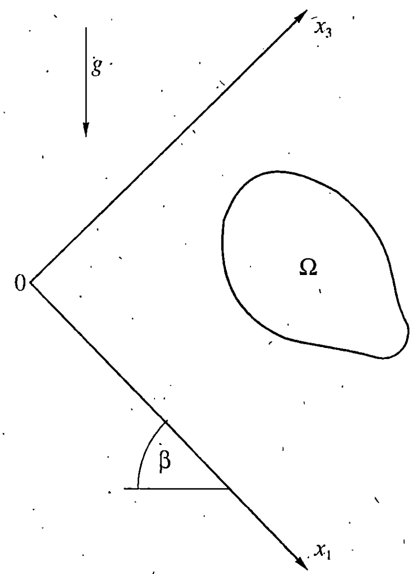
В публикуемой работе приводится довольно общая постановка задачи устойчивости относительно малых трехмерных возмущений некоторого пространственного течения неоднородной среды с векторно линейными, но скалярно нелинейными определяющими соотношениями. Исходное течение, вообще говоря, нестационарно, а неоднородность подразумевается как по плотности, так и по вязкопластическим свойствам. В общей постановке учтено наличие жестких зон, и выписаны условия на них.

В случае, когда на всей поверхности тела фиксирована кинематика, и жесткие зоны отсутствуют (приближение "жесткой стенки"), использован и развит аппарат метода интегральных соотношений для получения достаточных оценок затухания и роста возмущений. В эти оценки входят физико-механические, реологические и геометрические параметры основного течения.

1. Начально-краевая задача деформирования. Рассмотрим несжимаемое течение, реализуемое в теле Ω в поле силы тяжести $\mathbf{g} = g\mathbf{l}$, $\mathbf{l} = \{\sin\beta;\, 0;\, -\cos\beta\}$ (фигура). Плотность материала $\rho(\mathbf{x}, t)$ является функцией эйлеровых координат и времени (но постоянна для каждой лагранжевой частицы). Определяющие соотношения, связывающие девиатор s_{ij} тензора напряжений σ_{ij} с девиатором $\tilde{v}_{ij}$ тензора скоростей деформаций v_{ij} ($v_{ij} = \tilde{v}_{ij}$), примем тензорно (векторно) линейными [7]:

$$s_{ij} = \frac{2T(U)}{U} v_{ij} \equiv 2\mathrm{M}(U) v_{ij} \tag{1.1}$$

где $T(U)$ – универсальная функция упрочнения материала; $U = (2v_{ij}v_{ij})^{\frac{1}{2}}$ – максимальная скорость скольжения. Из (1.1) видно, что $T = (s_{ij}s_{ij})^{\frac{1}{2}}$. Отличие функции $\mathrm{M}(U)$ от



Фиг. 1

константы обусловливает нелинейность скалярных свойств среды. Будем полагать, что вид этой функции (так же, как и T) зависит от эйлеровых координат и времени, т.е. $\mathrm{M} = \mathrm{M}(U, \chi; t)$, но постоянен для каждой лагранжевой частицы. При этом частную производную от M и T по скалярному аргументу U будем обозначать $\mathrm{M}^{\cdot}$ и $T^{\cdot}$.

Уравнения движения неоднородной среды с определяющими соотношениями (1.1) имеют вид [8]:

$$-p_{,i} + 2\mathrm{M} v_{ij,j}(\mathbf{v}) + 2U\mathrm{M}^{\cdot} V_{ijkl} v_{kl,j}(\mathbf{v}) + 2\mathrm{M}_{,j} v_{ij}(\mathbf{v}) + \rho g l_i = \rho(v_{i,t} + v_{i,j} v_j) \qquad (1.2)$$

где p – давление, $f_{,t} \equiv \partial f/\partial t$. Компоненты $v_{ij}(\mathbf{v})$ выражаются через компоненты вектора скорости соотношениями Стокса

$$2v_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i} \qquad (1.3)$$

Направляющий тензор четвертого ранга V_{ijkl} зависит только от кинематики деформирования

$$V_{ijkl} = 2v_{ij}v_{kl}/U^2 \qquad (1.4)$$

Он обладает стандартными для тензоров четвертого ранга типами симметрии и имеет простой вид в случаях одномерного сдвига в плоскости (Ox_1x_3) в направлении оси x_1:

$$V_{ijkl} = (\delta_{i1}\delta_{j3} + \delta_{i3}\delta_{j1})(\delta_{k1}\delta_{l3} + \delta_{k3}\delta_{l1})/2 \equiv 2\delta_{1(i}\delta_{1(k}\delta_{l)3}\delta_{j)3} \qquad (1.5)$$

и растяжения–сжатия в плоскости (Ox_1x_3) вдоль координатных осей

$$V_{ijkl} = (\delta_{i1}\delta_{j1} - \delta_{i3}\delta_{j3})(\delta_{k1}\delta_{l1} - \delta_{k3}\delta_{l3})/2 \qquad (1.6)$$

Имеем далее уравнение неразрывности

$$\rho_{,t} + \rho_{,i}v_i = 0 \qquad (1.7)$$

с учетом условия несжимаемости

$$v_{i,i} = 0 \qquad (1.8)$$

Также надо получить одно уравнение для определения неизвестной скалярной функции $\mathrm{M}(U, \mathbf{x}, t)$. Поскольку общие законы механики сплошной среды (1.2), (1.7) уже выписаны, необходимо привлечение дополнительных гипотез, связывающих М с остальными параметрами задачи. В [9], где исследуется устойчивость стратифицированных сдвиговых течений несжимаемой вязкой жидкости ($\mathrm{M}(U, \mathbf{x}, t) \equiv \mu(\mathbf{x}, t)$), в качестве такой гипотезы выбрано уравнение

$$d\mu/dt \equiv \mu_{,t} + \mu_{,i} v_i = 0 \tag{1.9}$$

описывающее поведение динамической вязкости $\mu(\mathbf{x}, t)$. Уравнение (1.9) записано, очевидно, по аналогии с уравнением неразрывности (1.7). Подобно тому, как последнее является следствием интегрального закона сохранения массы для несжимаемого тела, уравнение (1.9) – следствие интегрального равенства

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}, t) d\Omega = 0 \tag{1.10}$$

также с учетом несжимаемости. Равенство (1.10) означает сохранение со временем так называемой "общей вязкости" (величины с размерностью ML^2T^{-1}) или усредненной по объему тела вязкости. Гипотеза (1.10) обосновывается в [9] со ссылкой на допущение Шлихтинга о том, что в стратифицированных жидкостях кинематическую вязкость μ/ρ можно считать практически постоянной. Кроме того отклонения μ и μ/ρ от их средних по объему значений – величины более высокого порядка малости по сравнению с другими слагаемыми в уравнениях Навье–Стокса. Данное допущение (уравнение (1.9)) бралось за основу и во многих более поздних исследованиях (см., например, обзор [6]).

Следуя [9], будем предполагать, что

$$\partial \mathrm{M}/\partial t + \mathrm{M}_{,i} v_i = 0 \tag{1.11}$$

Таким образом, замкнутая система в области течения относительно $\mathbf{v}$, p, ρ, М включает в себя шесть уравнений (1.2), (1.7), (1.8), (1.11).

Для задания граничных и начальных условий потребуем

$$\mathbf{x} \in \Sigma_v: \quad v_i(\mathbf{x}, t) = W_i(\mathbf{x}, t) \tag{1.12}$$

$$\mathbf{x} \in \Sigma_s: \quad \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) n_j(\mathbf{x}, t) = P_i(\mathbf{x}, t) \tag{1.13}$$

$$\mathbf{x} \in \Sigma_r: \quad T(\mathbf{x}, t) = \tau_s(\mathbf{x}, t) \tag{1.14}$$

$$t = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega: \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \tag{1.15}$$

где τ_s – предел текучести при сдвиге, так же как и другие механические характеристики материала зависящей от эйлеровых координат и времени; Σ_r – поверхности, отделяющие зоны течения Ω_f от жестких зон Ω_r ($\Omega_f \cup \Omega_r = \Omega$). Деформирование происходит там и тогда, где и когда $T > \tau_s$, т.е. при $\mathbf{x} \in \Omega_f$.

2. Линеаризованная задача в возмущениях. Линеаризуем начально-краевую задачу, поставленную в п. 1, вблизи некоторого основного движения (процесса деформирования), параметры которого будем помечать индексом "°". Имеем

$$-\delta p_{,i} + \delta s_{ij,j} + g l_i \delta\rho = \frac{dv_i^\circ}{dt}\delta\rho + \rho^\circ(\delta v_{i,t} + v_{i,j}^\circ \delta v_j + v_j^\circ \delta v_{i,j}) \tag{2.1}$$

$$\delta s_{ij} = 2\mathrm{M}_\circ \delta v_{ij}(\delta\mathbf{v}) + 2U^\circ \mathrm{M}_\circ' V_{ijkl}^\circ \delta v_{kl}(\delta\mathbf{v}) + 2v_{ij}^\circ \delta\mathrm{M} \tag{2.2}$$

$$\delta v_{i,i} = 0 \tag{2.3}$$

$$\delta\rho_{,t} + v_i^\circ \delta\rho_{,i} + \rho_{,i}^\circ \delta v_i = 0 \tag{2.4}$$

$$\delta M_{,t} + v_i^\circ \delta M_{,i} + M_{,i}^\circ \delta v_i = 0 \tag{2.5}$$

Здесь $M_\circ = M_\circ(U^\circ, \mathbf{x}, t)$ – скалярная функция материала в основном течении, а $(M_\circ + \delta M)(U^\circ + \delta U, \mathbf{x}, t)$ – в возмущенном. В силу линейности величина δM в (2.2) зависит от $U^\circ, \mathbf{x}, t$.

Система шести уравнений (2.1) (куда надо подставить δs_{ij} из (2.2) и проварьированные соотношения Стокса (1.3)), (2.3)–(2.5) замкнута относительно шести возмущений δv_i, δp, $\delta\rho$, δM в области течения. Линеаризация граничных условий (1.12)–(1.14) представляет собой их снесение с возмущенных поверхностей на невозмущенные [7, 10]. Эти условия, заданные на Σ_v, Σ_s, Σ_r с учетом изменения направления нормали, приведены в [8]. Здесь они остаются прежними, и их опускаем.

Для сокращения записи будем в дальнейшем опускать знаки δ перед вариациями соответствующих величин.

3. Развитие возмущений в случае заданной на границе кинематики. Предположим, что жесткие зоны Ω_r в области Ω отсутствуют, а вся поверхность Σ состоит из части Σ_v, на которой заданы кинематические граничные условия, не меняющиеся при переходе от основного движения к возмущенному (приближение "жесткой стенки")

$$\mathbf{x} \in \Sigma: \quad v_i = 0 \tag{3.1}$$

Пусть каждая компонента $v_i(\mathbf{x}, t)$ – элемент вещественнозначного пространства $L_2^\circ(\overline{\Omega})$ со стандартной в нем нормой [11]. Умножим обе части (2.1) на v_i, просуммируем по i и проинтегрируем по Ω. С учетом (2.3), (3.1) получим

$$\begin{gathered}\int_\Omega \rho^\circ v_i v_{i,t} d\Omega = -\int_\Omega s_{ij} v_{i,j} d\Omega + \int_\Omega \left(g l_i - \frac{d v_i^\circ}{dt} \right) \rho v_i d\Omega - \\ - \int_\Omega \rho^\circ v_{i,j}^\circ v_i v_j d\Omega - \int_\Omega \rho^\circ v_j^\circ v_i v_{i,j} d\Omega \end{gathered} \tag{3.2}$$

Преобразуем ниже все пять интегралов, входящих в (3.2).

1. Последнее слагаемое в правой части (3.2). В силу (1.7), (1.8) и (3.1) будем иметь

$$-\int_\Omega \rho^\circ v_j^\circ v_i v_{i,j} d\Omega = -\frac{1}{2} \int_\Omega \rho_{,t}^\circ v_i v_i d\Omega \tag{3.3}$$

2. Левая часть (3.2)

$$\begin{gathered}\int_\Omega \rho^\circ v_i v_{i,t} d\Omega = -\frac{1}{2} \int_\Omega \rho_{,t}^\circ v_i v_i d\Omega + \frac{1}{2} \int_\Omega (\rho^\circ v_i v_i)_{,t} d\Omega \equiv \\ \equiv -\frac{1}{2} \int_\Omega \rho_{,t}^\circ v_i v_i d\Omega + \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{d}{dt} (\rho^\circ v_i v_i) d\Omega - \frac{1}{2} \int_\Omega (\rho^\circ v_i v_i)_j v_j^\circ d\Omega = \\ = -\frac{1}{2} \int_\Omega \rho_{,t}^\circ v_i v_i d\Omega + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) \end{gathered} \tag{3.4}$$

$$I_\alpha^2(t) = \int_\Omega \rho^\circ v_\alpha^2 d\Omega \tag{3.5}$$

в силу того, что $d(d\Omega)/dt \equiv 0$.

3. Третье слагаемое в правой части (3.2). Оценим это слагаемое с помощью неравенства Коши–Шварца в $L_2^\circ(\bar{\Omega})$

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega \rho^\circ v_{i,j}^\circ v_i v_j d\Omega \le \sup_\Omega \left|v_{i,j}^\circ\right| \int_\Omega \rho^\circ |v_i||v_j| d\Omega = \\
&= q_{ij} \int_\Omega \left|\sqrt{\rho^\circ} v_i\right| \left|\sqrt{\rho^\circ} v_j\right| d\Omega \le q_{ij} \left(\int_\Omega \rho^\circ v_i^2 d\Omega\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \rho^\circ v_j^2 d\Omega\right)^{1/2} = \\
&\qquad = q_{ij} I_i I_j \le \frac{q_{ij}}{2}(I_i^2 + I_j^2) \le \frac{Q}{2}(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$
q_{ij}(t) = \sup_\Omega \left|v_{i,j}^\circ\right|, \quad Q(t) = \max_{\alpha = 1, 2, 3} (2q_{\alpha\alpha} + q_{\alpha\beta} + q_{\beta\alpha} + q_{\alpha\gamma} + q_{\gamma\alpha})
$$

4. Первое слагаемое в правой части (3.2). Преобразуем подынтегральное выражение

$$
s_{ij} v_{i,j} = s_{ij} v_{ij} = W_{ijkl}^\circ v_{kl} v_{ij} \tag{3.7}
$$

$$
W_{ijkl}^\circ = 2(\mathrm{M}_0 \Delta_{ijkl} + U^\circ \mathrm{M}_0^\cdot V_{ijkl}^\circ) + \mathrm{N}_{kl}^\circ v_{ij}^\circ + \mathrm{N}_{ij}^\circ v_{kl}^\circ \tag{3.8}
$$

$$
\mathrm{M} = \mathrm{N}_{kl}^\circ v_{kl} \tag{3.9}
$$

где Δ_{ijkl} – единичный тензор четвертого ранга. Уравнение (2.5) после подстановки в него возмущения М (3.9) накладывает единственное ограничение на шесть компонент симметричного тензора N_{kl}°.

Используем для дальнейших оценок неравенство Корна[1]

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega W_{ijkl}^\circ v_{kl} v_{ij} d\Omega \ge \int_\Omega K(\mathbf{x}, t) v_{ij} v_{ij} d\Omega \ge \inf_\Omega \frac{|K|}{\rho^\circ} \int_\Omega \rho^\circ v_{ij} v_{ij} d\Omega = \\
&= \frac{k}{2}\left(\int_\Omega \rho^\circ v_{i,j} v_{i,j} d\Omega + \int_\Omega \rho_{,ij}^\circ v_i v_j d\Omega\right), \quad k(t) = \inf_\Omega \frac{|K(\mathbf{x}, t)|}{\rho^\circ(\mathbf{x}, t)}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

и тождества

$$
\rho^\circ v_{i,j} v_{i,j} = (\sqrt{\rho^\circ} v_i)_{,j} (\sqrt{\rho^\circ} v_i)_{,j} - \rho_{,j}^\circ v_i v_{i,j} - \frac{\rho_{,j}^\circ \rho_{,j}^\circ}{4\rho^\circ} v_i v_i \tag{3.11}
$$

$$
\int_\Omega \rho_{,j}^\circ v_i v_{i,j} d\Omega = -\frac{1}{2} \int_\Omega \rho_{,jj}^\circ v_i v_i d\Omega \tag{3.12}
$$

Если область Ω можно заключить в параллелепипед со сторонами h_1, h_2, h_3 либо в бесконечную призму прямоугольного $h_1 \times h_2$ сечения либо между двумя параллельны-

---

[1] Здесь, естественно, предполагается, что тензор W_{ijkl}°, определяемый (3.8), положительно определен. Так, для случаев, когда V_{ijkl}° имеет вид (1.5) или (1.6), и возмущения δМ отсутствуют ($\mathrm{N}_{ij}^\circ = 0$), свертка $W_{ijkl}^\circ v_{kl} v_{ij}$ записывается следующим образом: $W_{ijkl}^\circ v_{kl} v_{ij} = 2\mathrm{M}_0 v_{ij} v_{ij} + 4U^\circ \mathrm{M}_0^\cdot v_{13}^2$ или $W_{ijkl}^\circ v_{kl} v_{ij} = 2\mathrm{M}_0 v_{ij} v_{ij} + 4U^\circ \mathrm{M}_0^\cdot v_{11}^2$ соответственно.

ми плоскостями, отстоящими друг от друга на расстоянии h_1, то для любой функции $f \in L_2^\circ(\overline{\Omega})$ справедливо неравенство Фридрихса

$$\int_\Omega f_{,j} f_{,j} d\Omega \geq \Lambda_\Omega^2 \int_\Omega f^2 d\Omega \tag{3.13}$$

где $\Lambda_\Omega^2 = \pi^2(h_1^{-2} + h_2^{-2} + h_3^{-2})$ либо $\Lambda_\Omega^2 = \pi^2(h_1^{-2} + h_2^{-2})$ либо $\Lambda_\Omega^2 = \pi^2/h_1^2$ соответственно [11]. Выбирая в качестве f в неравенстве (3.13) функцию $\sqrt{\rho^\circ}\, v_\alpha \in L_2^\circ(\overline{\Omega})$, а затем суммируя по α от 1 до 3, получим

$$\int_\Omega (\sqrt{\rho^\circ}\, v_i)_{,j} (\sqrt{\rho^\circ}\, v_i)_{,j} d\Omega \geq \Lambda_\Omega^2 \int_\Omega \rho^\circ v_i v_i d\Omega \equiv \Lambda_\Omega^2 (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) \tag{3.14}$$

С учетом (3.7), (3.10)–(3.12), (3.14) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_\Omega s_{ij} v_{i,j} d\Omega &\geq \frac{k}{2} \int_\Omega \left(\Lambda_\Omega^2 + \frac{\rho^\circ_{,jj}}{2\rho^\circ} - \frac{\rho^\circ_{,j}\rho^\circ_{,j}}{4\rho^{\circ 2}} \right) \rho^\circ v_i v_i d\Omega + \\ &+ \frac{k}{2} \int_\Omega \rho^\circ_{,ij} v_i v_j d\Omega \equiv \frac{k}{2} \int_\Omega (A_{ij}^\circ + B^\circ \delta_{ij}) \rho^\circ v_i v_j d\Omega \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$A_{ij}^\circ(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho^\circ_{,ij}}{\rho^\circ}, \quad B^\circ(\mathbf{x}, t) = \Lambda_\Omega^2 + \frac{\Delta\rho^\circ}{2\rho^\circ} - \frac{|\operatorname{grad}\rho^\circ|^2}{4\rho^{\circ 2}}$$

Пусть существует такая функция $C(\mathbf{x}, t)$, принимающая при некоторых $\mathbf{x}$, возможно, и отрицательные значения, что квадратичная форма $[A_{ij}^\circ + (B^\circ - C)\delta_{ij}] v_i v_j$ положительно определена, т.е. собственные значения матрицы $\underset{\sim}{A}^\circ + (B^\circ - C)\underset{\sim}{I}$ положительны при любых $\mathbf{x}$. Тогда цепочку (3.15) можно продолжить

$$\int_\Omega s_{ij} v_{i,j} d\Omega \geq \frac{k}{2} c (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2), \quad c(t) = \inf_\Omega C(\mathbf{x}, t) \tag{3.16}$$

5. Второе слагаемое в правой части (3.2). Из уравнения неразрывности (2.4) следует, что $\rho = D^{-1}[-\rho^\circ_{,i} v_i]$, где $D = (\partial/\partial t + \mathbf{v}^\circ \cdot \operatorname{grad})$ – дифференциальный оператор, для величин невозмущенного движения совпадающий с полной производной по времени и имеющий обратный оператор D^{-1}. Представим $D^{-1}[-\rho^\circ_{,i} v_i]$ в виде $D^{-1}[-\rho^\circ_{,i} v_i] = \rho^\circ \chi_i^\circ v_i$, где неизвестные компоненты вектора χ_i° удовлетворяют единственному уравнению

$$(\rho^\circ \chi_i^\circ v_i)_{,t} + (\rho^\circ \chi_i^\circ v_i)_{,j} v_j^\circ + \rho^\circ_{,i} v_i = 0 \tag{3.17}$$

Тогда (см. цепочку (3.6)):

$$\begin{aligned} \int_\Omega \rho \left(g l_i - \frac{dv_i^\circ}{dt} \right) v_i d\Omega &= \int_\Omega \rho^\circ \left(g l_i - \frac{dv_i^\circ}{dt} \right) \chi_j^\circ v_i v_j d\Omega \leq \\ &\leq \sup_\Omega \left| \left(g l_i - \frac{dv_i^\circ}{dt} \right) \chi_j^\circ \right| \int_\Omega \rho^\circ |v_i| |v_j| d\Omega = \xi_{ij} I_i I_j \leq \frac{\Xi}{2} (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\xi_{ij}(t) = \sup_{\Omega}\left|\left(gl_i - \frac{dv_i^\circ}{dt}\right)\chi_j^\circ\right|, \quad \Xi(t) = \max_{\alpha=(1;2;3)}(2\xi_{\alpha\alpha} + \xi_{\alpha\beta} + \xi_{\beta\alpha} + \xi_{\alpha\gamma} + \xi_{\gamma\alpha})$$

Таким образом, собирая вместе оценки (3.3), (3.4), (3.6), (3.16), (3.18) всех пяти слагаемых, входящих в (3.2), окончательно получим

$$\frac{d}{dt}\ln(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) \le Q(t) + \Xi(t) - k(t)c(t), \quad t > 0 \tag{3.19}$$

Отсюда следует утверждение о том, что при $t > 0$ функция $(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2)(t)e^{F(t)}$ не возрастает, т.е. заведомо

$$(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2)(t) \le (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2)(0)e^{-F(t)}, \quad t > 0$$
$$F(t) = \int_0^t (kc - Q - \Xi)(\tau)d\tau \tag{3.20}$$

В зависимости от поведения $F(t)$ при $t > 0$ из (3.20) можно судить о характере затухания возмущений (устойчивости основного процесса) либо роста возмущений (неустойчивости основного процесса). Так, если одновременно выполняются требования:

$$(a)\ \inf_{t>0} F(t) > -\infty; \quad (b)\ \lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$$

то возмущения заведомо экспоненциально затухают.

В случае установившегося основного процесса $k = \text{const}$, $c = \text{const}$, $Q = \text{const}$, $\Xi = \text{const}$, $F(t) = (kc - Q - \Xi)t$, и достаточным условием устойчивости относительно трехмерных возмущений является неравенство $Q + \Xi < kc$.

В силу определения (3.5) величин $I_\alpha^2(t)$ в данной работе речь идет об устойчивости по паре энергетических[2] мер (ζ_0, ζ_t), где

$$\zeta_t^2(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho^\circ(\mathbf{x}, t)|\mathbf{v}|^2(\mathbf{x}, t)d\Omega, \quad \zeta_0^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho^\circ(\mathbf{x}, 0)|\mathbf{v}|^2(\mathbf{x}, 0)d\Omega \equiv \rho_t^2(0) \tag{3.21}$$

4. Замечания. В п. 3 выведены общие оценки затухания и роста возмущений в приближении "жесткой стенки". Их общность не позволяет явно найти величины N_{kl}°, входящие в (3.9), и χ_i°. В каждом конкретном течении постановка линеаризованной задачи упрощается, и оценки устойчивости уточняются. Так, в классических проблемах о стратифицированном одномерном сдвиге (V_{ijkl}° принимает вид (1.5)) во всех возмущениях выделяется множитель $\exp(\alpha t + isx_1)$, и оператор D^{-1} эквивалентен делению на $\alpha + isv^\circ$. В этом случае второе слагаемое в правой части (3.2) включает в себя частоту Вяйсяля–Брента $(-g\rho^{\circ\prime}/\rho)^{1/2}$ [4].

Дальнейшим направлением исследованием здесь могла бы быть апробация известных результатов по устойчивости стратифицированных сдвиговых течений к слоистым композитам и развитие методики осреднения [12] применительно к краевым задачам Тейлора–Гольдштейна и Орра–Зоммерфельда–Дразина.

Другой предельный переход из общего случая получается при рассмотрении однородных скалярно нелинейных течений. При этом уравнения (2.4), (2.5) удовлетворя-

[2] Точнее их следовало бы назвать "квазиэнергетическими", поскольку в (3.21) оцениваются лишь кинематические возмущения, в то время как плотность берется в основном состоянии и играет роль некоторой функции веса.

ются тождественно, $\Xi(t) \equiv 0$, $c(t) \equiv \Lambda_\Omega^2$, и неравенства (3.19), (3.20) сводятся к соответствующим неравенствам, полученным в [13].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-01233) и Федеральной целевой программы “Интеграция” (проект 426).

Материалы статьи доложены автором на Международной конференции NATO-ASI по механике композиционных материалов и структур (1998 г.; Троя, Португалия).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дикий Л.А.* Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 108 с.
2. *Йи Чиа-шун.* Волновые движения в слоистых жидкостях // Нелинейные волны. М.: Мир, 1977. С. 271–296.
3. *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamic Stability. Cambridge: Univ. Press, 1981. 525 p.
4. *Миропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.
5. *Мадерич В.С., Никишов В.И., Стеценко А.Г.* Динамика внутреннего перемешивания в стратифицированной среде. Киев: Наук. думка, 1988. 239 с.
6. *Козырев О.Р., Степанянц Ю.А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 25. С. 3–89.
7. *Ильюшин А.А.* Деформация вязко-пластичного тела // Учен. зап. МГУ. Механика. 1940. Вып. 39. С. 3–81.
8. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: Изд-во УРСС, 1998. 176 с.
9. *Drazin P.G.* On stability of parallel flow of an incompressible fluid of variable density and viscosity // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1962. V. 58. № 4. P. 646–661.
10. *Ишлинский А.Ю.* Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 2. С.109–130.
11. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.
12. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
13. *Георгиевский Д.В.* Интегральные оценки устойчивости нестационарного деформирования трехмерных тел со сложной реологией // Докл. РАН. 1997. Т. 356. № 2. С. 196–198.

Москва

Поступила в редакцию 5.V.1998