

УДК 539.3.

© 1998 г. А. А. ЕВТУШЕНКО, Р. Д. КУЛЬЧИЦКИЙ-ЖИГАЙЛО

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИЗНОСОКОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛОИДАЛЬНОГО ИНДЕНТОРА

Методы решения контактных задач теории упругости при наличии износа достаточно хорошо развиты для классического плоского [1, 2] или осесимметричного [3, 4] случаев взаимодействия. В данной работе предложен эффективный приближенный метод решения износоконтактных задач для эллиптической формы области соприкосновения.

Ранее эта методика была апробирована при решении соответствующей контактной задачи с учетом фрикционного теплообразования [5].

1. Рассматривается задача о контактировании жесткого основания (полупространства) с упругим штампом поверхность которого имеет форму эллиптического параболоида. Тела сжимаются силой P и движутся равномерно со скоростью V . В процессе скольжения штамп изнашивается. В качестве модели износа принимаем абразивное изнашивание

$$u_z^w(x, y, t) = k_w V \int_{t_0}^t p(x, y, \tau) d\tau, \quad (x, y) \in \Omega(t) \quad (1.1)$$

где u_z^w – вертикальное перемещение вследствие износа, p – контактное давление, k_w – коэффициент износа, t – время, x, y, z – прямоугольная система координат, жестко связанная с движущимся штампом, причем плоскость $x - y$ совпадает с поверхностью полупространства, а ось z направлена в штамп, t_0 – время начала изнашивания штампа в точке с координатами (x, y) , $\Omega(t)$ – область контакта.

Считаем, что поверхности взаимодействующих тел вне области контакта свободны от внешних усилий; влияние сил трения на величину и характер распределения нормальных перемещений пренебрежимо мало; площадка контакта имеет форму эллипса с полуосями a и b ; главные радиусы кривизны в лобовой точке штампа R_1, R_2 значительно больше полуосей контактного эллипса.

В такой постановке удовлетворим контактному условию

$$u_z^e(x, y, t) + u_z^w(x, y, t) = \Delta(t) - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2}, \quad (x, y) \in \Omega \quad (1.2)$$

где $\Delta(t)$ – сближение тел, u_z^e – упругое вертикальное перемещение, определяемое выражениями [6]:

$$u_z^e(x, y, t) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(r, s, t) \frac{\exp[i(xr + ys)]}{\sqrt{r^2 + s^2}} dr ds \quad (1.3)$$

$$\bar{p}(r, s, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega(t)} p(\xi, \eta, t) \exp[-i(\xi r + \eta s)] d\xi d\eta \quad (1.4)$$

где $\gamma = (1 - \nu)/\mu$, μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, и условию равновесия

$$\iint_{\Omega(t)} p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = P \quad (1.5)$$

Заметим, что при получении формулы (1.3) не учитывалась инерционность среды, а штамп моделировался упругим полупространством.

2. В результате подстановки выражений (1.), (1.3), (1.4) в граничное условие (1.2) приходим к интегральному уравнению относительно контактного давления $p(x, y, t)$. Построение точного решения этого уравнения затруднительно, поскольку оно содержит двойной интеграл по априори неизвестной плоской области и интегральный оператор Вольтерры. Поэтому найдем приближенное решение в виде

$$p(x, y, t) = \frac{Pd(t)}{\pi a(t)b(t)} \left\{ 1 + \frac{5[3 - 2d(t)]}{4 d(t)} \left(\frac{x^2}{a^2(t)} + \frac{y^2}{b^2(t)} \right) \right\} \left(1 - \frac{x^2}{a^2(t)} - \frac{y^2}{b^2(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

где неизвестная функция $d(t)$ равна отношению давления в центре области контакта ($x = y = 0$) к среднему давлению $p_a = P/(\pi ab)$ (при $1.25 < d < 2.5$ параметр d равен также отношению максимального контактного давления к среднему давлению). При отсутствии изнашивания ($k_w = 0$), приняв $d(t) = 1.5$, из (2.1) получаем известное решение [3]

$$p(x, y) = \frac{3P}{2\pi ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Отметим также, что распределение контактного давления (2.1) автоматически удовлетворяет условию равновесия (1.5).

После подстановки в соотношение (1.4) значения давления (2.1) получаем

$$\bar{p}(r, s, t) = \frac{Pd(t)}{\pi} \left\{ \left[1 + \frac{53 - 2d(t)}{4 d(t)} \right] L_0 - \frac{53 - 2d(t)}{4 d(t)} L_1 \right\} \quad (2.2)$$

$$L_n = \frac{1}{2\pi ab} \iint_{\Omega} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2} + n} \exp[-i(\xi r + \eta s)] d\xi d\eta \quad (n = 0, 1) \quad (2.3)$$

Интегралы (2.3) вычисляем, используя замену переменных $\xi = a\rho \cos(\varphi)$, $\eta = b\rho \sin(\varphi)$. Получаем

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \rho (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2} + n} d\rho \int_0^{2\pi} \cos[\rho(\arccos(\varphi) + b s \sin(\varphi))] d\varphi = \\ &= \int_0^1 \rho (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2} + n} J_0(\rho \sqrt{a^2 r^2 + b^2 s^2}) d\rho = \\ &= 2^{\frac{1}{2} + n} \Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right) \frac{J_{\frac{3}{2} + n}(\sqrt{r^2 a^2(t) + s^2 b^2(t)})}{[\sqrt{r^2 a^2(t) + s^2 b^2(t)}]^{\frac{3}{2} + n}} \quad (n = 0, 1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $J_k(\dots)$ – функция Бесселя первого рода, $\Gamma(\dots)$ – гамма-функция. Подстановка трансформанты Фурье от контактного давления $\bar{p}(r, s, t)$ (2.2) с учетом (2.4) в выражение для вертикальных упругих перемещений (1.3) приводит к необходимости вычислить интегралы

$$M_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{\frac{3}{2}+n}(\sqrt{r^2 a^2(t) + s^2 b^2(t)}) \cos(xr + ys) dr ds}{[r^2 a^2(t) + s^2 b^2(t)]^{\frac{3}{4}+n} \sqrt{r^2 + s^2}} \quad (n = 0, 1)$$

Введя замену переменных $r = a^{-1}\rho \cos(\varphi)$, $s = b^{-1}\rho \sin(\varphi)$, находим [7]:

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{1}{2\pi ab} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{J_{\frac{3}{2}+n}(\rho) \cos(\rho\omega) d\rho}{\rho^{\frac{3}{2}+n} \sqrt{a^{-2} \cos^2 \varphi + b^{-2} \sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \int_0^{\infty} \rho^{-\frac{3}{2}-n} J_{\frac{3}{2}+n}(\rho) \cos(\rho\omega) d\rho = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2^{-\frac{3}{2}-n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+2)} \int_0^{2\pi} \frac{F(1/2, -1-n; 1/2; \omega^2) d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \quad (n = 0, 1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\omega = a^{-1}x \cos \varphi + b^{-1}y \sin \varphi$, $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Используя соотношения [7]:

$$\begin{aligned} F(1/2, -1; 1/2; \omega^2) &= 1 - \omega^2 = 1 - (a^{-1}x \cos \varphi + b^{-1}y \sin \varphi)^2 \\ F(1/2, -2; 1/2; \omega^2) &= 1 - 2\omega^2 + \omega^4 = 1 - 2(a^{-1}x \cos \varphi + b^{-1}y \sin \varphi)^2 + \\ &\quad + (a^{-1}x \cos \varphi + b^{-1}y \sin \varphi)^4 \end{aligned}$$

представим интегралы M_n (2.5) в виде линейных комбинаций интегралов вида [7]:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi \cos^{2l} \varphi d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} &= \frac{2}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2l} \varphi \cos^{2m} \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{2\Gamma(l+1/2)\Gamma(m+1/2)F(l+1/2, 1/2; l+m+1; e^2)}{\Gamma(m+l+1)}, \quad m, l = 0, 1, 2; \quad m+l \leq 2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Учитывая выражения (2.2)–(2.6), из (1.3) находим

$$\begin{aligned} u_z^e(x, y, t) &= \frac{\gamma P}{4a(t)} \left\{ \frac{3}{4} [5 - 2d(t)] \left[F(1/2, 1/2; 1; e^2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} F(3/2, 1/2; 2; e^2) \frac{x^2}{a^2(t)} - \frac{1}{2} F(1/2, 1/2; 2; e^2) \frac{y^2}{b^2(t)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{15}{16} [3 - 2d(t)] \left[F(1/2, 1/2; 1; e^2) - F(3/2, 1/2; 2; e^2) \frac{x^2}{a^2(t)} - \right. \right. \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$-F(1/2, 1/2; 2; e^2) \frac{y^2}{b^2(t)} + \frac{3}{8} F(5/2, 1/2; 3; e^2) \frac{x^4}{a^4(t)} + \\ + \left. \frac{3}{8} F(1/2, 1/2; 3; e^2) \frac{y^4}{b^4(t)} + \frac{3}{4} F(3/2, 1/2; 3; e^2) \frac{x^2 y^2}{a^2(t) b^2(t)} \right\}$$

где $e = [1 - b^2(t)/a^2(t)]^{1/2}$ – эксцентриситет контактного эллипса.

Перепишем граничное условие (1.2) в виде

$$u_z^w(x, y, t) = \Delta(t) - \frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2} - u_z^e(x, y, t) \quad (2.8)$$

Принимая во внимание выражение для упругого перемещения u_z^e (2.7) примем, что вертикальное перемещение поверхности штампа вследствие износа u_z^w в произвольный момент времени $t > 0$ можно аппроксимировать полиномом

$$u_z^w(x, y, t) \approx \tilde{u}_z^w(x, y, t) = C_1 + C_2 \frac{x^2}{a^2(t)} + C_3 \frac{y^2}{b^2(t)} + \\ + C_4 \frac{x^4}{a^4(t)} + C_5 \frac{y^4}{b^4(t)} + 2C_6 \frac{x^2 y^2}{a^2(t) b^2(t)} \quad (2.9)$$

коэффициенты C_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) которого являются функциями времени. С учетом формул (2.7) и (2.8) находим

$$\frac{C_5}{C_4} \equiv G_1(e) = \frac{F(1/2, 1/2; 3; e^2)}{F(5/2, 1/2; 3; e^2)}, \quad \frac{C_6}{C_4} \equiv G_2(e) = \frac{F(3/2, 1/2; 3; e^2)}{F(5/2, 1/2; 3; e^2)} \quad (2.10)$$

Оставшиеся функции определяем из условий

$$u_z^w(0, 0, t) = \tilde{u}_z^w(0, 0, t) \quad (2.11)$$

$$\iint_{\Omega(t)} u_z^w(x, y, t) dx dy = \iint_{\Omega(t)} \tilde{u}_z^w(x, y, t) dx dy \quad (2.12)$$

$$\tilde{u}_z^w(a(t), 0, t) = 0, \quad \tilde{u}_z^w(0, b(t), t) = 0 \quad (2.13)$$

Отметим, что при выполнении условия равновесия (1.5) имеет место равенство

$$\iint_{\Omega(t)} u_z^w(x, y, t) dx dy = k_w V \int_{t_0}^t dx dy \int p(x, y, \tau) d\tau = \\ = k_w V \int_0^t d\tau \int_{\Omega(\tau)} p(x, y, \tau) dx dy = k_w V P t$$

в результате чего условие (2.12) переписывается таким образом

$$\iint_{\Omega(t)} \tilde{u}_z^w(x, y, t) dx dy = k_w V P t \quad (2.14)$$

После подстановки точного u_z^w (1.1) и приближенного \tilde{u}_z^w (2.9) значений нормального перемещения вызванного износом, в соотношения (2.11), (2.13), (2.14), получаем

$$C_1(t) = \frac{k_w VP^t}{\pi} \int_0^t \frac{d(\tau)}{a(\tau)b(\tau)} d\tau$$

$$C_2(t) = -C_1(t) - C_4(t), \quad C_3(t) = -C_1(t) - G_1(e)C_4(t) \quad (2.15)$$

$$C_4(t) = \frac{2C_1(t) - 4Pk_w Vt[\pi a(t)b(t)]^{-1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}G_1(e) - \frac{1}{3}G_2(e)}$$

Подставив выражения (2.7), (2.9) в граничное условие (2.8) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x и y , придем к системе нелинейных уравнений относительно функций $\Delta(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $d(t)$:

$$\Delta(t) = \frac{3}{32} \frac{\gamma P}{a(t)} \left[d(t) + \frac{5}{2} \right] F(1/2, 1/2; 1; e^2) + C_1(t) \quad (2.16)$$

$$\frac{3}{32} \frac{\gamma P}{a(t)} \left[3d(t) - \frac{5}{2} \right] F(3/2, 1/2; 2; e^2) = \frac{a^2(t)}{2R_1} - C_1 - C_4 \quad (2.17)$$

$$\frac{3}{32} \frac{\gamma P}{a(t)} \left[3d(t) - \frac{5}{2} \right] F(1/2, 1/2; 2; e^2) = \frac{b^2(t)}{2R_2} - C_1 - C_5 \quad (2.18)$$

$$d(t) = \frac{3}{2} - \frac{256a(t)}{45} \frac{C_4}{\gamma P F(5/2, 1/2; 3; e^2)} \quad (2.19)$$

Введя безразмерные параметры

$$a_0 = \frac{2a}{(3PR_e\gamma)^{\frac{1}{3}}}, \quad b_0 = \frac{2b}{(3PR_e\gamma)^{\frac{1}{3}}}, \quad \Delta_0 = \frac{\Delta}{\frac{1}{2} \left(\frac{3R_e}{P^2\gamma^2} \right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$t^* = \frac{2k_w Vt}{(3PR_e\gamma^4)^{\frac{1}{3}}}, \quad R = \frac{R_2}{R_1}, \quad R_e = \sqrt{R_1 R_2} \quad (2.20)$$

$$C_1^* = \frac{1}{\pi} \int_0^{t^*} \frac{d(\tau)}{a_0(\tau)b_0(\tau)} d\tau, \quad C_4^* = \frac{2C_1^* - 4t^*[\pi a_0(t^*)b_0(t^*)]^{-1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}G_1(e) - \frac{1}{3}G_2(e)}$$

$$C_2^* = -C_1^* - C_4^*, \quad C_3^* = -C_1^* - G_1(e)C_4^*, \quad C_5^* = G_1(e)C_4^*, \quad C_6^* = G_2(e)C_4^*$$

уравнения (2.16)–(2.19) приведем к виду

$$\Delta_0(t^*) = \frac{3}{32a_0(t^*)} \left[d(t^*) + \frac{5}{2} \right] F(1/2, 1/2; 1; e^2(t^*)) + C_1^*(t^*) \quad (2.21)$$

$$\frac{3}{32} \left[3d(t^*) - \frac{5}{2} \right] F(3/2, 1/2; 2; e^2(t^*)) = \frac{3}{16} a_0^3(t^*) R^{\frac{1}{2}} + a_0(t^*) [C_1^*(t^*) + C_4^*(t^*)] \quad (2.22)$$

$$\frac{3}{32} \left[3d(t^*) - \frac{5}{2} \right] F(1/2, 1/2; 2; e^2(t^*)) = \quad (2.23)$$

$$= \frac{3}{16} a_0(t^*) b_0^2(t^*) R^{\frac{1}{2}} + a_0(t^*) [C_1^*(t^*) + C_5^*(t^*)]$$

$$d(t^*) = \frac{3}{2} - \frac{256}{45} \frac{a_0(t^*) C_4^*(t^*)}{F(5/2, 1/2; 3; e^2(t^*))} \quad (2.24)$$

Из уравнений (2.21)–(2.24) следует, что решение исходной задачи зависит от двух безразмерных параметров R и t^* (2.20).

В осесимметричном случае ($a(t) = b(t)$, $e = 0$, $R = 1$) задача является однопараметрической и ее решение определяется из уравнений

$$\Delta_0(t^*) = \frac{3}{32 a_0(t^*)} \left[d(t^*) + \frac{5}{2} \right] + C_1^*(t^*)$$

$$a_0^3(t^*) = \frac{3}{2} d(t^*) - \frac{5}{4} + \frac{16}{3} a_0(t^*) \left[4 C_1^*(t^*) - \frac{6 t^*}{\pi a_0^2(t_0^*)} \right]$$

$$d(t^*) = \frac{3}{2} - \frac{256}{15} a_0(t^*) \left[C_1^*(t^*) - \frac{2 t^*}{\pi a_0^2(t^*)} \right], \quad C_1^*(t^*) = \frac{1}{\pi} \int_0^{t^*} \frac{d(\tau)}{a_0^2(\tau)} d\tau$$

3. Численный алгоритм решения предлагается строить таким образом:

(а) временной интервал $[0, t^*]$ разбиваем на N частей точками $t_i^* = i \delta t^*$, $\delta t^* = t^*/N$ ($i = 0, 1, \dots, N$);

(б) для каждого фиксированного момента времени решаем систему нелинейных алгебраических уравнений (2.22)–(2.24). При $t_0^* = 0$ решение известно [3]. В последующие моменты времени в качестве начального приближения полуосей контактного эллипса $a_0(t_i^*)$, $b_0(t_i^*)$ и значения функции $d(t_i^*)$ принимаем соответствующие величины в предыдущий момент времени;

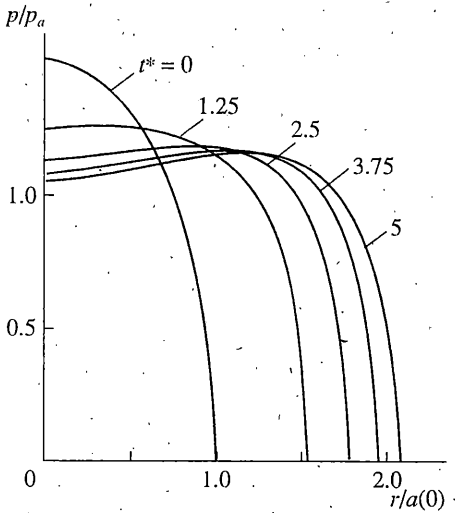
(в) по принятому приближению вычисляем значения функций C_j^* ($j = 1, 2, \dots, 6$);

(г) при фиксированном параметре $a_0(t_i^*)$ решается уравнение

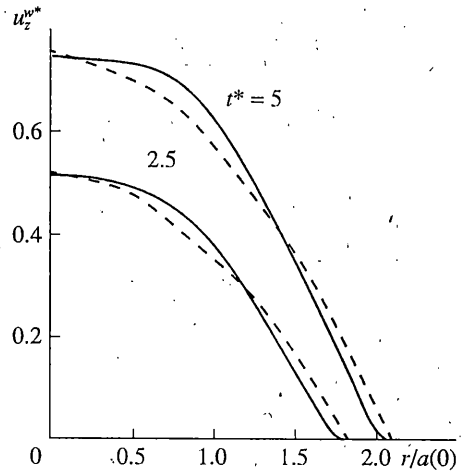
$$\frac{F(3/2, 1/2; 2; e^2)}{F(3/2, 1/2; 2; e^2)} = \frac{3 a_0^2(t^*) R^{\frac{1}{2}} / 16 - [C_1^*(t^*) + C_4^*(t^*)]}{3 a_0^2(t^*) (1 - e^2(t^*)) R^{\frac{1}{2}} / 16 - [C_1^*(t^*) + C_5^*(t^*)]}$$

являющееся следствием уравнений (2.22), (2.23). По уточненному значению эксцентриситета контактного эллипса $e(t_i^*)$ из уравнений (2.22), (2.24) определяются величины $a_0^*(t_i^*)$, $b_0^*(t_i^*)$, $d^*(t_i^*)$;

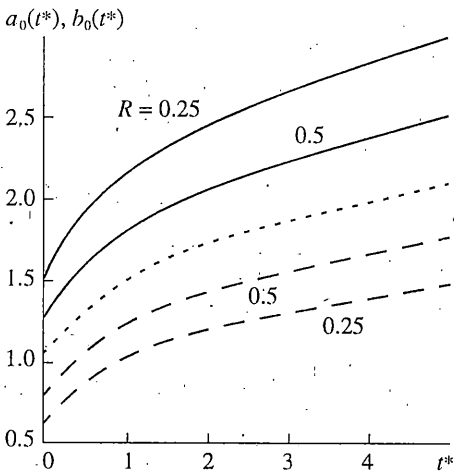
(е) проверяется выполнение уравнения (2.23). Если данное уравнение удовлетворяется с заданной точностью, то из уравнения (2.21) находится сближение тел $\Delta_0(t_i^*)$ и делается переход к следующему временному интервалу. В противном случае для последующих приближений $a_0(t_i^*)$, $b_0(t_i^*)$, $d(t_i^*)$ используются итерационные форму-



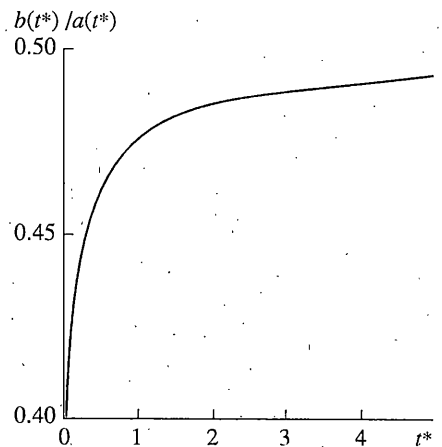
Фиг. 1



Фиг. 2



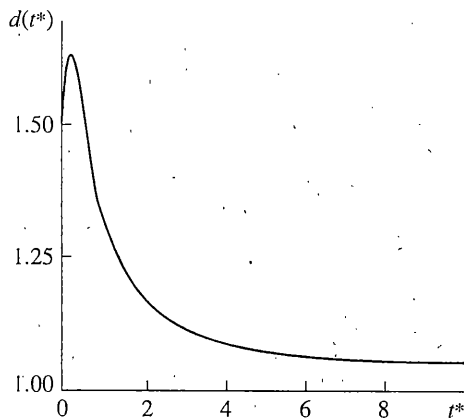
Фиг. 3



Фиг. 4

лы $a_0^{(n)}(t_i^*) = (a_0^{(n-1)}(t_i^*) + a_0^*(t_i^*))/2$, $b_0^{(n)}(t_i^*) = (b_0^{(n-1)}(t_i^*) + b_0^*(t_i^*))/2$, $d^{(n)}(t_i^*) = (d^{(n-1)}(t_i^*) + d^*(t_i^*))/2$ и повторяются вычисления с пункта (с).

4. Исследование решения исходной задачи начинается со случая взаимодействия полупространства со сферическим индентором. На фиг. 1 показано распределение безразмерного контактного давления $p^*(\rho, t^*) = p(\rho, t^*)/p_a$, $\rho = a(0)^{-1} \sqrt{x^2 + y^2}$ для нескольких значений безразмерного времени t^* . Изнашивание приводит к выравниванию эпюры давления и смещению его максимального значения к краю области контакта.



Фиг. 5

Распределение безразмерного нормального перемещения поверхности штампа вследствие износа

$$u_z^{w*} = \frac{u_z^w}{2} \left(\frac{3R_e}{P^2 \gamma^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

для рассматриваемой круговой области контакта показано на фиг. 2. Сплошные линии соответствуют вычислениям по точной (1.1), а штриховые – по аппроксимационной (2.9) формулам. Видно, что максимальная относительная погрешность не превышает 10%, т.е. аппроксимация (2.9) является достаточно точной.

Результаты расчетов для параболидоидального штампа представлены на фиг. 3–5. Фиг. 3 показывает зависимость безразмерных полуосей контактного эллипса a_0 (сплошные линии) и b_0 (штриховые) от параметра t^* для нескольких значений R . Пунктирная линия соответствует случаю сферического штампа ($R = 1$). Изменение отношения b_0/a_0 со временем для $R = 0.25$ приведено на фиг. 4. С увеличением времени это отношение достигает установившегося значения, которое можно представить

как $b_0/a_0 \approx R^{\frac{1}{2}}$. Геометрически это значит, что при достаточно большом времени изнашивания эксцентриситет контактного эллипса совпадает с эксцентриситетом эллипса, получаемого в результате сечения штампа плоскостью, параллельной поверхности полупространства.

Зависимость функции d от параметра t^* для $R = 0.25$ показано на фиг. 5. Вычисления показали незначительную зависимость функции $d(t^*)$ от параметра R . Следует отметить некоторое увеличение отношения максимального контактного давления к среднему значению на начальной стадии взаимодействия; после чего наблюдается резкое его падение к величине, мало отличающееся от единицы (эффект выравнивания давления вследствие износа).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.М. О постановке плоских контактных задач теории упругости при износе взаимодействующих тел // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 4. С. 827–830.
2. Александров В.М., Коваленко Е.В. Математические методы в контактных задачах с износом // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984. С. 77–89.
3. Галин Л.П. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.

4. *Горячева И.Г., Добычин М.Н.* Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 253 с.
5. *Yevtushenko A.A., Kulchytsky-Zhyhailo R.D.* Approximate solution of the thermoelastic contact problem with frictional heating in the general case of the profile shape // *J. Mech. Phys. Solids*. 1996. V. 44. № 2. P. 243–250.
6. *Gladwell G.M.L.* Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity. Alphen an den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1980. 716 p.
7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Львов

Поступила в редакцию 17.IV.1996