

УДК 531.383

© 1998 г. В. Ф. ЖУРАВЛЕВ

О ГЛОБАЛЬНЫХ ЭВОЛЮЦИЯХ СОСТОЯНИЯ ОБОБЩЕННОГО МАЯТНИКА ФУКО

Изучается поведение решений системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику управляемого маятника Фуко [1]. Предполагается, что движение маятника возмущается двумя основными дефектами: анизотропией упругих свойств и анизотропией диссипативных свойств.

Рассматриваются два режима управления: первый, когда оно отсутствует вообще, и второй, когда из четырех каналов управления амплитудой, квадратурой, прецессией и частотой, функционирует только управление амплитудой.

Такая постановка задачи преследует конкретную прикладную цель: выяснить поведение маятника в условиях, которые могут реализовываться в процессе уравновешивания маятника (в частности, в процессе балансировки волнового твердотельного гироскопа).

1. Исходные уравнения и допущения. В [1] были получены следующие уравнения движения обобщенного маятника Фуко на подвижном основании:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\omega\dot{y} + x &= \varepsilon(E_0 - E)\dot{x} + \mu Ky + P\dot{y} + Fx + X \\ \ddot{y} - 2\omega\dot{x} + y &= \varepsilon(E_0 - E)\dot{y} - \mu Kx - P\dot{x} + Fy + Y \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь x, y – координаты, определяющие положение маятника в плоскости колебаний, ω – угловая скорость вращения основания в этой плоскости, члены в правой части, пропорциональные ε, μ, P, F определяют, соответственно, управление амплитудой колебаний, квадратурой (моментом количества движения), прецессией и частотой. При этом E и K представляют собой полную энергию колебаний и момент количества движения и выражаются формулами $E = (x^2 + y^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2, K = x\dot{y} - \dot{x}y$.

Переменные X и Y представляют собой возмущения, для нейтрализации которых и служат введенные управления.

Уравнения (1) являются базовой моделью класса свободных гироскопов, реализующих идею маятника Фуко [2–7].

Два основных дефекта, с которыми приходится иметь дело при балансировке конкретной реализации маятника, могут быть выражены в виде сил X и Y следующим образом:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} - d \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Здесь линейные по перемещению силы определяют упругую анизотропию маятника; угол α есть угол наклона главной оси меньшей жесткости к оси x . Линейные по скорости силы характеризуют анизотропию диссипации энергии (g); угол β есть угол на-

клона главной оси меньшей диссипации к оси x . При этом члены, пропорциональные d , определяют изотропную часть диссипации.

Уравнения (1.1) можно переписать в иной форме, воспользовавшись переходом от фазовых переменных (x, \dot{x}, y, \dot{y}) к тороидальным координатам (r, k, θ, τ) , называемым в небесной механике элементами орбиты:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(t + \tau) \cos \theta - k \sin(t + \tau) \sin \theta \\ y &= r \cos(t + \tau) \sin \theta + k \sin(t + \tau) \cos \theta \\ \dot{x} &= -r \sin(t + \tau) \cos \theta - k \cos(t + \tau) \sin \theta \\ \dot{y} &= -r \sin(t + \tau) \sin \theta + k \cos(t + \tau) \cos \theta \end{aligned} \quad (1.3)$$

Если в уравнениях (1.1) правые части равны нулю, то на неподвижном основании ($\omega = 0$) маятник в общем случае описывает эллипс, для которого r и k являются большей и меньшей полуосями, θ – угол наклона большей полуоси к оси x , а τ – временная фаза, определяющая положение маятника на самом эллипсе. В этом случае все эти переменные являются константами. Если ω и правые части считать малыми, то эти константы превращаются в медленные функции времени, так что при переходе к новым переменным по формулам (1.3) можно дополнительно осреднить получающиеся уравнения по явно входящему времени. Формально введение малого параметра осуществляется после перехода к безразмерному времени, когда частота собственных колебаний маятника предполагается большой. (Для волнового твердотельного гироскопа частота собственных колебаний на основной рабочей форме составляет десяток килогерц.) Такая процедура осреднения была в [1] проделана, в результате чего получены уравнения

$$\begin{aligned} 2\dot{r} &= r[g \cos 2(\theta - \beta) - d + \varepsilon(E_0 - (r^2 + k^2)/2)] + k[h \sin 2(\theta - \alpha) - \mu rk] \\ 2\dot{k} &= -r[h \sin 2(\theta - \alpha) + \mu rk] - k[g \cos 2(\theta - \beta) + d - \varepsilon(E_0 - (r^2 + k^2)/2)] \\ 2\dot{\theta} &= 2\omega - P - \gamma - [(r^2 + k^2)g \sin 2(\theta - \beta) - 2rkh \cos 2(\theta - \alpha)] / (r^2 - k^2) \\ 2\dot{\tau} &= -F - c + [2rkg \sin 2(\theta - \beta) - (r^2 + k^2)h \cos 2(\theta - \alpha)] / (r^2 - k^2) \end{aligned} \quad (1.4)$$

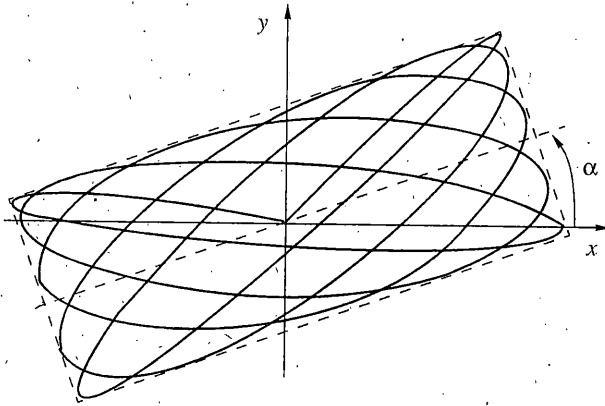
Процедура уравнивания маятника состоит в определении и устранении g и h . Для нахождения g и h можно воспользоваться анализом процесса затухания колебаний маятника при полностью отключенном управлении, или анализом эволюции колебаний при наличии управления амплитудой. Для такого анализа в (1.4) будем считать $\mu = P = F = \gamma = c = \omega = 0$. Кроме того, будем предполагать, что в уравнениях (1.1) оси x, y выбраны так, что ось x расположена по главной оси диссипации, соответствующей минимальному расстоянию энергии, т.е. $\beta = 0$, а $g \geq 0$. Поскольку $\alpha \in [0, \pi]$, то и $h \geq 0$.

Так как четвертое уравнение системы (1.4) отделяется от остальных, а переменная τ в дальнейшем интереса не представляет, то основные для дальнейшего уравнения таковы:

$$\begin{aligned} 2\dot{r} &= r[g \cos 2\theta - d + \varepsilon(E_0 - (r^2 + k^2)/2)] + kh \sin 2(\theta - \alpha) \\ 2\dot{k} &= -rh \sin 2(\theta - \alpha) - k[g \cos 2\theta + d - \varepsilon(E_0 - (r^2 + k^2)/2)] \\ 2\dot{\theta} &= -[(r^2 + k^2)g \sin 2\theta - 2rkh \cos 2(\theta - \alpha)] / (r^2 - k^2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

2. Свободные колебания маятника с упругой анизотропией. В этом случае $\varepsilon = d = g = 0$, $h \neq 0$ и уравнения (1.5) принимают вид

$$2\dot{r} = hks \sin 2(\theta - \alpha), \quad 2\dot{k} = -hr \sin 2(\theta - \alpha), \quad \dot{\theta} = rkh \frac{\cos 2(\theta - \alpha)}{r^2 - k^2} \quad (2.1)$$



Фиг. 1

В отсутствии управления уравнения (1.1) становятся линейными и, следовательно, проблемы в их интегрировании нет. Однако, представляет интерес поведение элементов орбиты.

Так, можно проверить, что система (2.1) имеет два первых интеграла $r^2 + k^2 = \text{const}$ и $2r^2 + \ln|\cos 2(\theta - \alpha)| = \text{const}$, так что и она интегрируется в квадратурах. Первый из этих интегралов есть интеграл энергии, выраженный в элементах орбиты. Выясним, как меняется момент количества движения маятника $dK/dt = d(rk)/dt = -(h/2)(r^2 - k^2)\sin 2(\theta - \alpha)$. Дифференцируя это соотношение еще раз, получаем $\dot{K} + h^2K = 0$. То есть в рассматриваемом случае кинетический момент есть гармоническая функция времени $K = A \cos ht + B \sin ht$ с периодом $2\pi/h$. Наблюдая полное время превращения прямолинейного отрезка, представляющего собой траекторию маятника в плоскости xu в случае $K = 0$, в эллипс и обратно, т.е. время π/h , можно вычислить величину дефекта h . Он равен половине разности квадратов собственных частот $v_1^2 - v_2^2 = 2h$, или, примерно, самому расщеплению частот $v_1 - v_2 = h$. Типичная траектория маятника в плоскости xu для рассматриваемого случая приведена на фиг. 1. При этом угол наклона к оси x прямоугольника, замечаемого траекторией, равен α , т.е. оси этого прямоугольника и определяют главные оси жесткости.

3. Свободные колебания маятника с анизотропией демпфирования. В этом случае в уравнениях (1.5) $\varepsilon = h = 0$, $g \neq 0$, $d \neq 0$, в силу чего они принимают вид

$$2\dot{r} = r(-d + g \cos 2\theta), \quad 2\dot{k} = -k(d + g \cos 2\theta), \quad 2\dot{\theta} = -[(r^2 + k^2)g \sin 2\theta]/(r^2 - k^2) \quad (3.1)$$

Из этих уравнений следует, что кинетический момент (квadrатура) является монотонно убывающей функцией времени. В самом деле $\dot{K} = \dot{r}k + r\dot{k} = -dK \Rightarrow K = K_0 \exp(-dt)$.

Существуют еще функции состояния маятника, также изменяющиеся монотонно в силу уравнений (3.1). Можно проверить, что $[(r^2 - k^2)\sin 2\theta]' = -d(r^2 - k^2)\sin 2\theta$, или $(r^2 - k^2)\sin 2\theta = (r_0^2 - k_0^2)\sin 2\theta_0 \exp(-dt)$. Строго монотонно убывающей функцией времени является полная энергия маятника: $E = (r^2 + k^2)/2$.

Чтобы показать это введем в рассмотрение функцию $G = 0.5(r^2 - k^2)\cos 2\theta$. Продифференцируем E и G в силу системы (3.1): $\dot{E} = -dE + gG$, $\dot{G} = gE - dG$. Получена

линейная система двух дифференциальных уравнений относительно переменных E и G , имеющая следующие решения:

$$E = C_1 \exp(-d + g)t + C_2 \exp(-d - g)t, \quad G = C_1 \exp(-d + g)t - C_2 \exp(-d - g)t$$

Поскольку $d > g$ в силу естественной диссипативности, то обе функции E и G являются строго монотонно убывающими.

При $t \rightarrow \infty$ $E \rightarrow C_1 \exp(-d + g)t$, $G \rightarrow C_1 \exp(-d + g)t$, но это означает, что из соотношений $E = (r^2 + k^2)/2$, $G = ((r^2 - k^2)\cos 2\theta)/2$ следует, что либо $k/r \rightarrow 0$ вместе с $\theta \rightarrow 0$, либо $r/k \rightarrow 0$ вместе с $\theta \rightarrow \pi/2$. И то и другое означает, что в пределе траектории маятника в плоскости x, y , представляет собой эллипс, медленно разворачивающийся до совпадения большей полуоси с главной осью наименьшей диссипации.

4. Эволюционные уравнения маятника в динамических переменных. Рассмотрим теперь общий случай неуправляемого маятника, т.е. когда $h, d, g \neq 0$.

Дифференцируя полную энергию в силу системы (1.5), получаем

$$\dot{E} = -dE + ((r^2 - k^2)g \cos 2\theta)/2 \quad (4.1)$$

Вычисление второй производной приводит к выражению

$$\ddot{E} = (g^2 - d^2)E - 2d\dot{E} - ghK \sin 2\alpha \quad (4.2)$$

Произведем аналогичные операции над кинетическим моментом

$$\dot{K} = -dK - ((r^2 - k^2)h \sin 2(\theta - \alpha))/2, \quad \ddot{K} = -(d^2 + h^2)K - 2d\dot{K} + ghE \sin 2\alpha \quad (4.3)$$

Из (4.2) и (4.3) следует система уравнений в динамических переменных E и K , параметрами которой являются только характеристики дефектов d, g, h и α :

$$\ddot{E} + 2d\dot{E} + (d^2 - g^2)E + ghK \sin 2\alpha = 0 \quad (4.4)$$

$$\ddot{K} + 2d\dot{K} + (d^2 + h^2)K - ghE \sin 2\alpha = 0$$

Эти уравнения удобно использовать для идентификации дефектов, исходя из наблюдений процесса затухания свободных колебаний маятника.

Нетрудно получить и общий вид решений системы (4.4). Для этого предварительно выполним замену $E \rightarrow E_*$, $K \rightarrow K_*$:

$$E = E_* \exp(-dt), \quad K = K_* \exp(-dt) \quad (4.5)$$

В новых переменных E_* , K_* уравнения (4.4) принимают вид

$$\ddot{E}_* - g^2 E_* + ghK_* \sin 2\alpha = 0 \quad (4.6)$$

$$\ddot{K}_* + h^2 K_* - ghE_* \sin 2\alpha = 0$$

Характеристическое уравнение этой системы является биквадратным $\lambda^4 + (h^2 - g^2)\lambda^2 + g^2 h^2 \sin^2 2\alpha = 0$. Для того чтобы все корни этого уравнения были действительными, необходимо и достаточно выполнения неравенства $g > (|\sin 2\alpha| + \sqrt{1 + \sin^2 2\alpha})$. Если это неравенство не выполнено, то на кривых $E(t)$ и $K(t)$, описывающих затухание колебаний маятника, будут заметны колебательные составляющие. Поскольку корни характеристического уравнения могут быть получены в явном виде, в явном виде можно выписать и решения системы (4.6), а вместе с ними, в силу замены (4.5) и решения исходной системы (4.4).

Приведем еще одну форму эволюционных уравнений, в которой ценой отказа от линейности уравнений (4.4) достигается введение в уравнения еще одной важной переменной – угла прецессии θ с одновременным понижением порядка этих уравнений.

Вначале заметим, что из соотношений $E = (r^2 + k^2)/2$ и $K = rk$, которые легко следуют из первоначального определения этих переменных и последующей замены

(1.3), вытекает, что $r - k = \sqrt{2(E - K)}$ и $r + k = \sqrt{2(E - K)}$. Откуда имеем $r^2 - k^2 = 2\sqrt{E^2 - K^2}$. После подстановки этого выражения в (3.1), (4.1) и (4.3) получаем

$$\dot{E} = -dE - g\sqrt{E^2 - K^2} \cos 2\theta \quad (4.7)$$

$$\dot{K} = -dK - h\sqrt{E^3 - K^2} \sin 2(\theta - \alpha), \quad \dot{\theta} = -(gE \sin 2\theta) / \sqrt{E^2 - K^2}$$

Уравнения (4.4) и (4.7) получены для неидеального, неуправляемого маятника. Обобщение их на случай, когда в системе присутствует управление, труда не представляет и выполняется такими же выкладками. Однако, преимущество уравнений (4.4) для общего случая перед уравнениями (1.5) уже не столь очевидно.

5. Колебания маятника с управлением по амплитуде. В этом случае $\varepsilon \neq 0$ и можно привести уравнения (1.5) к более простой, безразмерной форме, введя обозначения

$$\begin{aligned} r &= r' \sqrt{2E_0}, & k &= k' \sqrt{2E_0}, & t &= t'(\varepsilon E_0)^{-1} \\ h &= h' \varepsilon E_0, & d &= d' \varepsilon E_0, & g &= g' \varepsilon E_0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

В результате подобных преобразований масштабов измерения переменных и времени, а также параметров, уравнения (1.5) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - d + g \cos 2\theta - r^2 - k^2) + kh \sin 2(\theta - \alpha) \\ \dot{k} &= -rh \sin 2(\theta - \alpha) + k(1 - d - g \cos 2\theta - r^2 - k^2) \\ \dot{\theta} &= -[(r^2 + k^2)g \sin 2\theta - 2rkh \cos 2(\theta - \alpha)] / (r^2 - k^2) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Штрихи здесь для упрощения записей опущены. После решения этих уравнений переменные и параметры снабжаются штрихами с возвращением затем к исходным масштабам по формулам (5.1).

Наибольший интерес для уравнений (4.2) представляют стационарные режимы, для нахождения которых следует решить нелинейную систему:

$$\begin{aligned} r(1 - d + g \cos 2\theta - r^2 - k^2) + kh \sin 2(\theta - \alpha) &= 0 \\ -rh \sin 2(\theta - \alpha) + k(1 - d - g \cos 2\theta - r^2 - k^2) &= 0 \\ (r^2 + k^2)g \sin 2\theta - 2rkh \cos 2(\theta - \alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для того чтобы эта система имела нетривиальное решение следующий определитель должен быть равен нулю

$$\det \begin{vmatrix} 1 - d + g \cos 2\theta - r^2 - k^2 & h \sin 2(\theta - \alpha) \\ -h \sin 2(\theta - \alpha) & 1 - d - g \cos 2\theta - r^2 - k^2 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая его, находим

$$r^2 + k^2 = 1 - d \pm \sqrt{g^2 \cos^2 2\theta - h^2 \sin^2 2(\theta - \alpha)} \quad (5.4)$$

После подстановки (5.4) в первое уравнение (5.3) получаем линейное соотношение между r и k , подстановка которого в (5.4) позволяет найти явную зависимость r и k от θ . Наконец, подстановка таких зависимостей в третье уравнение системы (5.3) приводит к уравнению для нахождения установившегося значения угла прецессии θ .

Получающееся таким образом точное решение системы (4.3) имеет излишне громоздкий вид, сильно упрощающийся, однако, в частных случаях.

Случай 1 ($\alpha = 0$) (главные оси жесткости совпадают с главными осями диссипации). Уравнения (5.9) в этом случае допускают решение $\theta = 0, k = 0, r_0 = \sqrt{1 - d + g}$, а также решение $\theta = \pi/2, k = 0, r_0 = \sqrt{1 - d - g}$.

Уравнения в вариациях в окрестности первого решения имеют вид

$$\delta \dot{r} = -2r_0^2 \delta r \quad \delta \dot{k} = -2g \delta k - 2r_0 h \delta \theta$$

$$\delta \dot{\theta} = (2h/r_0) \delta k - 2g \delta \theta$$

Характеристический определитель этой системы приводит к следующему характеристическому уравнению: $\lambda^2 + 4g\lambda + 4(g^2 + h^2) = 0$. Поскольку $g \geq 0$, то из этого уравнения следует, что первое решение, соответствующее колебаниям вдоль оси минимальной диссипации, всегда устойчиво. Характеристическое уравнение системы в вариации в окрестности второго решения имеет вид $\lambda^2 - 4g\lambda + 4(g^2 + h^2) = 0$. Отсюда следует, что колебания вдоль оси максимальной диссипации всегда неустойчивы.

Случай 2 ($\alpha = \pi/4$) (главные оси жесткости максимально не совпадают с главными осями диссипации): В этом случае из третьего уравнения системы (5.2) следуют три возможности, либо $\theta = 0$, либо $\theta = \pi/2$, либо $(r^2 + k^2)g - 2rkh = 0$.

Если $\theta = 0$, то выражение (5.4) приобретает вид $r_0^2 + k_0^2 = 1 - d + \sqrt{g^2 - h^2}$, что позволяет получить

$$r_0^2 = h^2(1 - d + \sqrt{g^2 - h^2})/2g(g - \sqrt{g^2 - h^2}) \quad (5.5)$$

$$k_0^2 = (1 - d + \sqrt{g^2 - h^2})(2g^2 - 2g\sqrt{g^2 - h^2} - h^2)/2g(g - \sqrt{g^2 - h^2})$$

Исследование устойчивости этого стационарного режима приводит к следующему характеристическому полиному:

$$\lambda^2 + 2(r_0^2 + k_0^2 + \sqrt{g^2 - h^2})\lambda + 2g(r_0^2 - k_0^2) + 2(r_0^2 + k_0^2)\sqrt{g^2 - h^2} = 0$$

и режим будет устойчив, если $r_0^2 - k_0^2 > 0$. Из (5.5) находим:

$$r_0^2 - k_0^2 = (1 - d + \sqrt{g^2 - h^2})\sqrt{g^2 - h^2}/g = (r_0^2 + k_0^2)\sqrt{g^2 - h^2}/g$$

но это выражение всегда положительно и, следовательно, устойчивость доказана.

Если $\theta = \pi/2$, то выражение (5.4) имеет вид $r_0^2 + k_0^2 = 1 - d - \sqrt{g^2 - h^2}$, что дает:

$$r_0^2 = (1 - d - \sqrt{g^2 - h^2})(g + \sqrt{g^2 - h^2})^2/2g(g + \sqrt{g^2 - h^2})$$

$$k_0^2 = (1 - d - \sqrt{g^2 - h^2})h^2/2g(g + \sqrt{g^2 - h^2})$$

$$r_0^2 - k_0^2 = (r_0^2 + k_0^2)\sqrt{g^2 - h^2}/g$$

При этом характеристическое уравнение системы в вариациях получается таким

$$\lambda^2 + 2(r_0^2 + k_0^2 - \sqrt{g^2 - h^2})\lambda - 2(r_0^2 + k_0^2)\sqrt{g^2 - h^2} - 2g(r_0^2 - k_0^2) = 0$$

Свободный член этого уравнения строго отрицателен, следовательно, этот стационарный режим всегда неустойчив.

Подслучай $(r^2 + k^2)g - 2rkh = 0$ оказывается особым. Анализ показывает, что он возможен, если $g = h$. При этом $r_0^2 + k_0^2 = (1 - d)/2$, а угол θ не определен. Маятник движется по окружности, и это движение является устойчивым, но не асимптотически.

Случай 2 разобран также полностью. Из него следует, что, если главные оси жесткости максимально отстоят от главных осей диссипации и диссипативный дефект строго превосходит дефект жесткости ($g > h$), то маятник в пределе описывает эллипс с большой осью, расположенной по оси минимальной диссипации. Если $g = h$, то маятник описывает окружность, если $g < h$, то стационарные режимы, т.е. режимы, при

которых $\dot{r} = \dot{k} = \dot{\theta} = 0$, невозможны. В последнем случае исключением является подслучай, когда $g = 0$, т.е. диссипация изотропна. Тогда из (5.3) следуют дополнительные стационарные режимы $k = 0, \theta = \alpha, r_0^2 = 1 - d$, или $k = 0, \theta = \alpha + \pi/2, r_0^2 = 1 - d$. Колебания маятника осуществляются вдоль главных осей жесткости.

О поведении маятника в малой окрестности этих режимов говорят уравнения в вариациях $\delta \dot{r} = -2r_0^2 \delta r, \delta \dot{k} = \mp 2hr_0 \delta \theta, \delta \dot{\theta} = \pm 2h\delta k/r_0$ (верхний знак для первого решения, нижний — для второго).

Видно, что амплитуда стремится к стационарному значению, а квадратура и угол прецессии изменяются периодически с периодом π/h . Заметим, что эти колебания не демпфируются изотропной диссипацией.

Вернемся к рассмотрению общего случая взаимного расположения главных осей жесткости и главных осей диссипации (α — произвольно). Решение системы (5.3) является периодической функцией α . Как уже отмечалось выше, такое решение может быть получено точно в явном виде. Для того чтобы упростить решение, можно воспользоваться периодичностью его по α и разыскивать из (5.3) только основные гармоники для r, k и θ . Наиболее простые оценки решения можно получить, заметив, что для устойчивых режимов угол θ на концах интервала $0 \leq \alpha \leq \pi/4$ принимает нулевые значения. Полагая в (5.3) θ малым, найдем

$$r(1 - d + g - r^2 - k^2) - kh \sin 2\alpha = 0$$

$$rh \sin 2\alpha + k(1 - d - g - r^2 - k^2) = 0$$

$$(r^2 + k^2)g\theta - 2rkh \cos 2\alpha = 0$$

Из первых двух уравнений находятся r и k в функции α , третье уравнение определяет θ .

Основной вывод этого раздела состоит в том, что в управляемом по амплитуде маятнике плоскость его колебаний стремится занять положение, близкое к главным осям диссипации, если анизотропия диссипативных свойств преобладает над анизотропией упругих. Если преобладает упругая анизотропия, то квадратура и угол прецессии меняются условно периодически, не стремясь ни к каким определенным значениям. Таким образом, определение положения главных осей жесткости по наблюдению предельного поведения управляемого по амплитуде маятника невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.Ф. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. АН. МТТ. 1987. № 6. С. 24–28.
2. Quick W.H. Theory of vibrating string as an angular motion sensor // Trans. ASME. Seria E Appl. Mech. 1964. V. 31, № 3. P. 523–534.
3. Stiles J.C. Vibrating ring gyro, U.S. Patent no: 3, 924, 475, Dec. 9, 1975.
4. Lynch D.D. Vibratory gyro analysis by the method of averaging // 2-я Санкт-Петербург. международ. конф. по гироскоп. и навигации. Санкт-Петербург, 1995. СПб, 1995. Ч. 2. P. 18–26.
5. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 123 с.
6. Журавлев В.Ф. Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 6–19.
7. Léger P. Quapason™—a new low-cost vibrating gyroscope // 3rd Saint Petersburg Intern. Conf. On Integrated Navigation Systems. Saint Petersburg: CSRI "Electropribor". 1996. Pt. 1. P. 143–149.