МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1998

УДК 539.3

© 1998 г. Р. В. ГОЛЬДШТЕЙН, Ю. В. ЖИТНИКОВ

ДЕФОРМАЦИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ТРЕЩИНОВАТОЙ СРЕДЫ

Дается описание эффективной деформации многослойного материала, ослабленного системой трещин. В рассматриваемой среде в отличие от однородной среды с трещинами [1–6], возникают два характерных масштаба усреднения: первый масштаб связан с вычислением эффективных характеристик отдельного трещиноватого слоя; второй – с определением эффективных характеристик многослойной трещиноватой среды. Эффективные характеристики на первом масштабе (внутри отдельного слоя) определяются внутренними напряжениями, возникающими в каждом слое и распределением трещин. Использование метода эффективных характеристик на этом масштабе предполагает, что размер трещин достаточно мал по сравнению с размером слоя. На следующем масштабе при известных эффективных характеристиках отдельных слоев находится эффективная деформация многослойной трещиноватой среды.

Внутренние напряжения, определяющие эффективную деформацию на первом масштабе усреднения, зависят от эффективных характеристик отдельных слоев и многослойной среды в целом. Это определяет существенную нелинейность проблемы и необходимость самосогласованного подхода к описанию эффективной деформации на каждом масштабе. В частности, в работе показано, что внутренние напряжения на первом масштабе усреднения могут быть либо растягивающие, либо сжимающие, в зависимости от характеристик отдельного слоя. Сжимающие напряжения приводят к возникновению областей контакта поверхностей трещин [4–6].

В публикуемой работе предлагается метод описания эффективной деформации многослойной среды. В качестве примера вычисляется эффективная деформация многослойной среды, ослабленной системой невзаимодействующих между собой дисковых трещин.

Методы описания эффективной деформации упругой среды с трещинами рассматривались в [1–3] при растяжении (то есть в отсутствии контакта их поверхностей) и при сжатии [4–6]. Эффективная деформация слоистых композитов без трещин рассматривалась в [7], а в [8, 9] – с учетом трещин. Предложенный в данной работе метод может быть использован при реализации структурно-континуального подхода к анализу разрушения многомасштабных иерархических технических систем [10].

Рассматривается также проблема деформации трещиноватой среды с учетом возникновения в ней областей сжатия, в которых поверхности трещин контактируют и областей растяжения, в которых поверхности трещин раскрыты. Как было показано в [4–6], эффективные характеристики для этих областей различны, что определяет возникновение наведенной неоднородности по эффективным характеристикам трещиноватой среды. Размеры этих областей и внутренние напряжения в них неизвестны и должны определяться самосогласованно в ходе решения задачи. В качестве примера рассматривается деформация трещиноватой пластины с наведенной многослойностью.

1. Постановка проблемы о нахождении эффективных характеристик неоднородной среды. Общие свойства. Рассмотрим некоторые общие свойства деформации упругой среды с различными типами включений, а также соотношение между средней и эффективной деформациями.

Пусть H – характерный масштаб неоднородности среды. Будем считать, что можно выбрать представительную область Ω объема V с характерным размером L, для которой определяются эффективные характеристики. Размер этого объема выберем из условий, допускающих введение понятия эффективных характеристик $L \ll L_0$, где L_0 – характерное расстояние, на котором изменяются макроскопические поля и $L \gg H$.

Для области Ω объема V имеем упругую среду, с матрицей податливости $S_{iklm}^{(\alpha)}$, ослабленную включениями N сортов, занимающих области Ω_α с поверхностями Σ_α и объемом V_α ($\alpha = 1, \ldots, N$) с известными матрицами податливостей $S_{iklm}^{(\alpha)}$.

На границе области Ω считаем заданными напряжения $\sigma_{ik}^{(0)}$, которые, как будет показано ниже, совпадают при определенных условиях со средними по области Ω.

Эффективные поля деформаций в области Ω определим соотношением

$$\varepsilon_{ik}^{(\text{å})} = \frac{1}{V}\int_{\Sigma}(u_i n_k + u_k n_i)dS \tag{1.1}$$

где Σ – поверхность области Ω.

В случае, если Ω – куб со стороной L, то имеем $\varepsilon_{ik}^{(e)} = (u_i^{(e)} n_k + u_k^{(e)} n_i)/L$, где $u_i^{(e)}$ – средние смещения на грани куба с нормалью n_i.

Задача об эффективных характеристиках для неоднородной среды заключается в отыскании определяющих соотношений

$$\varepsilon_{ik}^{(e)} = S_{iklm}^{(e)}\sigma_{lm}^{(0)} \tag{1.2}$$

Установим взаимосвязь между эффективной деформацией среды (1.1) и средней по объему V:

$$\langle \varepsilon_{ik} \rangle = \int_{\Omega} \varepsilon_{ik} dV/V$$

Для определения связи между средней и эффективной деформациями представим соответствующий интеграл в виде суммы интегралов

$$\langle \varepsilon_{ik} \rangle = \left[\int_{\Omega_0} \varepsilon_{ik}^{(0)} dV + \sum_{\alpha=1}^{N} \varepsilon_{ik}^{(\alpha)} dV\right]\frac{1}{V} \tag{1.3}$$

где $\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}$ и ε_{ik} – деформации в областях Ω_α и $\Omega_0 = \Omega \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{N} \Omega_\alpha$.

В случае, если внутри областей нет разрывов смещений (пор или трещин), имеем, используя теорему Гаусса–Остроградского

$$\langle \varepsilon_{ik} \rangle = \varepsilon_{ik}^{(e)} + \frac{1}{2V}\sum_{\alpha=1}^{N}\int_{\Sigma_\alpha}(\Delta_i^{(\alpha)} n_k^{(\alpha)} + \Delta_k^{(\alpha)} n_i^{(\alpha)})dS \tag{1.4}$$

где Σ_α – полная поверхность включений сорта α в области Ω; $\Delta_i^{(\alpha)} = u_i^{(\alpha)} - u_i^{(0)}$, $n_i^{(\alpha)}$ – нормаль к поверхности Σ_α, направленная в матрицу; $u_i^{(\alpha)}$ – смещения на границе области Ω_α со стороны включения ($\alpha = 1, \ldots N$), а $U_i^{(0)}$ – смещение со стороны матрицы.

Утверждение 1. Средняя деформация по объему совпадает с эффективной деформацией среды, если среда является непрерывной, т.е. в ней отсутствуют разрывы смещений (поры или трещины).

Это утверждение следует из (1.4), так как в этом случае на границе включения смещения непрерывны, т.е. $(u_i^{(\alpha)} - u_i^{(0)}) = \Delta_i^{(\alpha)} = 0$.

В случае, если среда в качестве включений содержит поры, $\varepsilon_{ik}^{(\alpha)} \equiv 0$. Из (1.3), (1.4) имеем

$$\langle \varepsilon_{ik} \rangle = \varepsilon_{ik}^{(e)} - \frac{1}{2V}\int_\Sigma (u_i n_k + u_k n_i) dS$$

где Σ – полная поверхность пор области Ω, U_i – смещение на поверхности пор. Это же выражение верно и для трещин, если Σ – полная поверхность трещин, n_i – нормаль к трещине, а u_i – скачок смещений на трещине.

Таким образом, при наличии пор или/и трещин эффективная деформация и средняя не совпадают.

Рассмотрим теперь соотношения между средними напряжениями по объему

$$\langle \sigma_{ik} \rangle = \frac{1}{V}\int \sigma_{ik} dV$$

и заданными напряжениями $\sigma_{ik}^{(0)}$ на границе представительного объема Ω. Для получения этого соотношения воспользуемся тождеством, которое может быть доказано с помощью теоремы Гаусса–Остроградского

$$\delta_{ik} = \frac{1}{2V}\int_\Sigma (x_i n_k + x_k n_i) dS \tag{1.5}$$

где δ_{ik} – символ Кронекера.

Действительно, с учетом тождества (1.5) имеем следующее соотношение

$$\langle \sigma_{ik} \rangle = \frac{1}{2V}\int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij} x_k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ji} x_k)\right] dV = \frac{1}{2V}\int_\Sigma [(\overset{0}{\sigma}_{ij} n_j x_k + \overset{0}{\sigma}_{ji} n_i x_k)] dS = \overset{0}{\sigma}_{ik}$$

Интеграл по границе включений Σ_α исчезает, так как нагрузка на поверхностях неоднородностей самоуравновешенная, т.е. $\overset{0}{\sigma}_{ij} n_j$ изменяется непрерывно при переходе через поверхность включения.

Утверждение 2. В отсутствие объемных сил напряжения, приложенные на границе представительного объема $\overset{0}{\sigma}_{ik}$, совпадают со средними по объему $\langle \sigma_{ik} \rangle$.

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении эффективной энергии деформации $w^{(e)}$ среды с эффективными характеристиками и ее связь со средней энергией деформации $\langle W \rangle$. Эффективную энергию деформации определим следующим образом:

$$\delta W^{(e)} = \frac{1}{2}\sigma_{ik}^{(0)} \varepsilon_{ik}^{(e)}$$

Среднюю энергию деформации $\langle W\rangle$ вычисляем аналогично вычислению средней деформации (1.3), (1.4):

$$\langle W\rangle = \frac{1}{2}\sigma_{ik}^{(0)}\varepsilon_{ik}^{(e)} + \frac{1}{4V}\sum_{\alpha=1}^{N}\int_{\Sigma_\alpha}\sigma_{ik}(\Delta_i^{(\alpha)}n_k + \Delta_k^{(\alpha)}n_i)dS$$

В этом выражении обозначения такие же, как в (1.4). Если на границе включений, смещения изменяются непрерывно, то $\Delta_l^{(\alpha)} = 0$ и можно сделать следующее утверждение.

Утверждение 3. Средняя энергия деформации неоднородной среды с включениями совпадает с эффективной энергией деформации, если смещения в ней изменяются непрерывно.

В случае, если в качестве неоднородной среды имеется трещиновато-пористая среда при отсутствии нагрузки на поверхностях дефектов, то $\sigma_{ik}n_k = 0$. В этом случае имеет место утверждение.

Утверждение 4. При деформации трещиновато-пористой среды средняя энергия деформации совпадает с эффективной при отсутствии нагрузки на поверхностях дефектов.

В частности, если среда нагружена только внутренними нагрузками, то есть $\sigma_{ik}^{0} = 0$, то в этом случае, эффективная энергия равна нулю, а средняя энергия отлична от нуля. Это связано с тем, что средние напряжения в среде, нагруженной только внутренними нагрузками равны нулю в силу условий равновесия. Последнее означает, что работа внешних усилий над изменением энергии деформации твердого тела отсутствует и, следовательно, энергия деформирования эффективной среды равна нулю.

Замечание. Неоднородность среды может быть обусловлена структурной неоднородностью различных масштабов $H_1, \ldots, H_r$ (где r – ранг масштаба усреднения [10]). Тогда полагаем, что для каждого масштаба неоднородности можно выбрать масштабы усреднения $L_1, \ldots, L_r$, для которых выполнены приведенные выше условия. При этом нахождение эффективных характеристик на масштабе L_r включает процесс усреднения на каждом из предыдущих масштабов.

2. Вычисление эффективных характеристик многослойной среды. Рассмотрим теперь многослойную среду с периодической укладкой N анизотропных (ортотропных) слоев, толщины которых h_α ($\alpha = 1, \ldots, N$). Пусть $S_{iklm}^{(\alpha)}$ – матрица податливости каждого слоя. Будем считать, что представительный объем Ω для многослойного материала выбран из условий, изложенных в п. 1, а на его границе задан тензор напряжений $\sigma_{ik}^{(0)}$. Задача о нахождении эффективных характеристик заключается в установлении соотношений (1.2) между $\sigma_{ik}^{(0)}$, $\varepsilon_{ik}^{(e)}$, где $\varepsilon_{ik}^{(e)}$ определяется соотношением (1.1), а в отсутствие трещин в слоях в соответствии с утверждением 1 совпадает со средней деформацией и может быть найдена путем усреднения деформации по объему.

Будем полагать, что слои упругие и однородные и внутри них особенностей структуры нет. В этом случае, среда является периодической в направлении оси x_3, нормальной плоскости укладки слоев с периодом $H = \sum h_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$) (h_α – толщины слоев, N – число слоев в периоде), а на бесконечности ($L_\alpha \gg \max(h_\alpha, H)$) заданы напряжения $\sigma_{ik}^{(0)}$. В силу постановки задачи внутрислойная деформация $\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}$ и напряжения $\sigma_{ik}^{(\alpha)}$ будут зависеть только от x_3: $\sigma_{ik}^{(\alpha)} = \sigma_{ik}^{(\alpha)}(x_3)$, $\varepsilon_{ik}^{(\alpha)} = \varepsilon_{ik}^{(\alpha)}(x_3)$. Определим эти зависимости из уравнений равновесия и совместности деформаций.

Из уравнений равновесия $\sigma_{ik,\,k} = 0$ имеем, что $\sigma_{i3} = \text{const}$ ($i = 1, 2, 3$) – не зависят от x_3, а остальные компоненты-функции координаты x_3, которые могут быть определены из уравнения совместности деформаций $\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_3)$, $\sigma_{12} = \sigma_{12}(x_3)$, $\sigma_{22} = \sigma_{22}(x_3)$. Поскольку $\sigma_{i3} = \text{const}$, то из условия на бесконечности

$$\sigma_{i3} = \sigma_{i3}^{(0)} \tag{2.1}$$

Используя выражение для тензора деформации $\varepsilon_{ik} = \dfrac{1}{2}(u_{i,\,k} + u_{k,\,i})$, определим, интегрируя компоненты смещения

$$\begin{gathered} u_1 = \varepsilon_{11}(x_3)x_1 + f_1(x_2, x_3), \quad u_2 = \varepsilon_{22}(x_3)x_2 + f_2(x_1, x_3) \\ u_3 = \int \varepsilon_{33} dx_3 + f_3(x_1, x_2) \end{gathered} \tag{2.2}$$

где функции f_i необходимо определить.

Используя выражения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13}(x_3) &= \frac{1}{2}\varepsilon_{11,\,3}x_1 + \frac{1}{2}(f_{1,\,3}(x_2, x_3) + f_{3,\,1}(x_1, x_2)) \\ \varepsilon_{12}(x_3) &= \frac{1}{2}(f_{1,\,2}(x_2, x_3) + f_{2,\,1}(x_1, x_3)), \\ \varepsilon_{23}(x_3) &= \frac{1}{2}\varepsilon_{22,\,3}x_2 + \frac{1}{2}(f_{2,\,3}(x_1, x_3) + f_{3,\,2}(x_1, x_2)) \end{aligned} \tag{2.3}$$

можно получить структуру формул для функций f_1, f_2, f_3:

$$f_1(x_2, x_3) = R_1(x_3)x_2 + C_1(x_3), \quad f_2(x_1, x_3) = R_2(x_3)x_1 + C_2(x_3) \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered} f_3(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}(\varepsilon'_{11,\,3}x_1^2 + 2\varepsilon_{12,\,3}x_1x_2 + \varepsilon'_{22,\,3}x_2^2) \\ R_{1,\,3} = R_{2,\,3} = \varepsilon_{12,\,3} = \text{const}, \quad \varepsilon'_{11,\,3} = \text{const}, \quad \varepsilon'_{22,\,3} = \text{const}. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Выражения (2.4), (2.5) для функций f_i получены из формул для деформаций (2.3) при условии, что они зависят только от координаты x_3. Из формулы (2.5) следует, что деформации ε_{11}, ε_{22}, ε_{12} – линейные функции x_3.

Выпишем теперь краевые условия непрерывности смещения на границе раздела двух сред $u_i^{(\alpha)}(x_1, x_2, x_3) = u_i^{(\alpha+1)}(x_1, x_2, x_3)$, ($i = 1, 2, 3$; $\alpha = 1, \ldots, N-1$). Из этих соотношений и из выражения для смещений (2.3), с учетом соотношений (2.4), (2.5) имеем

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11}^{(\alpha)} = B_1x_3 + F_1, \quad \varepsilon_{12}^{(\alpha)} = B_3x_3 + F_3 \\ \varepsilon_{22}^{(\alpha)} = B_2x_3 + F_2 \\ \varepsilon_{13}^{(\alpha)} = \varepsilon_{13}^{(\alpha)}(x_3), \quad \varepsilon_{23}^{(\alpha)} = \varepsilon_{23}^{(\alpha)}(x_3), \quad \varepsilon_{33}^{(\alpha)} = \varepsilon_{33}^{(\alpha)}(x_3) \end{gathered} \tag{2.6}$$

где постоянные B_i, F_i не зависят от координат. Из условия периодичности свойств вдоль оси x_3 имеем $B_i \equiv 0$, а $\varepsilon_{11}^{(\alpha)} = F_1$, $\varepsilon_{22}^{(\alpha)} = F_2$, $\varepsilon_{12}^{(\alpha)} = F_3$ в каждом слое.

Таким образом, приходим к выводу, что деформация $\varepsilon_{ik}^{(\alpha)} = \text{const}$ ($i, k = 1, 2$) и одинакова для всех слоев, а $\varepsilon_{i3}^{(\alpha)} = \varepsilon_{i3}^{(\alpha)}(x_3)$ функции координаты x_3. Для того чтобы определить деформации, воспользуемся определяющими соотношениями в случае ортотропной среды [11]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_1}\sigma_{33}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu_{12}} \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_2}\sigma_{33}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{22}}{2\mu_{23}} \\
\varepsilon_{33} &= \frac{\sigma_{33}}{E_3} - \frac{\nu_{13}}{E_3}\sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_3}\sigma_{22}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu_{13}} \\
\nu_{21}E_2 &= \nu_{12}E_1, \quad \nu_{31}E_3 = \nu_{13}E_1, \quad \nu_{32}E_3 = \nu_{23}E_2
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где ν_{ik}, E_i – технические упругие постоянные.

В определяющих соотношениях напряжения $\sigma_{i3}^{(\alpha)} = \sigma_{i3}^{(e)}$ $(i = 1, 2, 3)$ известны и одинаковы в каждом слое (2.1). Напряжения $\sigma_{ik}^{(\alpha)}$ $(i, k = 1, 2)$ неизвестны и различны в каждом из слоев. Используя условия равенства соответствующих компонент деформации $\sigma_{ik}^{(\alpha)} =$ $= \mathrm{const}$ $(i, k = 1, 2)$ в каждом слое и интегральное условие равновесия, получим

$$\begin{aligned}
S_{iklm}^{(\alpha)}\sigma_{ml}^{(\alpha)} &= S_{iklm}^{(\alpha+1)}\sigma_{ml}^{(\alpha+1)} \quad (\alpha = 1, \dots N-1) \\
\sum_{\alpha=1}^{N-1}\sigma_{ik}^{(\alpha)}h^{(\alpha)} &= \sigma_{ik}^{(e)}H \quad (i, k = 1, 2)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где $S_{iklm}^{(\alpha)}$ – матрица податливости, определяемая в каждом слое соотношениями (2.7).

Решая систему уравнений (2.8), определим неизвестные компоненты тензора напряжений $\sigma_{ik}^{(\alpha)}$ $(i, k = 1, 2)$ в каждом слое в зависимости от заданного тензора напряжений $\sigma_{ik}^{(0)}$. Затем, подставляя эти выражения в определяющие соотношения (2.7), получим деформации $\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}$ в каждом из слоев, которые равны между собой и совпадают с эффективной деформацией. Таким образом, имеем полный тензор деформации $\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}$, эффективную деформацию $\varepsilon_{ik}^{(e)}$ и полный тензор напряжений $\sigma_{ik}^{(\alpha)}$ для многослойного материала, определяемый из решения (2.8) через тензор напряжений $\sigma_{ik}^{(0)}$. При этом, $\sigma_{ik}^{(\alpha)}$, $\varepsilon_{j3}^{(\alpha)}$ $(i, k = 1, 2; j = 1, 2, 3)$ являются периодическими функциями координаты x_3, а $\varepsilon_{ik}^{(\alpha)}$; $\sigma_{j3}^{(\alpha)}$ – постоянными.

В качестве примера рассмотрим слоистый композит, состоящий из периодически уложенных двух упругих изотропных слоев с упругими модулями E_α, ν_α, при одноосном нагружении $\sigma_{ij} = \sigma\delta_{i1}\delta_{j1}$. В этом случае отличны от нуля компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}^{(\alpha)}$, $\sigma_{22}^{(\alpha)}$. Внутрислойное напряжение определяется после решения системы четырех алгебраических уравнений (2.8):

$$\begin{aligned}
\sigma_{22}^{(1)} &= \sigma H E_1(\nu_1 - \nu_2)/h_1\xi F, \quad \sigma_{22}^{(2)} = \sigma H E_1(\nu_2 - \nu_1)/h_2\xi F \\
\sigma_{11}^{(1)} &= \beta\sigma H\xi h_1 - h_1(\nu_2\beta\sigma_{22}^{(2)} - \nu_1\sigma_{22}^{1}) \\
\sigma_{11}^{(2)} &= \sigma H/\xi h_1 + \nu_2\beta\sigma_{22}^{(2)}/\xi - \nu_1\sigma_{22}^{(1)}/\xi \\
F &= E_2h_2 + E_1h_1 + E_1(\nu_1^2h_1^2 - \nu_2^2h_2^2)/(\xi h_1h_2) \\
\xi &= h_2/h_1 + \beta, \quad \beta = E_1/E_2
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Из этой системы видно, что внутрислойные напряжения $\sigma_{11}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) отличны от заданных σ за счет неоднородности и возникают напряжения вдоль оси x_2, определяемые разностью коэффициентов Пуассона каждого из слоев. При этом для слоя, у которого коэффициент Пуассона максимален, напряжения по знаку совпадают с приложенным вдоль оси x_1. Следовательно, при растяжении вдоль оси x_1 в этом слое будут максимальные растягивающие напряжения, а при сжатии – сжимающие. Именно эти условия и определяют возможный процесс разрушения в слоях.

Таким образом, напряжения, возникающие в каждом слое будут зависеть не только от внешнего тензора напряжений, но и от упругих свойств каждого слоя, и при изменении этих свойств будут изменяться. Одним из следствий такого рассмотрения будет влияние трещиноватости на уровень напряженного состояния в слоях. Действительно, при описании эффективных характеристик однородных сред с трещинами среднее поле напряжений совпадает с заданным. В случае многослойных сред наличие трещиноватости изменяет упругие свойства слоев и как следствие, напряженное состояние в каждом слое. Следовательно, эффективная деформация многослойной среды и внутренние напряжения будут существенно зависеть от трещиноватости материала.

Замечание. Выражения (2.6) для эффективной деформации многослойной среды могут быть использованы при описании деформации тонких многослойных пластин. Систему координат пластин поместим в центре пластины толщиной $2H$.

Предполагая, что пластина нагружена только по торцам, имеем $\sigma_{i3}^{(e)} = 0$ (а следовательно, $\varepsilon_{13}^{(\alpha)} = \varepsilon_{23}^{(\alpha)} = 0$). Записывая определяющие соотношения (2.7) для $\varepsilon_{11}^{(\alpha)}$ и $\varepsilon_{22}^{(\alpha)}$ через матрицу жесткостей, с учетом $\sigma_{33}^{(\alpha)} = 0$, имеем: $\sigma_{ik}^{(\alpha)} = C_{iklm}^{(\alpha)}\varepsilon_{lm}$ ($i, k, e, m = 1, 2$), $\sigma_{13}^{(\alpha)} = 2\mu_{12}\varepsilon_{12}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, \ldots N$).

С учетом выражения для деформации (2.6) получим

$$\sigma_{ik}^{(\alpha)} = C_{ikem}^{(\alpha)}(B_{(3)}x_3 + F_{(e)})\varepsilon_{em}, \quad \sigma_{ik}^{(\alpha)} = 2\mu_{12}(B_3x_3 + F_3) \tag{2.10}$$

Для определения B_i, F_i ($i = 1, 2, 3$) необходимо воспользоваться заданными выражениями полной силы и моментов

$$T_{ik} = \int_{-H}^{H}\sigma_{ik}dx_3, \quad M_{ik} = \int_{-H}^{H}\sigma_{ik}x_3dx_3$$

Интегрируя (2.10), приходим к системе алгебраических уравнений для определения коэффициентов B_i, F_i, совпадающей с полученной в [11].

Действительно, введем обозначения

$$e_{ik} = \varepsilon_{ik}(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{2H}\int_{-H}^{H}\varepsilon_{ik}(x_1, x_2, x_3)dx_3 \equiv \langle\varepsilon_{ik}(x_1, x_2, x_3)\rangle$$

(последние два равенства получены с учетом выражения для деформации (2.6)). Из определяющих соотношений (2.7) с учетом $\sigma_{i3}^{(0)} = 0$, имеем

$$\begin{gathered}\sigma_{11}^{(\alpha)} = \varepsilon_{11}E_{11} + \varepsilon_{22}E_{22}, \quad \sigma_{22}^{(\alpha)} = \varepsilon_{11}E_{21} + \varepsilon_{22}E_{22} \\ \sigma_{12}^{(\alpha)} = 2\mu_{12}^{(\alpha)}E_{12}^{(\alpha)} \quad (\alpha = 1, \ldots N) \\ E_{11} = E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}), \quad E_{12} = E_{21} = E_1\nu_{12}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) = E_2\nu_{21}/(1-\nu_{12}\nu_{21}); \\ E_{22} = E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21})\end{gathered} \tag{2.11}$$

Выражения для деформаций, представленные в (2.6), теперь будут иметь вид

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + B_1 x_3, \quad \varepsilon_{12} = e_{12} + B_3 x_3, \quad \varepsilon_{22} = e_{22} + B_2 x_3$$

Интегрируя выражения (2.11) для полных сил и моментов, приходим к системе алгебраических уравнений, совпадающей с приведенной в [11]:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= e_{11}C_{11} + e_{22}C_{12} + K_{11}B_1 + K_{12}B_2 \\
T_{22} &= e_{11}C_{21} + e_{22}C_{22} + K_{21}B_1 + K_{22}B_2 \\
T_{12} &= e_{12}C_{33} + K_{33}B_3 \\
M_{11} &= e_{11}K_{11} + e_{22}K_{12} + D_{11}B_1 + D_{12}B_2 \\
M_{22} &= e_{11}K_{21} + e_{22}K_{22} + D_{21}B_1 + D_{22}B_2 \\
\mathbf{M}_{12} &= \mathbf{e}_{12}\mathbf{K}_{21} + \mathbf{D}_{33}\mathbf{B}_3
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$C_{ik} = \int_{-H}^{H} E_{ik}dx_3, \quad K_{ik} = \int_{-H}^{H} E_{ik}x_3dx_3; \quad D_{ik} = \int_{-H}^{H} E_{ik}x_3^2dx_3, \quad C_{33} = 2\int_{-H}^{H} \mu_{12}dx_3$$

$$K_{33} = 2\int_{-H}^{H} \mu_{12}x_3dx_3, \quad D_{33} = 2\int_{-H}^{H} \mu_{12}x_3^2dx_3$$

Система (2.12) показывает, что средние деформации и коэффициенты B_i для неоднородных пластин взаимосвязаны. Получим теперь уравнение смещения средней линии $W = u_3\ (x_1, x_2, 0)$, которая, согласно (2.2) определяется функцией $f_2(x_1, x_2) \equiv W$. Используя (2.4) и (2.6), имеем

$$W \equiv f_3(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}(\varepsilon_{11,3}x_1^2 + 2\varepsilon_{12,3}x_1x_2 + \varepsilon_{22,3}x_2^2) \tag{2.13}$$

Используя выражения для средней деформации, получим после дифференцирования (2.13) по x_1, x_2, соответственно, известные соотношения

$$B_1 = -\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}, \quad B_2 = -\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}, \quad B_3 = -\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Таким образом, решая (2.12) при известных полных силе и моментах, находим B_i. Подставляя в (2.13), получаем прогиб средней линии

$$W = -\frac{1}{2}(B_1x_1^2 + 2B_3x_1x_2 + B_2x_2^2)$$

3. Деформация трещиноватых слоистых сред. Как было показано выше, при нагружении слоистой среды внутри каждого слоя возникают внутренние напряжения, определяемые условиями нагружения на бесконечности и упругими характеристиками каждого слоя.

Рассмотрим случай, когда слои ослаблены изотопными и однородными распределениями дисковых, не взаимодействующих между собой трещин радиуса R_α, плотности N_α, размеры которых $R_\alpha \ll h_\alpha$ ($\alpha = 1, \ldots N$). При выполнении последнего условия задачу о нахождении эффективных характеристик слоя можно ставить, как для бесконечной среды с трещинами при заданном на бесконечности тензоре напряжений. Последний на масштабе слоев совпадает с внутренними напряжениями в каждом слое. Основная трудность при определении эффективных характеристик $S_{ikem}^{(\alpha)}$ для каждого слоя связана с нелинейностью задачи: действительно, внутренние напряжения зависят от эффективных характеристик, а последние в свою очередь зависят от внутренних напряжений. Так, в случае, если в слоях имеется хотя бы одна площадка с нормалью n_i, где выполняется условие $\sigma_{ik}^{(\alpha)} n_i n_k < 0$, то возникают сжимающие напряжения. Если не существуют такой площадки, то для любой n_i, $\sigma_{ik}^{(\alpha)} n_i n_k > 0$ и напряжения будут растягивающие. Известно, что в зависимости от вида напряженного состояния (сжатия или растяжение) трещиноватая среда имеет различные модули. В частности, для упругой среды, ослабленной изотропным и однородным распределением дисковых трещин по размерам $F(R)$ с плотностью в единице объема N, имеем

$$E_\gamma = E_0(1 - A_\gamma(\nu_0)\Omega), \quad \nu_\gamma = \nu_0(1 - B_\gamma(\nu_0)\Omega) \tag{3.1}$$

где $\gamma \equiv t$ – растяжение, $\gamma = c$ – сжатие. При растяжении [1]:

$$A_t = 16(1-3\nu_0)/45(2-\nu_0), \quad B_t = 16(3-\nu_0)(1-\nu_0)/15(2-\nu_0)$$

при сжатии [4]:

$$A_c = 2f, \quad B_c = -f(1-2\nu_0), \quad f = 32(1-\nu_0^2)/45(2-\nu_0)$$

$$\Omega = N\overline{R^3}, \quad \overline{R^3} = \int_0^\infty R^3 F(R)dR$$

В качестве примера влияния трещиноватости на эффективные характеристики рассмотрим двухслойный композит, состоящий из упругих слоев с упругими модулями $E_0^{(\alpha)}\nu_0^{(1)} = \nu_0^{(2)} = \nu_0$ ($\alpha = 1, 2$), при одноосном нагружении $\sigma_{ij} = \sigma\delta_{i1}\delta_{j1}$, ослабленных изотропными распределениями по размерам дисковых трещин с параметрами Ω_2, Ω_1. Согласно (2.9) при $\nu_2 = \nu_1$ внутренние напряжения будут определятся $\sigma_{11}^{(1)}$, $\sigma_{11}^{(2)}$. Подставляя (3.1) в (2.9), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= \sigma_{11}^{0(1)}\left[1 + \frac{h_2}{h_1\xi}A_\gamma(\nu_0)(\Omega_2 - \Omega_1)\right] \\ \sigma_{11}^{(2)} &= \sigma_{11}^{0(2)}\left[1 - \frac{\beta A_\gamma(\nu_0)}{\xi}(\Omega_2 - \Omega_1)\right] \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\sigma_{11}^{0(1)} = \sigma\beta H/\xi h$, $\sigma_{11}^{0(2)} = \sigma H/\xi h_1$ – напряжения в слое без учета трещиноватости; A_γ зависят от вида напряженного-состояния (при сжатии $\gamma = c$, при растяжение $\gamma = t$).

Из соотношений (4.2) следует, что если $\Omega_2 > \Omega_1$, то в первом слое положительна добавка к $\sigma_{11}^{0(1)}$, если $\Omega_2 < \Omega_1$ – то во втором. Следовательно, при $\Omega_2 > \Omega_1$ уровень напряжений в первом слое возрастает, если $\Omega_2 < \Omega_1$, то наоборот. Это означает, что в многослойной пластине процесс накопления повреждений в первом приближении устойчив – напряжения в слое с большей трещиноватостью падают. При больших концентрациях трещин необходимо учитывать взаимодействие трещин и эффекты второго порядка по Ω.

Приведенный пример показывает, что процесс накопления повреждений в многослойной пластине существенно нелинеен. Рассмотрим на примере двухслойной пластины уравнения, определяющие изменение напряжений при возрастании $\Omega_2 = \Omega_2(t)$, $\Omega_1 = \Omega_1(t)$ со временем. Предположим, что $\Omega_1(t)$, $\Omega_2(t)$ изменяются на $\delta\Omega_1$, $\delta\Omega_2$, а $\sigma_{11}^{(\alpha)}$ на $\delta\sigma_{11}^{(\alpha)}$ при возрастании времени на δt. Тогда, рассматривая выражения (3.2) как формулу изменения напряженного состояния при изменении упругих модулей за счет приращения трещиноватости на $\delta\Omega_2$, $\delta\Omega_1$ получим следующие кинетические уравнения:

$$\frac{d\ln\sigma_{11}^{(1)}}{dt} = \frac{h_2}{h_1\xi(t)}A_\gamma(\nu_0)\left(\frac{d\Omega_2}{dt}-\frac{d\Omega_1}{dt}\right)$$

$$\frac{d\ln\sigma_{11}^{(2)}}{dt} = -\frac{\beta(t)}{\xi(t)}A_\gamma(\nu_0)\left(\frac{d\Omega_2}{dt}-\frac{d\Omega_1}{dt}\right) \tag{3.3}$$

$$\sigma_{11}^{(1)}(t)h_1+\sigma_{11}^{(2)}(t)h_2 = \sigma(t)H$$

$$\xi = h_1/h_2+E_1(t)/E_2(t), \quad \beta(t) = E_1(t)/E_2(t)$$

где $E_1(t)$ и $E_2(t)$ определяются выражениями (3.1).

Для того чтобы рассчитать накопление повреждений в каждом слое, необходимо к (3.3) добавить уравнения, связывающие параметры повреждаемости Ω_2, Ω_1 с напряжениями. Уравнения (3.3) позволяют рассчитать процесс накопления повреждений в двухслойном композите при заданной функции $\sigma(t)$.

4. Деформация трещиноватой пластины. Рассмотрим упругую пластину единичной ширины, толщиной $2H$ и длиной $2l$, ослабленную изотропным распределением дисковых трещин по размерам $F(R)$ с их плотностью в единице объема N (масштаб по оси x_3 в этом случае $2H$, и, следовательно, $R \ll H$). Систему координат $X_1X_2X_3$ поместим в центре пластины (ось x_3 – нормальна к плоскости пластины). Деформацию трещиноватой пластины рассмотрим при чистом изгибе моментом $M_{11} = M > 0$. В этом случае в пластине возникнут области растяжения, примыкающие к верхней границе пластины и сжатия, у нижней границы пластины. Упругие модули в этих областях определяются соотношениями (3.1). Следовательно, в пластине возникнут области наведенной неоднородности (двухслойности), граница между которыми неизвестна и должна быть определена в ходе решения задачи.

Пусть $H \le x_3 \le h$ – область растяжения ($0 \le \sigma_{11}$), а $-H \le x_3 \le h$ – область сжатия ($\sigma_{11} < 0$). Тогда уравнения, определяющие средние деформации пластины e_{ij} и отличный от нуля изгибный коэффициент B_1, имеют согласно (2.12) вид

$$T_{11} = C_{11}e_{11}+K_{11}B_1, \quad M_{11} = K_{11}e_{11}+D_{11}B_1$$

$$C_{11} = h(E_{11}^{(c)}-E_{11}^{(t)})+H(E_{11}^{(t)}+E_{11}^{(c)})$$

$$K_{11} = (H^2-h^2)(E_{11}^{(t)}-E_{11}^{(c)})/2 \tag{4.1}$$

$$D_{11} = h^3(E_{11}^{(c)}-E_{11}^{(t)})/3+H^3(E_{11}^{(t)}+E_{11}^{(c)})/3$$

$$E_{11}^{(\gamma)} = E_1^{(\gamma)}/(1-\nu_0^2), \quad \gamma = t, c$$

Решая систему (4.1) имеем, при условии $T_{11} = 0$, $M_{11} = M$:

$$e_{11} = \frac{K_{11}M}{K_{11}^2-D_{11}C_{11}}, \quad B_1 = -\frac{C_{11}M}{K_{11}^2-D_{11}C_{11}}$$

Тогда согласно (2.11) получим распределения напряжений $\sigma_{11}(x_3)$ по толщине пластины

$$\sigma_{11} = E_{11}^{(t)}(e_{11}+B_1x_3), \quad h \le x_3 \le H$$

$$\sigma_{11} = E_{11}^{(c)}(e_{11}+B_1x_3), \quad -H \le x_3 \le h \tag{4.2}$$

Неизвестная граница h, определяется из условия $\sigma_{11}(h) = 0$. В итоге приходим к соотношению $h = K_{11}/C_{11}$. В первом приближении, учитывая малую концентрацию трещин Ω, имеем $h = H\Omega D(\nu_0)/4$, $D(\nu_0) = A_t(\nu_0) - A_c(\nu_0) > 0$. Таким образом, эффективно трещиноватая пластина становится неоднородной, двухслойной, с толщиной слоев $H-h$ и $H+h$. С увеличением трещиноватости Ω, область растяжения будет уменьшаться. Средние деформации и изгибный коэффициент B_1 определяются в первом приближении следующими формулами:

$$B_1 = 3M(1-\nu_0^2)(1-\Omega D_1(\nu_0)/2)/(2H^3E_0)$$
$$D_1(\nu_0) = A_c(\nu_0) + A_t(\nu_0)$$

Таким образом, как следствие наведенной неоднородности в пластине при чистом изгибе возникают продольные деформации, приводящие к уменьшению ее длины (сжатию), а изгибные коэффициенты B_1 уменьшаются.

В качестве другого примера рассмотрим задачу Эйлера о потере устойчивости пластины единичной ширины толщиной $2H$, длиной $2l$, в системе координат $X_1X_2X_3$ ($|x_3| \le H$, $|x_1| \le 1$) при продольном сжатии $\sigma_{ij} = -\sigma\delta_{il}\delta_{jl}$ ($i, j = 1, 2$), $\sigma > 0$. Момент силы в сечении $M = -2\sigma HW(x_1)$ ($W(x_1)$ – прогиб пластины). Используя соотношения (2.12), (2.13) и (3.1) получим в первом приближении уравнение изгиба

$$d^2W/dx_1^2 + \omega^2 W(x_1) = 4\sigma HK_{11}/(C_{11}D_{11} - K_{11}^2)$$
$$\omega^2 = \frac{6\sigma}{H^2E_0}(1-\nu_0^2)[1-\Omega(D(\nu_0)-D_1(\nu_0))/2]$$

Решение этого уравнения при краевых условиях $W(\pm L) = 0$, является $W = A\cos\pi x_1/L$ при условии $\omega L = \pi$, а критическое напряжение определяется выражением

$$\sigma = \frac{\Pi^2H^2E_0}{6L^2(1-\nu_0^2)}[1+\Omega(D(\nu_0)-D_1(\nu_0))/2].$$

Так как $D(\nu_0) < D_1(\nu_0)$ получаем, что критическое напряжение уменьшается для трещиноватой пластины с увеличением концентрации трещин Ω. В частности, для концентрации трещин $\Omega = 0.2$ уменьшение критических напряжений порядка 17%.

Отметим, что предложенный способ подсчета эффективных характеристик в среде (элементе конструкции) с несколькими характерными масштабами структуры и трещиноватости приводит к регулярному алгоритму расчета эволюции зон наведенной неоднородности и анизотропии при заданной истории нагружения и, следовательно, может быть положен в основу программы оценки остаточной несущей способности элементов конструкций с учетом накопления в них повреждений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-15-96251).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Салганик Р.Л.* Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 4. С. 149–158.
2. *Вавакин А.С., Салганик Р.Л.* Об эффективных характеристиках сред с изолированными неоднородностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 65–75.
3. *Вавакин А.С., Салганик Р.Л.* Эффективные упругие характеристики тел с изолированными трещинами, полостями и жесткими неоднородностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 2. С. 95–107.
4. *Житников Ю.В., Тулинов Б.М.* Расчет деформационных свойств твердого тела с закрытой трещиноватостью в сложнонапряженном состоянии // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 117–124.
5. *Walsh J.* The effects of cracks on the uniaxial elastic compression of rocks // J. Geophys. Res. 1965. V. 70. № 2. P. 399–411.
6. *Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В.* Деформация трещиноватой среды при сдвиговом нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1993. № 3. С. 161–168.

7. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
8. *Mura T.* Micromechanics of defects in solids. 2 ed. Dordrecht: Kluwer, 1987. 494 p.
9. *Leguillon D., Sanchez-Palencia E.* On the behavior of a cracked elastic body with (or without) fracture // J. de Mecanique Theor. et Appl. 1982. V. 1. № 2. P. 195–209.
10. *Гольдштейн Р.В.* О структурно-континуальном подходе в механике катастрофического разрушения сложных технических систем // Док. РАН. 1993. Т. 330. № 1. С. 45–47.
11. *Хорошун Л.П., Козлов С.В., Иванов Ю.А., Кошевой И.К.* Обобщенная теория неоднородных по толщине пластин и оболочек. Киев: Наук. думка, 1988. 152 с.

Москва — Поступила в редакцию 10.VI.1998