

УДК 517.925.4+531.552

© 1998 г. М. В. ШАМОЛИН

СЕМЕЙСТВО ПОРТРЕТОВ С ПРЕДЕЛЬНЫМИ ЦИКЛАМИ В ПЛОСКОЙ ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СРЕДОЙ

Рассматриваемая динамическая модель движения твердого тела в сопротивляющейся среде при условиях струйного или отрывного обтеканий [1, 2] дает возможность глобального качественного описания расположения фазовых траекторий в многомерном фазовом пространстве. Выделены такие условия плоскопараллельного движения тела в среде, при которых поступательное движение связано с вращательным. При этом линия действия силы, приложенной к телу со стороны среды, не меняет своей ориентации относительно тела, а лишь может смещаться параллельно самой себе в зависимости от одного параметра – угла атаки. Ранее [3] для линейной математической модели торможения твердого тела показано, что режим поступательного движения, как правило, неустойчив. Исследование возможных колебательных режимов в системе требует учета нелинейных эффектов [4–6] и развития аналитического аппарата, облегчающего проведение глобального качественного анализа. Исследуется самый интересный в прикладном отношении случай – режим свободного торможения тела, как и в [3–6]. Но, в отличие от них, полученное двухпараметрическое семейство фазовых портретов содержит предельные циклы. При этом каждой независимой паре безразмерных параметров соответствует пара независимых индексов, “кодирующих” топологический тип фазового портрета. Проводится классификация портретов для некоторой характерной области параметров.

1. Постановка задачи о плоскопараллельном движении тела в среде в условиях квазистационарности. 1.1. Основные гипотезы. В соответствии с [1], кратко отметим основные свойства среды, в которой движется тело. Первое – это “инерционность среды”. Внешние силы, приложенные к телу, сообщают ускорение не только ему, но и частицам среды. Второе – это “сопротивляемость среды”. Если на тело, движущееся в среде, которая “покоится”, не действуют внешние силы и в теле отсутствуют внутренние источники энергии, то скорость тела будет падать со временем, и рано или поздно оно остановится. Заодно с телом “успокоится” и среда.

При построении данной модели основной гипотезой является гипотеза квазистационарности [1, 2]. Она состоит в том, что распределение скоростей частиц среды принимается таким, каким оно имело бы место при стационарном движении тела. Таким образом, среда “реагирует” лишь на мгновенное движение тела и “забывает” свои начальные условия.

Поэтому в рамках данной гипотезы возможно представление результирующих силы и момента, действующих на твердое тело, в виде функции от мгновенного распределения скоростей в твердом теле, т.е. от скорости V некоторой точки тела и мгновенной угловой скорости Ω . Таким образом, приходим к формулировке задачи о движении тела в сопротивляющейся среде, как задачи классической динамики.

1.2. *Формализация модельных предположений и полная система дифференциальных уравнений.* 1. Взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоской пластинки АВ (см. также [3–6]). При этом плоскость пластинки перпендикулярна плоскости движения.

2. Поскольку взаимодействие происходит по законам струйного обтекания [7, 8], сила S этого взаимодействия направлена по нормали к пластинке, причем точка N приложения этой силы определяется лишь одним параметром – углом атаки α , который измеряется между вектором скорости v середины D пластинки и внешней нормалью в этой точке (прямая CD). Таким образом, $DN = y(\alpha)$. Исследование зависимости функции y от угловой скорости движения тела является следующим этапом изучения проблемы.

3. Величину S силы сопротивления примем в виде $S = sv^2$, а “коэффициент сопротивления” s является функцией только угла атаки $s = s(\alpha)$.

Принятая здесь схема описания воздействия среды на тело не учитывает всего разнообразия деталей этого взаимодействия. Как уже отмечалось, она является лишь первым этапом моделирования данного воздействия и позволяет до конца провести глобальный качественный анализ.

4. Распределение масс таково, что центр масс C тела располагается на срединном перпендикуляре CD к пластинке.

Для описания положения тела на плоскости выберем декартовы координаты x_0, y_0 центра пластинки и угол поворота φ , который будем измерять в плоскости движения тела между прямой CD и осью инерциальной системы координат. При этом фазовое состояние системы характеризуется следующими величинами: $(x'_0, y'_0, \varphi', x_0, y_0, \varphi)$.

Ввиду того, что обобщенные силы и кинетическая энергия не зависят от положения тела на плоскости, координаты (x_0, y_0, φ) являются циклическими. Это позволяет рассматривать систему меньшей размерности.

Выполним замену скоростей x'_0, y'_0 через введенные величины v и α посредством независимых соотношений

$$x'_0 = v \cos(\alpha - \varphi), \quad y'_0 = v \sin(\alpha - \varphi) \quad (1.1)$$

Теперь фазовое состояние определяется через функции $(v, \alpha, \varphi', x_0, y_0, \varphi)$, а величины v и α рассматриваются как квазискорости системы.

Замечание. Конечно, цикличность в данном случае понимается не по Раусу, когда каждой циклической координате соответствует первый интеграл, в результате чего порядок общей лагранжевой системы понижается. Цикличность понимается в том смысле, что динамические функции (кинетическая энергия и обобщенные силы) не зависят от некоторых координат конфигурационного пространства. При этом порядок общей системы понижается на число таких координат.

В силу теоремы о движении центра масс на плоскости в проекциях на подвижные оси CD, DA и теоремы об изменении кинетического момента относительно оси Кенига, получаем полную систему дифференциальных уравнений, рассмотренную в динамическом пространстве квазискоростей

$$\begin{aligned} v' \cos \alpha - \alpha' v \sin \alpha + \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 &= -s(\alpha) v^2 / m \\ v' \sin \alpha - \alpha' v \cos \alpha - \Omega v \cos \alpha + \sigma \Omega' &= 0 \\ I \Omega' &= -y(\alpha) s(\alpha) v^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Динамическую систему (1.2) дополним соотношениями (1.1) и

$$\varphi' = \Omega \quad (1.3)$$

Здесь σ – расстояние DC , I – центральный момент инерции тела, m – его масса.

В динамическую систему (1.2) входят функции $y(\alpha)$, $s(\alpha)$, для качественного описания которых используем имеющуюся экспериментальную информацию о свойствах струйного обтекания.

Геометрическая форма плоской пластинки, через которую происходит взаимодействие тела со средой, может быть совершенно различной. Кроме того, хорда, лежащая в плоскости пластинки, может по-разному определять плоскость движения самого твердого тела. Последние обстоятельства позволяют отнести функции $y(\alpha)$, $s(\alpha)$ к определенным классам; они состоят из функций достаточно гладких, 2π -периодических ($y(\alpha)$ – нечетная, а $s(\alpha)$ – четная), удовлетворяющих следующим условиям: $y(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причем $y'(0) > 0$, $y'(\pi) < 0$; $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причем $s(0) > 0$, $s'(\pi/2) < 0$. Как y , так и s меняют знак при замене α на $\alpha + \pi$. В частности, аналитические функции

$$y_0(\alpha) = A \sin \alpha, \quad s_0(\alpha) = B \cos \alpha \quad (A, B > 0) \quad (1.4)$$

служат типичными представителями описанных классов.

Рассмотрим произведение $F(\alpha) = y(\alpha)s(\alpha)$. Из вышеперечисленных условий следует, что F – достаточно гладкая нечетная π -периодическая функция, удовлетворяющая условиям $F(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $F'(\pi/2) > 0$, $F'(\pi/2) < 0$.

В частности, следующая функция удовлетворяет последним условиям:

$$F_0(\alpha) = AB \sin \alpha \cos \alpha \quad (1.5)$$

Вводя новое независимое переменное (пройденный путь точки D) по формуле $dq = v dt$, динамическую систему можно преобразовать к следующему виду (первое уравнение, очевидно, является аналогом (1.3)):

$$\varphi' = \Omega \quad (1.6)$$

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega)$$

$$\alpha' = \omega + \sigma F(\alpha) \cos \alpha / I + \sigma \omega^2 \sin \alpha + s(\alpha) \sin \alpha / m \quad (1.7)$$

$$\omega' = -F(\alpha) / I - \omega\Psi(\alpha, \omega) \quad (1.8)$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = \sigma F(\alpha) \sin \alpha / I - \sigma \omega^2 \cos \alpha - s(\alpha) \cos \alpha / m, \quad (\dots)' = d/dq(\dots)$$

Уравнения (1.7), (1.8) образуют замкнутую подсистему.

В частности, если выполнены условия (1.4), (1.5), то система (1.6)–(1.8) примет вид аналитической

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega)$$

$$\alpha' = \omega + \sigma AB \sin \alpha \cos^2 \alpha / I + \sigma \omega^2 \sin \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha / m$$

$$\omega' = -AB \sin \alpha \cos \alpha / I - \omega\Psi(\alpha, \omega)$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = \sigma AB \cos \alpha \sin^2 \alpha / I - \sigma \omega^2 \cos \alpha - B \cos^2 \alpha / m$$

Оказывается [4, 5, 9], в некоторых типичных случаях аналитическая система отражает основные топологические свойства разбиения на траектории системы (1.5–1.7) в фазовом пространстве $R^1\{v\} \times S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\omega\}$. Более того, при некоторых условиях векторные поля последних двух систем топологически эквивалентны [9] (о топологической эквивалентности см. [9–11]).

1.3. Цель работы. Моделирование движения твердого тела в сопротивляющейся среде предполагает изучение класса динамических систем, определенных при помощи экспериментальной информации о свойствах обтекания тела сопротивляющейся средой. При этом, из всего класса систем необходимо выделить те системы, которые, с одной стороны, обладают относительно простой структурой, а, с другой стороны,

способны “уловить” такие качественные динамические эффекты, как притягивающие и отталкивающие режимы движения, а также автоколебания в динамической системе.

Цель работы – изучение пространства квазискоростей, возникающего в рассматриваемой модельной задаче. При этом, изучая некоторую двумерную подобласть в пространстве безразмерных параметров, показывается, что динамическая система допускает наличие двухпараметрического семейства фазовых портретов, имеющего простые и сложные предельные циклы. Каждый тип фазового портрета имеет свой код, характеризующий соответствующую неэквивалентную структуру разбиения на траектории.

Подобно [4, 9] будем рассматривать деформации векторного поля системы (1.6)–(1.8) не над всем классом полей, а лишь над некоторым подклассом, образованным системой (1.6)–(1.8). При этом вся система (1.6)–(1.8) оказывается относительно структурно устойчивой [9]. Аналитическая система отражает типичные топологические особенности поведения траекторий системы (1.6)–(1.8). Поэтому далее, для простоты, рассмотрим систему (1.8–1.10). Нелинейный анализ системы (1.5–1.7) при любых допустимых F и s проводится с не принципиальными дополнениями.

2. Качественный анализ динамической системы. Методика проводимого нелинейного анализа представляет самостоятельный интерес, позволяя “кодировать” портреты разного типа по их некоторому топологическому признаку.

Фазовые траектории системы (1.6)–(1.8) в пространстве $R^2\{\alpha, \omega\} \times R^1\{v\}$ лежат на цилиндрических поверхностях. Благодаря этому, фазовый портрет системы (1.6)–(1.8) в $R^2\{\alpha, \omega\} \times R^1\{v\}$ строится с помощью фазового портрета системы (1.7), (1.8) в $R^2\{\alpha, \omega\}$, поэтому возможны поднятие фазовых траекторий с плоскости $R^2\{\alpha, \omega\}$ в пространство $R^2\{\alpha, \omega\} \times R^1\{v\}$ и получение трехмерного фазового портрета.

Введем обозначение $n_0^2 = F'(0)/I$. В аналитической системе имеются два безразмерных параметра $\mu_1 = 2s(0)/mn_0$ и $\mu_2 = \sigma n_0$; будем рассматривать систему в следующей (ключевой для данной работы) области параметров:

$$\{(\mu_1, \mu_2) \in R^2 : 0 < \mu_2 < 2, \mu_1 > 0, 2\mu_2 > \mu_1\} \quad (2.1)$$

Следующая простая лемма характеризует все точки покоя аналитической системы (как, впрочем, и (1.7), (1.8)), а также их топологический тип. При этом, как оговорено выше, рассматривается лишь область параметров (2.1).

Лемма 1. 1) Точки покоя $(2\pi k, 0)$, $k \in Z$ являются отталкивающими.

2) Точки покоя $(\pi(2k+1), 0)$ являются при $\mu_2 > \mu_1$ притягивающими, а при $\mu_2 < \mu_1$ – отталкивающими.

3) Точки покоя $(\pi/2 + \pi k, 0)$ являются седлами.

4) Точки покоя $(\pm\pi/2 + 2\pi k, \mp 1/\sigma)$ являются притягивающими.

5) Других точек покоя у системы не существует.

Для получения семейства глобальных фазовых портретов при решении вопросов существования замкнутых траекторий, огибающих фазовый цилиндр, нам потребуется

Лемма 2. У системы (1.7), (1.8) при условиях (1.4), (1.5) не существует замкнутых кривых из траекторий, не стягиваемых по фазовому цилиндру $S^1\{\alpha \bmod 2\pi\} \times R^1\{\omega\}$ в точку.

Замечание. Когда разность $\mu_1 - \mu_2$ – малое положительное число, существует единственный устойчивый предельный цикл. Последний монотонно переходит от простого к сложному, составленному из сепаратрис и гиперболических седел [10, 11]. Уточним последнее утверждение.

Лемма 3. Рассмотрим систему (1.7); (1.8) в полосе $\Pi' = \{(\alpha, \omega) \in R^2: \pi/2 < \alpha < 3\pi/2\}$. Пусть $F \in C^3((-\pi/2, \pi/2))$, $s \in C^2((-\pi/2, \pi/2))$, а также $\mu_2 < 2$, $l_n = -\sigma f_3/l + 4s_2/m - 4\sigma n_0^2$, $\mu = \mu_1 - \mu_2$; $f_3 = F'''(0)$, $s_2 = s''(0)$. Тогда:

а) если $l_n < 0$, то:

1. При $\mu_1 = \mu_2$ происходит бифуркация системы.

2. Зафиксируем $\mu_2^0 < 2$. Существует $\bar{\mu}_1 < 0$ такое, что для любого $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (\bar{\mu}_1, 0)$ точка $(\pi, 0)$ – устойчивый фокус; существует $\bar{\mu}_2 > 0$ такое, что для любого $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (0, \bar{\mu}_2)$ точка $(\pi, 0)$ – неустойчивый фокус, окруженный устойчивым предельным циклом, размер которого растет с ростом $\bar{\mu}$ от 0 до $\bar{\mu}_2$;

в) если $l_n > 0$, то:

1. При $\mu_1 = \mu_2$ происходит бифуркация системы.

2. Зафиксируем $\mu_2^0 < 2$. Существует $\bar{\mu}_1 > 0$ такое, что для любого $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (0, \bar{\mu}_2)$ точка $(\pi, 0)$ – неустойчивый фокус; существует $\bar{\mu}_2 < 0$ такое, что для любого $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (\bar{\mu}_2, 0)$ точка $(\pi, 0)$ – устойчивый фокус, окруженный неустойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением $\bar{\mu}$ от 0 до $\bar{\mu}_2$

Замечание. Для $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ в силу топологической классификации можно написать конкретные оценки.

Следствие. Пусть $F = F_0$ (см. (1.5)), $s = s_0$ (см. (1.4)), $\mu_2 < 2$. Тогда:

а) При $2s(0)/mn_0 = \sigma n_0$ происходит бифуркация системы.

в) Зафиксируем $\sigma n_0 = \mu_2^0 < 2$. Существует $\bar{\mu}_1 < 0$ такое, что для любого $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (\bar{\mu}_1, 0)$ точка $(\pi, 0)$ – устойчивый фокус; существует $\bar{\mu}_2 > 0$ такое, что для любого $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2^0 \in (0, \bar{\mu}_2)$ точка $(\pi, 0)$ – неустойчивый фокус, окруженный устойчивым предельным циклом, размер которого растет с уменьшением $\bar{\mu}$ от 0 до $\bar{\mu}_2$.

Замечание. Цепочка равенств $\mu_1 = \mu_2$, $l_n = 0$, ... задает в бесконечно-мерном пространстве коэффициентов тейлоровских разложений функций F и s некоторое множество. В силу того, что при $\mu_1 \neq \mu_2$ или $l_n \neq 0$ удается определить характер траекторий возле точки $(\pi, 0)$, величины $\mu_1 - \mu_2$ и l_n являются функциями от первых двух коэффициентов функции последования. Действительно, $\mu_1 = \mu_2$ и $l_n = 0$ тогда и только тогда, когда либо линейный, либо коэффициент при кубе разложения функции последования равны нулю.

Ключевым вопросом классификации является вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющих гиперболических седел.

Введем семейство полос на фазовой плоскости: $\Pi_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{(\alpha, \omega) \in R^2: \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\}$, при этом $\Pi_{(-\pi/2, \pi/2)} = \Pi$; $\Pi_{(\pi/2, 3\pi/2)} = \Pi'$.

Предельные циклы могут существовать лишь в полосе Π' [3, 6].

Лемма 4. Устойчивая сепаратриса в области Π для точки $(-\pi/2, 0)$ имеет в качестве α -предельного множества начало координат.

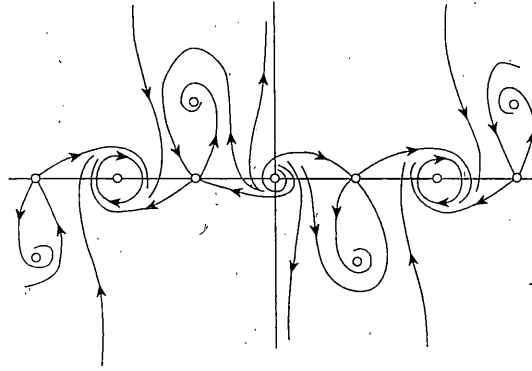
Замечание. Ввиду центральной симметрии поля относительно точек $(\pi k, 0)$, $k \in Z$, достаточно разобрать поведение одной из центральносимметричных сепаратрис. Поэтому здесь и далее леммы о предельных множествах приведены для одной из сепаратрис.

Рассмотрим ключевые вопросы о глобальном поведении следующих сепаратрис:

а) выходящей из точки $(-\pi/2, 0)$ в полосу Π ;

в) входящей в точку $(-\pi/2, 0)$ из полосы $\Pi_{(-3\pi/2, -\pi/2)}$;

с) выходящей из точки $(-\pi/2, 0)$ в полосу $\Pi_{(-3\pi/2, -\pi/2)}$.



Фиг. 1

Здесь и далее под термином “поведение” ключевой сепаратрисы понимается характеристика α -предельного множества (для сепаратрисы (в)) и ω – предельного множества (для сепаратрис (а) и (с)).

После исследования расположения изоклин системы и характера особых точек возникает ряд логических вариантов возможного поведения ключевых сепаратрис. Областью определения предельных множеств ключевых сепаратрис назовем все логически возможные предельные множества этих сепаратрис.

Под независимостью поведения ключевых сепаратрис будем понимать возможность независимого выбора предполагаемых предельных множеств ключевых сепаратрис из их области определения.

Лемма 5. Глобальное поведение любых двух сепаратрис из (а)–(с) независимо: поведение третьей определяется через поведение двух других.

Выберем в качестве пары ключевых сепаратрис, поведение которых независимо, сепаратрисы (а) и (в).

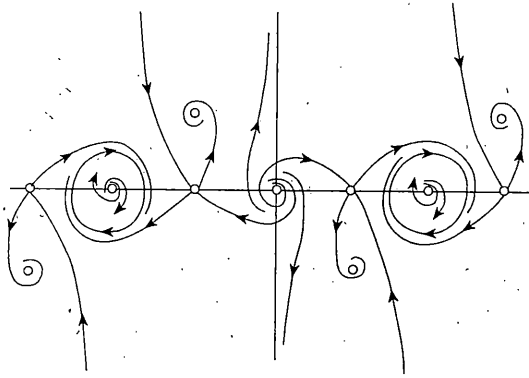
Определение 1. Индексом k_1 сепаратрисы (а) назовем рациональное число, выбираемое из множества $\{r \in \mathbb{Q}: r = m, r = 1/4 + m, m \in \mathbb{N}_0\}$. Скажем, что $k_1 = r$, если сепаратриса (а) имеет в качестве ω -предельного множества точку $(-\pi/2 + 2\pi r, 1/\sigma)$, если $r \in \mathbb{N}_0$ и точку $(-\pi/2 + 2\pi r - 0, +\infty)$, если $r \notin \mathbb{N}_0$.

Определение 2. Индексом k_2 сепаратрисы (в) назовем натуральное число j , выбираемое из множества $\{j \in \mathbb{N}: j = 1, 2, 3, 4, 5\}$. Скажем, что $k_2 = j$, если сепаратриса (в) имеет в качестве α -предельного множества точку $(-\pi/2)$ (если $j = 1$); точку $(-\pi/2, 0)$ (если $j = 2$); точку $(0, 0)$ (если $j = 3$); точку $(-\pi - 0, -\infty)$ (если $j = 4$); точку $(-2\pi, 0)$ (если $j = 5$).

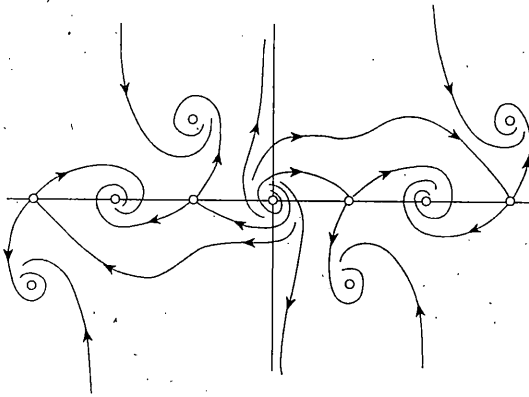
Таким образом видно, что поведение сепаратрисы (в) зависит от индексов k_1 и k_2 , т.е. от конкретного поведения сепаратрис (а) и (в). Более того, последние два определения позволяют произвести “кодировку” ключевых сепаратрис.

Замечание. Если фиксировать индекс k_1 , то индекс k_2 может, в частности, выбираться из более узкого множества, описанного в определении 2. Составим прямое произведение областей определения этих индексов. Оно является максимальным в смысле возможного определения пары индексов k_1 и k_2 .

3. Основная теорема о классификации фазовых портретов. В связи с последним замечанием, обозначим через k_2^* индекс k_2 в том случае, если последний выбирается из усеченной области определения (см. определение 2), и составим прямое произведение индексов k_1 и k_2^* . Для этого рассмотрим двойной индекс $k = (k_1, k_2^*)$. Областью определения для k является прямое произведение множеств, описанное в последнем замечании.



Фиг. 2



Фиг. 3

Если индекс k принимает какое-либо значение, то будем говорить, что, следуя определениям 1 и 2, реализуется поведение ключевых сепаратрис, соответствующее индексу k .

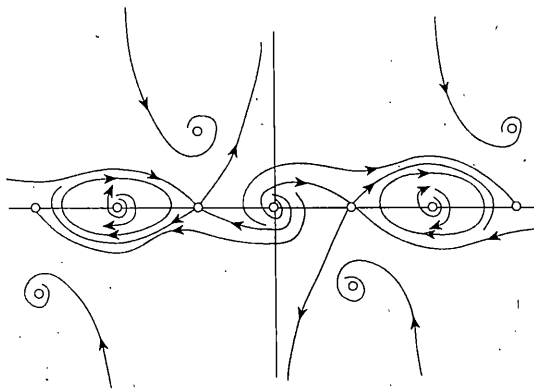
Теорема. Поведение сепаратрис (а) и (в) реализуется для любого k из области определения.

Доказательство данной теоремы достаточно громоздко и опирается на теорию монотонных векторных полей и систем сравнения на многомерных многообразиях [12].

Таким образом, строится двухпараметрическое семейство, содержащее фазовые портреты с предельными циклами, а также бесконечное множество неэквивалентных портретов с различными качественными свойствами.

Теорема позволяет сделать следующий вывод, являющийся простым и важным следствием: любое достаточно малое "возмущение" системы, описывающей физический маятник на цилиндре, дающее систему вида (1.7), (1.8), бесконечно много раз перестраивает глобальный тип гамильтонового фазового портрета физического маятника. Данный факт важен для общей теории колебаний и теории возмущений.

Некоторые из портретов (индекс k принимает значения $(0, 1)^*$, $(0, 2)^*$, $(0, 3)$, $(1/4, 3)^*$ показаны, соответственно, на фиг. 1–4. В [6] получены фазовые портреты с другими индексами, а именно: $(0, 2)$, $(0, 1)$, $(0, 3)^*$, $(0, 4)^* = (0, 4)$. Объясним теперь наличие звездочки в некоторых индексах.



Фиг. 4

Двупараметрическое семейство, построенное в [5], не содержит предельных циклов, в отличие от только что построенного семейства. Но эти два семейства объединяет тот факт, при котором каждой независимой паре безразмерных параметров μ_1, μ_2 соответствует пара независимых индексов (в данном случае k_1, k_2^*), “кодирующих” топологический тип фазового портрета. В последнем случае надо сделать оговорку на имеющиеся в семействе портреты с предельными циклами. Такие портреты могут иметь топологические типы, отличные от портретов с теми же индексами k_2 , но без предельных циклов. В последнем случае можно метить индексы k_2 звездочкой и говорить о помеченных фазовых портретах. К примеру, фазовый портрет, изображенный на фиг. 4, имеет помеченный индекс $(1/4, 3)^*$.

Несмотря на последнее замечание, проводится полная классификация фазовых портретов системы для области ее параметров (2.Г).

Автор выражает искреннюю благодарность профессору С.С. Григоряну за множество ценных замечаний, профессору В.А. Самсонову за постановку задачи и полезные советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-01087) и программы “Университеты России”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: МГУ, 1986. 86 с.
2. Ерошин В.А., Привалов В.А., Самсонов В.А. Две модельные задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Сб. научн.-метод. статей по теоретич. механ. Вып. 18. М.: Наука, 1987. С. 75–78.
3. Ерошин В.А., Самсонов В.А., Шамолин М.В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 3. С. 23–27.
4. Самсонов В.А., Шамолин М.В. К задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании: Препринт № 4141. М.: Имех МГУ, 1991. 48 с.
5. Шамолин М.В. Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 5. С. 611–614.
6. Шамолин М.В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Докл. РАН. 1996. Т. 349. № 2. С. 193–197.
7. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 322 с.
8. Чаплыгин С.А. Избранные труды. М.: Наука, 1976. 495 с.

9. *Шамолин М.В.* Определение относительной грубости и двухпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твердого тела // *Успехи мат. наук.* 1996. Т. 51. Вып. 1. С. 175–176.
10. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.
11. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.
12. *Шамолин М.В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // *Успехи мат. наук.* 1997. Т. 52. Вып. 3. С. 177–178.

Ногинск

Поступила в редакцию 20.XI.1996