

УДК 531.2

© 1998 г. Н. Н. ДМИТРИЕВ, П. Е. ТОВСТИК

К УСЛОВИЯМ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА НА ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

В [1] исследуются условия равновесия твердого тела на шероховатой плоскости в предположении, что силы сухого трения подчиняются закону Кулона. Здесь рассмотрен случай ортотропного трения и показано, что аффинным преобразованием он сводится к изотропному трению. Рассмотрены задачи об опоре на n точек (в частности, на три и четыре точки), а также на окружность и на эллипс.

1. Условия равновесия при наличии ортотропного трения. Условие равновесия материальной точки на плоскости $z = 0$ в случае ортотропного трения имеет вид [2–4]:

$$X^2/f_x^2 + Y^2/f_y^2 \leq N^2, \quad N \geq 0 \quad (1.1)$$

где x, y – главные направления ортотропии, f_x, f_y ($f_x > f_y > 0$) – соответствующие коэффициенты трения, X, Y – проекции активной силы на оси x, y и N – сила нормального давления.

Пусть абсолютно твердое тело, расположенное в области $z \geq 0$, контактирует с неподвижной плоскостью $z = 0$ в точках $A_i(x_i, y_i, 0) \in D$, где D – плоское множество точек контакта (здесь и далее использованы обозначения, введенные в [1]). Условия равновесия в случае ортотропного трения запишем в виде

$$\begin{aligned} \Sigma N_i &= -R_z, \quad \Sigma x_i N_i = M_y, \quad \Sigma y_i N_i = -M_x, \quad N_i \geq 0 \\ \Sigma X_i &= -R_x, \quad \Sigma Y_i = R_y, \quad \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i) = -M_z, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$X_i^2/f_x^2 + Y_i^2/f_y^2 \leq N_i^2 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.3)$$

Здесь $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$ – проекции главного вектора и главного момента (относительно начала координат) активных сил, X_i, Y_i – проекции сил трения, N_i – силы нормального давления. Предполагаем, что $R_z < 0$. Суммирование в (1.2) распространяется на все точки контакта и в случае контакта по площади заменяется интегрированием.

Условия (1.2), (1.3) только неравенствами (1.3) отличаются от условий равновесия для изотропного трения [1]. Нетрудно проверить

Утверждение 1. Путем перехода к новым переменным (со штрихом):

$$\{f_x, x_i, X_i, N_i, R_x, M_y, R_z\} = \left\{f', x'_i, X'_i, N'_i, R'_x, M'_y, R'_z\right\} \quad (1.4)$$

$$\{f_y, y_i, Y_i, R_y, M_x, M_z\} = \lambda \left\{f', y'_i, Y'_i, R'_y, M'_x, M'_z\right\}, \quad \lambda < 1$$

задача (1.2), (1.3) приводится к изотропному трению с коэффициентом f .

Будем предполагать выполненными условия неопрокидывания [1]:

$$K(x_*, y_*) \in \text{co} D, \quad x_* = -M_y R_z^{-1}, \quad y_* = M_x R_z^{-1} \quad (1.5)$$

где $\text{co} D$ – выпуклая оболочка множества D . Заметим, что как в старых, так и в новых переменных условия неопрокидывания идентичны.

2. Опора на n точек. При числе n точек опоры, большем трех, задача определения нормальных реакций N_i становится статически неопределимой. В [1] введено понятие гарантированного равновесия, при котором для заданных активных сил равновесие имеет место независимо от распределения нормальных реакций N_i при выполнении условий (1.2), (1.3). Показано [1], что условия гарантированного равновесия эквивалентны неравенству

$$\min_{x, y, N_i} \left(\frac{s(x, y, N_i)}{|M_z - xR_y + yR_x|} \right) \geq \frac{1}{f}, \quad s = \sum \rho_i N_i, \quad \rho_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (2.1)$$

где x, y – координаты центра вращения S при начале движения.

В случае ортотропного трения предполагаются выполненными преобразования (1.4) после чего штрихи опущены.

В [1] показано, что при $n \geq 3$ минимум в (2.1) достигается, если все реакции N_i равны нулю, кроме трех. Поэтому представляет интерес отдельно выделять случай $n = 3$.

Пусть $n \geq 3$. При этом предполагаем, что реакции $N_i > 0$ заданы, точки A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) не лежат на одной прямой и выполнены условия неопрокидывания.

Пусть сначала $R_x = R_y = 0$. Тогда условие (2.1) принимает вид

$$|M_z| \leq f s_*, \quad s_* = \min_{x, y} s(x, y, N_i) \quad (2.2)$$

Показано [1], что функции $s(x, y, N_i)$ при фиксированных $N_i > 0$ выпукла вниз и, следовательно, имеет единственный строгий минимум. Однако, в отличие от рассмотренного в [1, 5] случая $n = 2$, аналитическое выражение минимума в общем случае найти не удается и приходится прибегать к численным методам.

Введем обозначение $\rho_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$.

Утверждение 2. Для того чтобы в точке A_j функция $s(x, y, N_i)$ имела минимум, т.е. $s_* = s_j = s(x_j, y_j, N_i)$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$N_j^2 \geq \left(\sum_{i \neq j} N_i (x_j - x_i) / \rho_{ij} \right)^2 + \left(\sum_{i \neq j} N_i (y_j - y_i) / \rho_{ij} \right)^2 \quad (2.3)$$

При $n = 3$ условие (2.3) при $j = 1$ можно записать в виде

$$N_1^2 \geq N_2^2 + 2N_2N_3 \cos \alpha + N_3^2, \quad \alpha = \angle A_2 A_1 A_3 \quad (2.4)$$

Для доказательства переходим к локальным переменным r, φ по формулам

$$x = x_j + r \cos \varphi, \quad y = y_j + r \sin \varphi \quad (2.5)$$

Тогда функция $s(x, y, N_i)$ имеет локальный минимум при $r = 0$, если

$$\min_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \left. \frac{\partial s}{\partial r} \right|_{r=0} \geq 0 \quad (2.6)$$

Вычисление минимума в (2.6) приводит к неравенству (2.3), а в силу выпуклости функции s локальный и глобальный минимум совпадают.

Алгоритм вычисления s_* заключается в следующем. Сначала вычисляем значения s_i , $i = 1, 2, \dots, n$, соответствующие случаю $S = A_i$, когда мгновенный центр ускорений совпадает с одной из точек опоры. Находим значение j , для которого $s_j = \min s_i$. Если условие (2.3) выполнено, то $s_* = s_j$.

Если же условие (2.3) не выполнено, то точка минимума x, y суть единственное решение системы уравнений

$$s_x = s_y = 0 \quad (2.7)$$

и может быть найдена одним из численных методов. Через s_x и s_y обозначены частные производные.

В частности, при $n = 3$ точка x, y расположена внутри треугольника $A_1A_2A_3$ и может быть найдена методом секущих. Зная предыдущее приближение $x_{(n)}, y_{(n)}$, последующее приближение $x_{(n+1)}, y_{(n+1)}$ находим из линейной системы

$$\begin{aligned} s_{xx}(x_{(n+1)} - x_{(n)}) + s_{xy}(y_{(n+1)} - y_{(n)}) + s_x &= 0 \\ s_{xy}(x_{(n+1)} - x_{(n)}) + s_{yy}(y_{(n+1)} - y_{(n)}) + s_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

где частные производные s_{xx}, \dots вычисляются в точке $x_{(n)}, y_{(n)}$. В качестве начального приближения может быть взята точка $x_{(0)} = x_*, y_{(0)} = y_*$.

Численные эксперименты показали, что предложенный метод итераций быстро сходится, если искомая точка x, y находится строго внутри треугольника $A_1A_2A_3$, и сходится, если она совпадает с одной из его вершин. Поэтому следует сначала найти s_j и проверить выполнение условия (2.3).

Пусть теперь $R_x^2 + R_y^2 = R_z^2 > 0$. Тогда система активных сил приводится к двум силам, одна из которых (R_z) параллельна оси z и приложена в точке K , а другая (R_r) лежит в плоскости $z = 0$. Не нарушая общности (поворот осей x, y), можно считать, что сила R_r перпендикулярна оси x и $R_r > 0$.

Тогда при фиксированных реакциях N_i условие (2.1) можно переписать в виде

$$R_r \leq f Q_* = f \min_{x, y} Q(x, y), \quad Q(x, y) = \frac{s(x, y, N_i)}{|p - x|} \quad (2.9)$$

где функция $s(x, y, N_i)$ та же, что и в (2.1), p — плечо силы R_r относительно начала координат.

Утверждение 3. Функция $Q(x, y)$ имеет единственный локальный минимум. Точка x, y , в которой этот минимум достигается, расположена в полуплоскости $x < p$, если $x_* < p$, и в полуплоскости $x > p$, если $x_* > p$. Если $x_* = p$, имеем $x \rightarrow \pm\infty$, что соответствует поступательному движению в направлении силы R_r . Здесь $x_* = \sum x_i N_i / |\sum R_z|$.

Доказательство осложняется тем, что в отличие от случая $R_r = 0$ функция $Q(x, y)$ не является выпуклой. Пусть $x_* \leq p$ (случай $x_* \geq p$ рассматривается аналогично).

При фиксированном y и переменном $x > p$ функций $Q(x, y)$ монотонно убывает. Действительно, учитывая, что $\rho_i \geq x - x_i$, получаем

$$Q_x = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{(x-p)^2} [(x-x_i)(x-p)/\rho_i - \rho_i] < \frac{|R_z|(x_* - p)}{(x-p)^2} < 0$$

Пусть $x_* < p$. При фиксированном y и переменном $x < p$ функция $Q(x, y)$ имеет единственный строгий минимум в некоторой точке $x = x_0(y)$. Имеем

$$Q_x = |R_z|(x_* - p)x^{-2} + O(x^{-3}) < 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty$$

$$Q_x = \varepsilon^{-2} \sum N_i \rho_i + O(\varepsilon^{-1}) > 0 \quad \text{при } x = p - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

откуда следует, что при $-\infty < x < p$ уравнение $Q_x = 0$ имеет хотя бы один корень. Единственность корня $x_0(y)$ вытекает из того, что $Q_{xx} > 0$ при всех x , при которых $Q_x = 0$.

Найдем теперь минимум

$$Q_* = \min_y G(y), \quad G(y) = Q(x_0(y), y)$$

В силу равенства $Q_x = 0$ имеем

$$G_y = Q_x x_y + Q_y = Q_y = \sum_{i=1}^n \frac{N_i(y - y_i)}{\rho_i |x - p|}$$

откуда следует, что $G_y > 0$ при $y \rightarrow \infty$ и $G_y < 0$ при $y \rightarrow -\infty$. Локальный минимум единственный, ибо точка, в которой $G_y = 0$, является точкой строгого минимума, а несколько минимумов подряд у непрерывной функции быть не может. Действительно, в точке, в которой $Q_x = Q_y = 0$, будет

$$Q_{xx} = |x - p|^{-2} s_{xx}, \quad Q_{xy} = |x - p|^{-2} s_{xy}, \quad Q_{yy} = |x - p|^{-2} s_{yy}$$

а положительная определенность квадратичной формы с коэффициентами s_{xx} , s_{xy} , s_{yy} установлена в [1].

Приведенные выше рассуждения нуждаются в уточнении, если рассматриваемые кривые ($y = \text{const}$ или $x = x_0(y)$) проходят через точки A_i . В этом случае вместо обращения в нуль производных Q_x или G_y , следует говорить о смене знака односторонних производных.

Пусть, наконец, $x_* = p$. Тогда при фиксированном y функция $Q(x, y)$ монотонно убывает с ростом $|x - p|$ и принимает наименьшее значение $Q_* = |R_z|$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Доказательство завершено.

Утверждение 4. Пусть $x_* < p$ и $x_j < p$. Для того чтобы в точке A_j функция $Q(x, y)$ имела минимум, т.е. $Q_* = Q_j = Q(x_j, y_j)$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$N_j^2 \geq \left(\sum_{i \neq j} N_i [(x_j - x_i)/\rho_{ij} + \rho_{ij}/(p - x_j)] \right)^2 + \left(\sum_{i \neq j} N_i (y_j - y_i)/\rho_{ij} \right)^2 \quad (2.10)$$

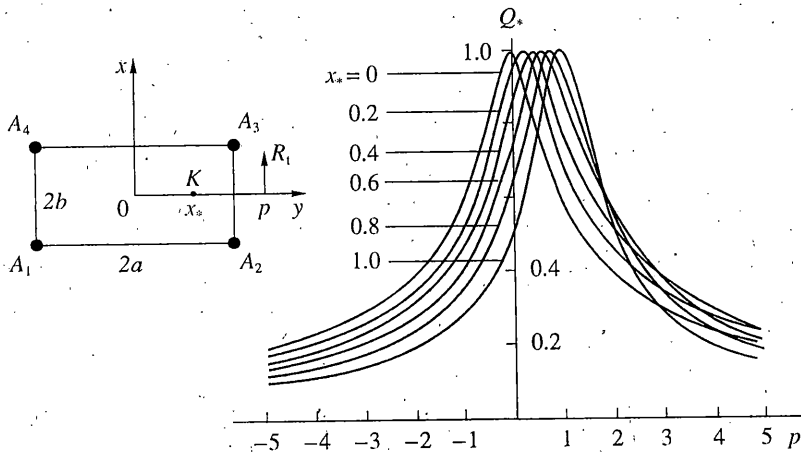
Доказывается утверждение 4 так же, как и утверждение 2.

Для вычисления Q_* можно использовать тот же алгоритм, что и для вычисления s_* в случае $R_z = 0$. Сначала вычисляем Q_i , находим значение j , для которого $Q_j = \min Q_i$. Если неравенство (2.10) не выполнено, для вычисления точки x , y используем метод последовательных приближений (2.6), который в отличие от случая $R_z = 0$ сходится лишь, если начальная точка взята достаточно близко к точке минимума.

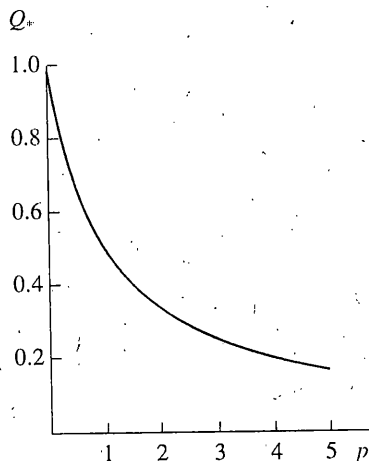
3. Равновесие прямоугольного стола. В качестве примера рассмотрим условия гарантированного равновесия тела с четырьмя опорами в точках A_i , $i = 1, 2, 3, 4$, расположенных в вершинах $\pm a, \pm b$ прямоугольника. Пусть заданы координаты x_* , y_* точки K (точки приложения равнодействующей $R_z < 0$ вертикальных активных сил), а равнодействующая горизонтальных активных сил $R_x > 0$ параллельна оси y и имеет плечо p (фиг. 1).

Не нарушая общности, считаем $|R_z| = 1$, $a = 1$. Положим $b = 0.6$. Найдем функцию $Q_*(p)$ (см. (2.9)) в двух частных случаях:

Пусть $0 \leq x_* \leq 1$, $y_* = 0$. На графике (фиг. 1) приведены значения $Q_*(p)$ для 6 значений x_* . Эти значения получены при опоре на три точки $A_1 A_2 A_3$ или $A_4 A_2 A_3$. В силу симметрии результаты одинаковы, однако положение точки $C(x, y)$ однозначно не определяется и зависит от выбора опорного треугольника. Рассмотрим, например, кривую $x_* = 0.4$ для точек опоры $A_4 A_2 A_3$. При $p < -0.5$, точка C совпадает с A_2 , при $-0.5 < p < x_*$ имеем $x > 1$ и $x \rightarrow \pm\infty$ при $p \rightarrow x_* \mp 0$. При $x_* < p < 1.0$ имеем $x < -1$ и при $1.0 < p < 2.4$ точка C совпадает с A_4 . При $2.4 < p < 10.8$ точка C находится внутри прямоугольника $A_1 A_2 A_3 A_4$ и, наконец, при $p > 10.8$ опять совпадает с точкой A_2 . При $|p| \rightarrow \infty$ имеем $|p| Q_* \rightarrow \text{const} = M_z$.



Фиг. 1

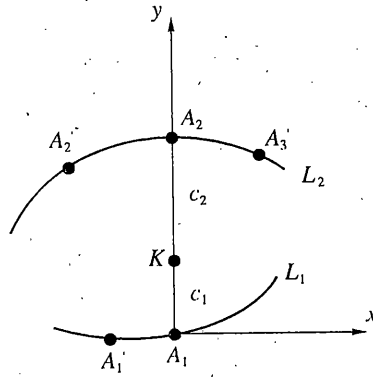


Фиг. 2

Пусть теперь $x_* = 0$, $y_* = 0.4$ (при других значениях y_* имеем близкие результаты). Функция $Q_*(p)$ четная и приведена только при $p \geq 0$ (фиг. 2). Второй из опорных треугольников $A_1A_3A_4$ и $A_2A_3A_4$ дает меньшее значение Q_* , поэтому положение точки C определяется (при $p \neq 0$) однозначно. При $0 < p < 0.5$ имеем $x < -1$ и при $p > 0.5$ точка C совпадает с точкой A_4 .

4. Опора на окружность и на эллипс. Пусть $R_f = 0$. Будем искать условия гарантированного равновесия при опоре на окружность и на эллипс. Для изотропного трения задача об опоре на окружность решена в [1]. Если трение ортотропно, в результате преобразований (1.4) задача об опоре на окружность (а также на эллипс) сводится к задаче об опоре на эллипс при изотропном трении.

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу об опоре на две кривые L_1 и L_2 и будем искать условия, при которых она сводится к задаче об опоре на две точки A_1 и A_2 , лежащие на этих кривых. В силу условий неопрокидывания точка K лежит на отрезке A_1A_2 . Ее расстояния от точек A_1 и A_2 обозначим через c_1 и c_2 . Пусть $c_1 < c_2$. На-



Фиг. 3

чало системы координат поместим в точку A_1 и ось y проведем через точку A_2 (фиг. 3). Минимальное значение s_* функции (2.1) $s(x, y, N_i)$ при опоре на точки A_1 и A_2 равно

$$s_* = c_1 |R_z|, \quad (4.1)$$

причем центр вращения C совпадает с точкой A_1 .

Утверждение 5. При $c_1 < c_2$ и при выполнении условий

$$\left. \frac{dy_1}{dx_1} \right|_{x_1=0} = 0, \quad k_1 c_1 < 1, \quad k_1 = \left. \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} \right|_{x_1=0} \quad (4.2)$$

где $y_1 = y_1(x_1)$ – уравнение кривой L_1 и k_1 – ее кривизна в точке A_1 , функция $s(x, y, N_i)$ имеет локальный минимум s_* при опоре на две точки A_1 и A_2 по сравнению с опорой на n точек A_i' , лежащих на кривых L_1 или L_2 достаточно близко к точкам A_1 или A_2 и таких, что $K \in \text{co}D$. Минимум строгий, если кривая L_2 пересекает ось y под отличным от нуля углом. Если же

$$\left. \frac{dy_1}{dx_1} \right|_{x_1=0} \neq 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{dy_1}{dx_1} \right|_{x_1=0} = 0, \quad k_1 c_1 > 1, \quad (4.3)$$

то за счет выбора точек A_i' значение функции $s(x, y, N_i)$ может быть уменьшено.

При доказательстве, как показано в [1], достаточно ограничиться случаем $n = 3$. Введем обозначения $N_j(A_i)$, $s_*(A_i) = \min_{x, y} s(x, y, N_i)$, включив явное указание на точки опоры A_i . Пусть $A_1' \in L_1$, $\{A_2', A_3'\} \in L_2$ (случай, когда две точки лежат на кривой L_1 , рассматривается аналогично). При $c_1 < c_2$ имеем $N_1(A_1, A_2) > N_2(A_1, A_2) = |R_z| - N_1(A_1, A_2)$, поэтому в силу непрерывности функции $N_1(A_1', A_2', A_3')$ в точке $A_1' = A_1$, $A_2' = A_3' = A_2$ для достаточно малых $|A_i A_i'|$ получим

$$N_2(A_1', A_2', A_3') + N_3(A_1', A_2', A_3') = |R_z| - N_1(A_1', A_2', A_3') < N_1(A_1', A_2', A_3').$$

следовательно, неравенство (2.4) выполнено и точка C совпадает с A_1' .

Пусть сначала точка A_1 фиксирована и x_k, y_k – координаты точек A_k' , причем $y_k = c + y + \lambda x_k$ ($k = 2, 3$), $x_2 x_3 \leq 0$, $c = c_1 + c_2$

При малых u и $x_2x_3 = 0$ функция $s_*(A_1, A_2', A_3')$ на зависит от u . Пусть теперь $u = 0$ и $x_2x_3 < 0$. В [1] показано, что функция $s_*(A_1, A_2', A_3')$ имеет строгий минимум при $x_2 = x_3 = 0$, т.е. при отыскании минимума достаточно рассмотреть опору на две точки.

Пусть координаты точек $A_k', k = 1, 2$ суть x_k, y_k , причем $x_1x_2 < 0$ и точки A_1, K и A_2 лежат на одной прямой. Вычисление функции $s_*(A_1', A_2')$ с учетом уравнений (1.2) дает

$$s_*(A_1', A_2') = |R_z|(c_1 - y_1) \left(1 + \frac{x_1^2}{2c_1^2} + O(\delta^3) \right), \quad \delta = \max \left(\frac{|A_1A_1'|}{c}, \frac{|A_2A_2'|}{c} \right)$$

Если выполнено первое из неравенств (4.3), то минимума нет. В противном случае $y_1 = k_1x_1^2/2 + O(c\delta^3)$ и условие $k_1c_1 = 1$ служит границей наличия и отсутствия минимума. Доказательство завершено.

Следствие. Пусть тело опирается на произвольную замкнутую кривую L и $R_i = 0$, а точка K лежит в области, ограниченной кривой L . Тогда условие гарантированного равновесия $|M_z| \leq fc_1|R_z|$ может быть получено при рассмотрении центра вращения $C \in L$, для которого расстояние $c_1 = KC$ минимально.

Рассмотрим опирание на эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ при $a > b$ и пусть точка K расположена на его большем диаметре ($0 \leq x_* \leq a, y_* = 0$). В силу утверждения 5 получаем следующее условие гарантированного равновесия

$$|M_z| \leq f|R_z| \times \begin{cases} b\sqrt{1 - x_*^2/(a^2 - b^2)} & \text{при } x_* \leq x_0 = a - b^2/a \\ a - x_* & \text{при } x_* \geq x_0 \end{cases} \quad (4.4)$$

где $(x_0, 0)$ — центр окружности, соприкасающейся с эллипсом в точке $(a, 0)$. При $x_* < x_0$ точка C совпадает с одной из двух точек $x = x_*a^2/(a^2 - b^2)$, $y = \pm b\sqrt{a^2 - x^2}/a$, а при $x_* \geq x_0$ — с точкой $(a, 0)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00-411).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л. Условия равновесия тела на шероховатой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 6–17.
2. Ванторин В.Д. Движение по плоскости с анизотропным трением // Трение и износ в машинах. М.: Изд-во АН СССР, 1962. Сб. 16. С. 81–120.
3. Zmitrowicz A. A theoretical model of anisotropic dry friction // Wear. 1981. V. 73. № 1. P. 9–39.
4. Дмитриев Н.Н. Начало движения тел по плоскости с ортотропным трением // Динамика и устойчивость механич. систем. Прикл. мех. Вып. 9. Изд. С.-Петерб. унив. 1995. С. 14–20.
5. Жуковский Н.Е. Условие равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением // Собр. соч. Т. 1. М.; Л.: Гостеоретиздат, 1949. С. 339–354.

С.-Петербург

Поступила в редакцию 15.I.1997