

УДК 533.6.013.42

© 1998 г. С. В. ЧЕЛОМЕЙ, Г. А. ЩЕГЛОВ

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОГО ТРУБОПРОВОДА НАГРУЖЕННОГО ПЕРЕМЕННОЙ ОСЕВОЙ СИЛОЙ ПРИ ПРОТЕКАНИИ ЧЕРЕЗ НЕГО ПУЛЬСИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В настоящее время проблема динамической устойчивости гидроупругих систем, и, в частности, трубопроводов стала привлекать большое внимание исследователей. Это связано с тем, что в современной технике трубопровод является основным упругим звеном системы, через которое с большой скоростью прокачиваются жидкости или газы. В результате, трубопровод, как упругое тело, может испытывать значительные продольные постоянные и пульсирующие нагрузки, причем последние могут приводить к возникновению сильных резонансных поперечных колебаний самого трубопровода.

Кроме указанных выше нагрузок, такие трубопроводы могут испытывать и дополнительные поперечные колебания, вызываемые вибрацией самого потока протекающей жидкости, возникающими в насосах и устройствах подачи [1–3].

Исторически, первая работа, связанная с определением сил, действующих на трубу при протекании через нее жидкости, относится к 1876 г. [4]. С этого времени и до середины 60-х годов XX века задачи об устойчивости труб изучались при протекании в них постоянного потока жидкости [5–10]. Дальнейшие исследования показали [11–15], что при расчете трубопроводов необходимо учитывать также и пульсации потока жидкости. В монографии [15] подробно изложены теория и методы решения задач динамики прямолинейных и пространственных трубопроводов и шлангов, взаимодействующих с потоком жидкости или воздуха, описаны методы решения уравнений малых колебаний стержней, взаимодействующих с потоком. Рассмотрены также параметрические колебания шлангов, вызванные пульсацией давления в жидкости и пульсацией скорости потока.

Динамическая устойчивость поперечных колебаний трубопровода под действием потока жидкости, имеющего небольшую пульсирующую составляющую, изучена в [16].

До сих пор, однако, остался неисследованным вопрос о динамической устойчивости поперечных колебаний трубопровода, подверженного сразу двум нагрузкам – от продольной силы и от силы, возникающей при протекании потока вязкой несжимаемой жидкости, где как первая, так и последняя имеют небольшие пульсирующие составляющие.

Целью настоящей работы является подробное исследование уравнений динамической устойчивости прямого упругого трубопровода под действием таких нагрузок, изучение возможных параметрических резонансов и определение соответствующих областей неустойчивости. Такое исследование, проведенное аналитическими методами, позволило получить ряд новых и важных результатов в теории динамической устойчивости гидроупругих систем.

Так, впервые описаны новые типы параметрических резонансов, присущие только системам с двойным параметрическим возбуждением. Получены зависимости, с помощью которых можно провести как качественный, так и количественный анализ областей неустойчивости этих резонансов. В ряде случаев найдены общие условия, позволяющие лишь по виду коэффициентов исходных дифференциальных

уравнений определить между какими формами колебаний может возникнуть тот или иной тип комбинационного резонанса, а также условия, при которых введение в систему дополнительного линейного демпфирования не сужает, а расширяет область динамической неустойчивости указанных резонансов.

Полученные зависимости позволяют установить условия подавления параметрических резонансов в рассматриваемой системе, а также проводить оптимальное конструирование трубопроводов с существенной экономией машинного времени.

1. Основные дифференциальные уравнения. Уравнение динамического равновесия прямого упругого трубопровода постоянного сечения длиной l , нагруженного осевой сжимающей силой $Q = Q(t)$, через который протекает неразрывный поток жидкости со скоростью $v = v(t)$, имеет вид [12]:

$$EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + k_1 J \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial t} + k_2 \frac{\partial u}{\partial t} + (Q + \rho v^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\rho v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \rho \frac{\partial v \partial u}{\partial t \partial x} + (\rho + m) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

В уравнении (1.1) первый член является погонной силой упругости, второй и третий – погонной силой внутреннего и внешнего демпфирования, четвертый – суммой погонной центробежной силы и осевого сжимающего усилия, пятый – погонной силой Кориолиса, шестой – погонной силой от продольных колебаний жидкости, а седьмой – погонной силой инерции поперечных колебаний, ρ и m – линейные массы жидкости и трубы, $u = u(x, t)$ – малые поперечные перемещения трубы.

Будем искать решение (1.1) в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(t) Y_j(x)$$

где $Y_j(x)$ – нормальные функции, удовлетворяющие условиям ортогональности

$$\int_0^l Y_j^{IV} Y_i dx = 0, \quad \int_0^l Y_j Y_i dx = 0 \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots)$$

Полагая $Q(t) = Q_0 + Q_1 \cos \xi t$ ($Q_0 > Q_1$) и $v(t) = v_0 + v_1 \cos pt$ ($v_0 > v_1$), получим для функций времени $\varphi_i(t)$ бесконечную систему дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} + \omega_i \delta_{ii} \frac{d\varphi_i}{dt} + \omega_i^2 \varphi_i + 2\omega_i \cos pt \sum_{j=1}^{\infty} \eta_{ij} \frac{d\varphi_j}{dt} + \\ & + 2\omega_i^2 \sum_{j=1}^{\infty} (\gamma_{ij} \cos pt - k_{ij} \sin pt + q_{ij} \cos 2pt + h_{ij} \cos \xi t) \varphi_j + \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \left(\omega_i^2 \beta_{ij} \varphi_j + \omega_i \mu_{i,j} \frac{d\varphi_j}{dt} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\omega_i^2 = \Omega_i^2 + \left(v_0^2 + \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{Q_0}{\rho} \right) c_{ij}, \quad h_{ij} = \frac{Q_1 c_{ij}}{\rho 2\omega_i^2}, \quad \eta_{ij} = \frac{v_1 b_{ij}}{\omega_i}$$

$$\delta_{ij} = \left(\frac{k_1 \Omega_i^2}{E} + \frac{k_2}{(\rho + m)} + 2v_0 b_{ij} \right) / \omega_i, \quad \gamma_{ij} = \frac{v_0 v_1 c_{ij}}{\omega_i^2}, \quad q_{ij} = \frac{v_1^2 c_{ij}}{4\omega_i^2}$$

$$\beta_{ij} = \left(v_0^2 + \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{Q_0}{\rho} \right) c_{ij} / \omega_i^2, \quad k_i = \frac{p}{2\omega_i}, \quad \mu_{ij} = \frac{2v_0 b_{ij}}{\omega_i}$$

$$\Omega_i^2 = \frac{EJ}{\rho + m_0} \int_0^l Y_i^{IV} Y_i dx / L, \quad b_{ij} = \frac{\rho}{\rho + m_0} \int_0^l Y_i^I Y_j dx / L, \quad c_{ij} = \frac{\rho}{\rho + m_0} \int_0^l Y_i^{II} Y_j dx / L,$$

$$L = \int_0^l Y_i^2 dx$$

Здесь предполагается, что v_0, v_1, Q_0 не создают критических сил, а безразмерные коэффициенты $\delta_{ii}, \eta_{ij}, \gamma_{ij}, q_{ij}, h_{ij}, \beta_{ij}, \mu_{ij}$ малы по сравнению с единицей и являются величинами одного порядка малости ϵ .

Решение системы (1.2) в первом приближении можно искать в виде [17, 18]:

$$\varphi_i = a_i \cos \psi_i, \quad d\varphi_i/dt = -a_i \omega_i \sin \psi_i, \quad \psi_i = \omega_i t + \theta_i$$

$$\frac{da_i}{dt} \cos \psi_i - a_i \frac{d\theta_i}{dt} \sin \psi_i = 0 \quad (1.3)$$

где $a_i(t)$ и $\theta_i(t)$ – медленно меняющиеся функции времени.

Подставляя (1.3) в малые члены (1.2), содержащие периодические составляющие, в первом приближении получаем

$$\frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} + \omega_i \delta_{ii} \frac{d\varphi_i}{dt} + \omega_i^2 \varphi_i - \omega_i \sum_{j=1}^{\infty} \eta_{ij} a_j \omega_j [\sin(\psi_j + pt) + \sin(\psi_j - pt)] +$$

$$+ \omega_i^2 \sum_{j=1}^{\infty} a_j \{ \gamma_{ij} [\cos(\psi_j + pt) + \cos(\psi_j - pt)] - k_{ij} \eta_{ij} [\sin(\psi_j + pt) + \sin(\psi_j - pt)] +$$

$$+ q_{ij} [\cos(\psi_j + 2pt) + \cos(\psi_j - 2pt)] + h_{ij} [\cos(\psi_j + \xi t) + \cos(\psi_j - \xi t)] \} +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \left(\omega_i^2 \beta_{ij} \varphi_j + \omega_i \mu_{i,j} \frac{d\varphi_j}{dt} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

Анализ уравнений первого приближения (1.4) показывает [17, 18], что в такой системе может возникнуть более пятидесяти параметрических резонансов, которые представлены в таблице.

На рассматриваемую систему действуют одновременно два возбуждения (p^n, ξ^n). Каждое из этих возбуждений в отдельности может вызвать в системе основные и комбинационные резонансы на одной или двух собственных частотах. Пульсации осевой сжимающей силы с частотой ξ могут вызвать три типа резонансов, а пульсации скорости жидкости с частотой p – шесть типов резонансов. Назовем такие резонансы классическими (см. таблицу), поскольку они уже достаточно подробно описаны в литературе [15, 16]. В таблице классические резонансы обозначены (R_c).

Действуя на систему совместно, два возбуждения могут вызывать параметрические резонансы в трех случаях:

1. Когда оба возбуждения вызывают классический резонанс одновременно на разных собственных частотах. В этом случае в системе возможен резонанс минимум на двух (например $p = 2\omega_k$ и $\xi = 2\omega_m$) и максимум на четырех собственных частотах (например, $p = (\omega_k + \omega_m)$ и $\xi = (\omega_n + \omega_l)$, $k \neq m \neq n \neq l$).

2. Когда оба возбуждения действуют на одних и тех же собственных частотах, причем возможны два варианта возбуждений: когда совпадают частоты – $p = \xi$ (например, $p = 2\omega_k$ и $\xi = 2\omega_k$) и когда $p \neq \xi$ (например, $p = \omega_k$ и $\xi = 2\omega_k$). Ниже будет показано, что влияние возбуждений на систему при таких резонансах будет складываться, поэтому данная группа резонансов названа аддитивными резонансами (p^n, ξ^n). Аддитивные резонансы возникают на одной или двух собственных частотах системы.

R_c	p^n	ξ^n	p^n	ξ^n	p^a	ξ^a	p_2^r	ξ_2^r	p_3^r	ξ_3^r
$p = \omega_k$	ω_m	$2\omega_k$	ω_m	$(\omega_l + \omega_n)$	$2\omega_k$	$2\omega_k$	ω_k	$(\omega_k + \omega_m)$	$1/2(\omega_k + \omega_m)$	$(\omega_k + \omega_l)$
$p = 2\omega_k$	$2\omega_m$	$2\omega_k$	$2\omega_m$	$(\omega_l + \omega_n)$	$(\omega_k + \omega_m)$	$(\omega_k + \omega_m)$	ω_k	$ \omega_k - \omega_m $	$1/2(\omega_k + \omega_m)$	$ \omega_k - \omega_l $
$p = 1/2(\omega_k + \omega_m)$	$1/2(\omega_k + \omega_m)$	$2\omega_k$	$1/2(\omega_k + \omega_m)$	$(\omega_l + \omega_n)$	$ \omega_k - \omega_m $	$ \omega_k - \omega_m $	$2\omega_k$	$(\omega_k + \omega_m)$	$1/2 \omega_k - \omega_m $	$(\omega_k + \omega_l)$
$p = 1/2 \omega_k - \omega_m $	$1/2(\omega_k - \omega_m)$	$2\omega_k$	$1/2 \omega_k - \omega_m $	$(\omega_l + \omega_n)$	$2\omega_k$	$2\omega_k$	$2\omega_k$	$ \omega_k - \omega_m $	$1/2 \omega_k - \omega_m $	$ \omega_k - \omega_l $
$p = (\omega_k + \omega_m)$	$(\omega_k + \omega_m)$	$2\omega_k$	$(\omega_k + \omega_m)$	$(\omega_l + \omega_n)$	ω_k	$2\omega_k$	$1/2(\omega_k + \omega_m)$	$2\omega_k$	$(\omega_k + \omega_m)$	$(\omega_k + \omega_l)$
$p = \omega_k - \omega_m $	$ \omega_k + \omega_m $	$2\omega_k$	$ \omega_k - \omega_m $	$(\omega_l + \omega_n)$	$1/2(\omega_k + \omega_m)$	$(\omega_k + \omega_m)$	$1/2 \omega_k - \omega_m $	$2\omega_k$	$(\omega_k + \omega_m)$	$ \omega_k - \omega_l $
$\xi = 2\omega_k$	ω_m	ω_m	ω_m	$ \omega_l - \omega_n $	$1/2 \omega_k - \omega_m $	$ \omega_k - \omega_m $	$(\omega_k + \omega_m)$	$2\omega_k$	$ \omega_k - \omega_m $	$(\omega_k + \omega_l)$
$\xi = (\omega_k + \omega_m)$	$2\omega_m$	$2\omega_m$	$2\omega_m$	$ \omega_l - \omega_n $	$ \omega_k - \omega_m $	$2\omega_k$	$ \omega_k - \omega_m $	$2\omega_k$	$ \omega_k - \omega_m $	$ \omega_k - \omega_l $
$\xi = \omega_k - \omega_m $	$1/2(\omega_k + \omega_m)$	$1/2(\omega_k + \omega_m)$	$1/2(\omega_k + \omega_m)$	$ \omega_l - \omega_n $	$ \omega_k - \omega_m $	$ \omega_k - \omega_m $	$(\omega_k + \omega_m)$	$ \omega_k - \omega_m $	$(\omega_k + \omega_m)$	$(\omega_k + \omega_l)$
	$1/2 \omega_k - \omega_m $	$1/2 \omega_k - \omega_m $	$1/2 \omega_k - \omega_m $	$ \omega_l - \omega_n $	$ \omega_k - \omega_m $	$(\omega_k + \omega_m)$	$ \omega_k - \omega_m $	$(\omega_k + \omega_m)$	$(\omega_k + \omega_m)$	$(\omega_k + \omega_l)$
	$(\omega_k + \omega_m)$	$(\omega_k + \omega_m)$	$(\omega_k + \omega_m)$	$ \omega_l - \omega_n $	$1/2(\omega_k + \omega_m)$	$ \omega_k - \omega_m $	$1/2(\omega_k + \omega_m)$	$ \omega_k - \omega_m $	$1/2(\omega_k + \omega_m)$	$ \omega_k - \omega_l $
	$ \omega_k - \omega_m $	$ \omega_k - \omega_m $	$ \omega_k - \omega_m $	$ \omega_l - \omega_n $	$1/2 \omega_k - \omega_m $	$ \omega_k - \omega_m $	$1/2 \omega_k - \omega_m $	$ \omega_k - \omega_m $	$1/2 \omega_k - \omega_m $	$(\omega_k + \omega_m)$

3. Когда два возбуждения взаимодействуют сложным образом, вызывая резонанс на двух (например $p = (\omega_k + \omega_m)$ и $\xi = 2\omega_k$) или трех собственных частотах (например, $p = (\omega_k + \omega_m)$ и $\xi = (\omega_k + \omega_l)$, ($k \neq m \neq l$)). Это наиболее интересный вид резонансов. Такие резонансы названы особыми (p^r, ξ^r). В таблице особые резонансы на двух частотах обозначены (p_2^r, ξ_2^r), а на трех — (p_3^r, ξ_3^r).

Аддитивные и особые резонансы являются отличительной особенностью рассматриваемой динамической системы с двумя параметрическими возбуждениями. Резонансы такого типа нигде в литературе не описаны.

Применение к системе (1.4) асимптотических методов получения областей неустойчивости с введением малых, порядка ϵ частотных расстройок [17, 18] позволило получить с точностью до величин порядка ϵ области неустойчивости и условия возникновения неустойчивости указанных резонансов. Ниже приводятся отдельные результаты проведенного исследования.

2. Аддитивные резонансы. 1. Рассмотрим пример аддитивного резонанса, когда $p = \xi = 2\omega_k$. Область неустойчивости имеет вид

$$\begin{cases} 2\omega_k - \beta_k < p < 2\omega_k + \beta_k \\ 2\omega_k - \beta_k < \xi < 2\omega_k + \beta_k \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\beta_k = \omega_k \sqrt{(\gamma_{kk} + h_{kk})^2 - \delta_{kk}^2} \quad (2.2)$$

Если сравнить (2.2) с аналогичным выражением, приведенным в [16] для основного резонанса $p = 2\omega_k$ в случае одного возбуждения, вызванного пульсацией потока жидкости, то видно, что действие возбуждения, вызванного осевой сжимающей силой (h_{kk}) складывается с действием возбуждения, вызванного пульсацией потока жидкости (γ_{kk}). Из-за этой особенности резонанс назван аддитивным.

Условие возникновения области неустойчивости (2.1) определяется неравенством

$$(\gamma_{kk} + h_{kk})^2 > \delta_{kk}^2 \quad (2.3)$$

2. Рассмотрим пример аддитивного резонанса при $p = \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_m)$ и $\xi = (\omega_k + \omega_m)$, ($k \neq m$). Область неустойчивости в этом случае определяется как

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_m) - \frac{1}{2}B_{km} < p < \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_m) + \frac{1}{2}B_{km} \\ (\omega_k + \omega_m) - B_{km} < \xi < (\omega_k + \omega_m) + B_{km} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$B_{km} = \frac{\omega_k \delta_{kk} + \omega_m \delta_{mm}}{2\sqrt{\delta_{kk}\delta_{mm}}} \sqrt{(q_{km} + h_{km})(q_{mk} + h_{mk}) - \delta_{kk}\delta_{mm}} \quad (2.5)$$

Видно, что в формуле (2.5) также происходит сложение действия двух возбуждений. Условие возникновения области неустойчивости имеет вид

$$(q_{km} + h_{km})(q_{mk} + h_{mk}) > \delta_{kk}\delta_{mm} \quad (2.6)$$

Необходимо отметить, что изложенное в [16] правило знаков распространяется и на данный тип резонанса. Действительно, с учетом обозначений (1.2) из (2.6) следует условие существования резонанса

$$\text{sign}(c_{km}) = \text{sign}(c_{mk}) \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что резонансы такого типа не могут иметь место для шарнирно закрепленных трубопроводов.

Как и в случае комбинационного резонанса суммарного типа, который рассмотрен в работе [16] в данном резонансе возможно расширение области неустойчивости при введении в систему демпфирования

$$\frac{\omega_k \delta_{kk} + \omega_m \delta_{mm}}{2 \sqrt{\delta_{kk} \delta_{mm}}} \sqrt{(q_{km} + h_{km})(q_{mk} + h_{mk}) - \delta_{kk} \delta_{mm}} > \frac{\omega_k + \omega_m}{2} \sqrt{(q_{km} + h_{km})(q_{mk} + h_{mk})} \quad (2.8)$$

Неравенство (2.8) имеет место при выполнении условия

$$(q_{km} + h_{km})(q_{mk} + h_{mk}) > \frac{(\omega_k \delta_{kk} + \omega_m \delta_{mm})^2}{(\omega_k^2 \delta_{kk} - \omega_m^2 \delta_{mm})(\delta_{kk} - \delta_{mm})} \delta_{kk} \delta_{mm} \quad (2.9)$$

$$(\omega_k^2 \delta_{kk} \neq \omega_m^2 \delta_{mm}) \quad (\delta_{kk} \neq \delta_{mm})$$

3. Особые резонансы. 1. Особый резонанс $p = \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_m)$ и $\xi = 2\omega_k$ ($k \neq m$) имеет область неустойчивости

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_m) - \frac{1}{2}\alpha(\omega_k + G\omega_m) < p < \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_m) + \frac{1}{2}\alpha(\omega_k + G\omega_m) \\ 2\omega_k - 2\omega_k\alpha < \xi < 2\omega_k + 2\omega_k\alpha \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{8G^2}[-B + \sqrt{B^2 - M}]$$

$$B = (\delta_{mm}^2 + G^2\delta_{kk}^2 - G^2h_{kk}^2 - 2q_{km}q_{mk}G) \quad (3.2)$$

$$M = 4G^2((q_{km}q_{mk} + \delta_{kk}\delta_{mm})^2 - \delta_{mm}^2h_{kk}^2)$$

$$G = 3\omega_k/\omega_m$$

Условие существования неустойчивых колебаний определяется неравенствами:

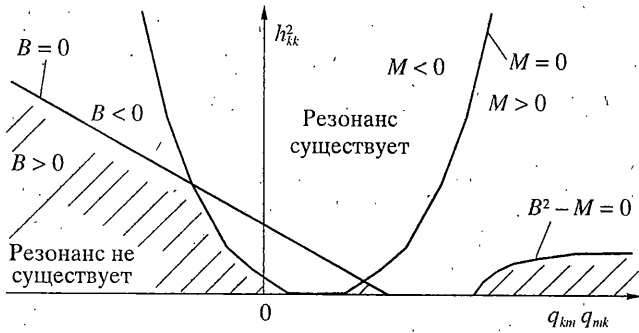
$$B < 0, \quad B^2 - M \geq 0; \quad B \geq 0, \quad M < 0 \quad (3.3)$$

Условие (3.3) удобно представить графически на плоскости параметров

$$h_{kk}^2 = \left(\frac{Q_1}{2\rho}\right)^2 \frac{c_{kk}^2}{\omega_k^4}, \quad q_{km}q_{mk} = \left(\frac{v_1}{16}\right) \frac{c_{km}c_{mk}}{\omega_k^2\omega_m^2}$$

в виде области устойчивых колебаний и области, где возможна неустойчивость (см. фиг. 1). Такое представление условий (3.3) позволяет легко отстроиться от данного резонанса не решая системы уравнений (1.2). Выбирая значения Q_1 и v_1 можно подобрать такую точку, в которой колебания трубопровода будут устойчивыми (области, где резонанса нет, заштрихованы).

Для рассматриваемого резонанса найдены соотношения параметров системы, при которых увеличение действия одного из возбуждений приводит к уменьшению зоны неустойчивости.



Фиг. 1. Графическое представление условий существования особого резонанса $p = \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_m)$ и $\xi = 2\omega_k$.

В случае увеличения $q_{km}q_{mk}$: $q_{km}q_{mk}^* = q_{km}q_{mk} + C$ ($C > 0$) уменьшение зоны неустойчивости

$$\frac{1}{8G^2}[-B + \sqrt{B^2 - M}] > \frac{1}{8G^2}[-B + 2GC + \sqrt{(B - 2GC)^2 - M - 4G^2C^2 - 8G^2(q_{km}q_{mk} - \delta_{km}\delta_{mk})C}]$$

возможно, когда

$$h_{kk}^2 < (\delta_{mm} - \delta_{kk}G)^2 / G^2$$

$$\sqrt{B^2 - M} - 2B - 4Gq_{km}q_{mk} + 4G\delta_{kk}\delta_{mm} < 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{G}(-B + \sqrt{B^2 - M}) - 2q_{km}q_{mk} + 2\delta_{kk}\delta_{mm} < C < \frac{1}{2G}\sqrt{B^2 - M}$$

где B, M, G взяты из (3.2).

В данном резонансе найдено также условие, при выполнении которого дополнительное демпфирование будет расширять область неустойчивости

$$\frac{1}{8G^2}[-B + \sqrt{B^2 - M}] > \frac{1}{8G^2}[G^2h_{kk}^2 + 2q_{km}q_{mk}G + \sqrt{(G^2h_{kk}^2 + 2q_{km}q_{mk}G)^2 - (2Gq_{km}q_{mk})^2}]$$

Это условие определяется неравенством

$$0 < \delta_{mm}^2 a_1 - \delta_{kk}^2 a_2 - \delta_{mm}^2 \delta_{kk}^2 a_3 + \delta_{mm} \delta_{kk} a_4$$

$$a_1 = 2h_{kk}^2 G^2 - 4q_{km}q_{mk}G - 2\sqrt{(h_{kk}^2 G^2 - 2q_{km}q_{mk}G)^2 - 4q_{km}^2 q_{mk}^2 G^2} \quad (3.5)$$

$$a_2 = 2h_{kk}^2 G^4 + 4q_{km}q_{mk}G^2 + 2G^2\sqrt{(h_{kk}^2 G^2 - 2q_{km}q_{mk}G)^2 - 4q_{km}^2 q_{mk}^2 G^2}$$

$$a_3 = 4G^2, \quad a_4 = 8q_{km}q_{mk}G^2$$

2. Наиболее интересный вид особого резонанса, возбуждаемый на трех собственных частотах системы при $p = \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_m)$ и $\xi = (\omega_k + \omega_l)$, ($k \neq m \neq l$) имеет область неустойчивости

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_m) - \frac{1}{2}(\omega_k \alpha_k + \omega_l \alpha_l) < p < \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_m) + \frac{1}{2}(\omega_k \alpha_k + \omega_l \alpha_l) \\ (\omega_k + \omega_l) - \frac{1}{2}(\omega_k \alpha_k + \omega_l \alpha_l) < \xi < (\omega_k + \omega_l) + \frac{1}{2}(\omega_k \alpha_k + \omega_l \alpha_l) \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \sqrt{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}} / (2a)$$

$$\alpha_k = \alpha_l \left[\frac{G q_{km} q_{mk}}{(4\alpha_l^2 G^2 + \delta_{mm}^2)} + \frac{h_{kl} h_{lk}}{(4\alpha_l^2 + \delta_{ll}^2)} \right], \quad a = G^2 \delta_{kk} \quad (3.7)$$

$$b = (\delta_{mm}^2 \delta_{kk} - G \delta_{ll}^2 \delta_{kk} - q_{km} q_{mk} \delta_{mm} - G^2 h_{kl} h_{lk} \delta_{ll}),$$

$$c = (\delta_{mm}^2 \delta_{ll}^2 \delta_{kk} - \delta_{ll}^2 \delta_{mm} q_{km} q_{mk} - h_{kl} h_{lk} \delta_{ll} \delta_{mm}^2), \quad G = \omega_l / \omega_m$$

Условия существования области неустойчивости в (3.6) имеют вид

$$b < 0, \quad c > 0, \quad b^2 - 4ac \geq 0; \quad b \geq 0, \quad c > 0, \quad ac < 0 \quad (3.8)$$

Условия (3.8) как и в предыдущем случае удобно представить на плоскости параметров

$$h_{kl} h_{lk} = \left(\frac{Q_1}{2\rho} \right)^2 \frac{c_{kl} c_{lk}}{\omega_k^2 \omega_l^2}, \quad q_{km} q_{mk} = \left(\frac{v_1^4}{16} \right) \frac{c_{km} c_{mk}}{\omega_k^2 \omega_m^2}$$

в виде области устойчивых колебаний (заштрихована) и области неустойчивых колебаний (см. фиг. 2). Также, как и в рассмотренном выше случае, выбирая значения Q_1 и v_1 можно легко произвести отстройку от резонанса используя только коэффициенты системы (1.2).

Из условий (3.8) найдено правило существования зоны неустойчивости (3.6):

$$\text{sign}(h_{kl}) \neq \text{sign}(h_{lk}), \quad \text{sign}(q_{km}) \neq \text{sign}(q_{mk}) \quad (3.9)$$

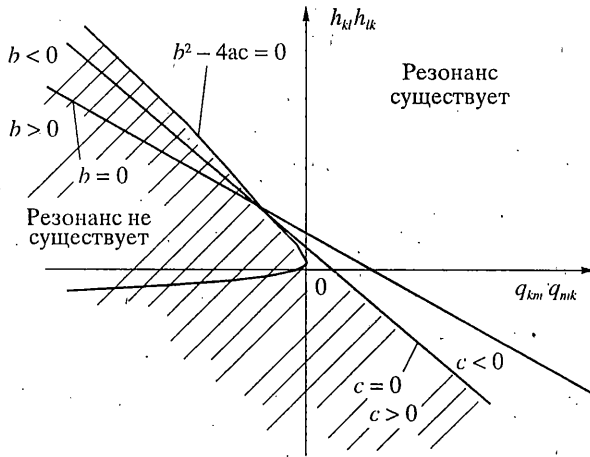
Если условие выполнено, то область неустойчивости (3.6) всегда отсутствует; если правило (3.9) не выполнено, то необходимо воспользоваться более общими условиями (3.8). Из условий (3.8) следует также, что рассматриваемый резонанс не существует при шарнирном закреплении трубопровода.

Введение демпфирования может расширять область неустойчивости данного резонанса.

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > \frac{q_{km} q_{mk} - G^2 h_{kl} h_{lk}}{G^2}$$

в случае, если выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \delta_{kk} \delta_{ll} \delta_{mm}^2 n_1 + \delta_{kk} \delta_{mm} \delta_{ll}^2 n_2 + \delta_{kk} \delta_{ll} n_3 + \delta_{kk} \delta_{mm} n_4 - \\ & - \delta_{kk}^2 \delta_{ll}^2 \delta_{mm}^2 n_5 - \delta_{kk}^2 n_6 - \delta_{kk}^2 \delta_{mm}^2 n_7 - \delta_{kk}^2 \delta_{ll}^2 n_8 > 0 \end{aligned}$$



Фиг. 2. Графическое представление условий существования особого резонанса $p = \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_m)$ и $\xi = (\omega_k + \omega_l)$.

$$\begin{aligned}
 n_1 &= G^2 h_{kl} h_{lk}, & n_5 &= G^2 \\
 n_2 &= G^2 q_{km} q_{mk}, & n_6 &= (q_{km} q_{mk} + h_{kl} h_{lk} G^2)^2 \\
 n_3 &= G^2 h_{kl} h_{lk} (q_{km} q_{mk} + h_{kl} h_{lk} G^2), & n_7 &= (q_{km} q_{mk} + h_{kl} h_{lk} G^2) \\
 n_4 &= q_{km} q_{mk} (q_{km} q_{mk} + h_{kl} h_{lk} G^2), & n_8 &= G^2 (q_{km} q_{mk} + h_{kl} h_{lk} G^2)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

4. Выводы. Анализ проведенных результатов дает возможность сформулировать следующие новые и важные положения теории динамической устойчивости трубопроводов при двойном параметрическом возбуждении.

1. *Новые виды параметрических резонансов.* Воздействие на систему одновременно двух параметрических возбуждений приводит, помимо резкого увеличения числа возможных резонансов, к появлению новых типов параметрических резонансов, названных аддитивными и особыми резонансами (таблица).

2. *Условия существования областей неустойчивости аддитивных и особых резонансов.* Для аддитивных резонансов условия возникновения и существования областей неустойчивости аналогичны условиям для обычных основных и комбинационных резонансов, приведенным в [16]. В частности правило знаков для комбинационных резонансов суммарного типа $\text{sign}(c_{km}) = \text{sign}(c_{mk})$ распространяется и на аддитивный резонанс $p = \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_m)$ и $\xi = (\omega_k + \omega_m)$, ($k \neq m$).

Для особых резонансов условия существования областей неустойчивости удобно представлять графически в виде областей на плоскости параметров двух возбуждений. Такое наглядное представление позволяет не решая системы дифференциальных уравнений легко находить оптимальное сочетание параметров трубопровода и возбуждений для заданных условий работы конструкции, в частности, для отстройки от резонанса.

В случае особого резонанса вида $p = \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_m)$ и $\xi = (\omega_k + \omega_l)$, ($k \neq m \neq l$) найдено также правило знаков, показывающее, что если в системе имеют место такие возбуждения, что $\text{sign}(h_{kl}) \neq \text{sign}(h_{lk})$, $\text{sign}(q_{km}) \neq \text{sign}(q_{mk})$, то область неустойчивости всегда будет отсутствовать.

Анализ условий существования резонансов показывает, что для шарнирно закрепленных трубопроводов резонансы $p = \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_m)$, $\xi = (\omega_k + \omega_m)$ и $p = \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_m)$, $\xi = (\omega_k + \omega_l)$, ($k \neq m \neq l$) не могут иметь место.

3. *Явление расширения области неустойчивости аддитивных и особых резонансов при введении в систему дополнительного демпфирования.* Аддитивные и особые резонансы допускают расширение области неустойчивости при введении дополнительного демпфирования. Для рассмотренных резонансов найдены условия расширения области неустойчивости.

4. *Явление уменьшения области неустойчивости особых резонансов при увеличении коэффициентов параметрических возбуждений.* При исследовании особого резонанса $p = \frac{1}{2}(\omega_k + \omega_m)$ и $\xi = 2\omega_k$, ($k \neq m$) обнаружено, что увеличение коэффициентов параметрических возбуждений $q_{km}q_{mk}$ при определенных условиях, найденных в ходе проведенного исследования, может приводить к уменьшению области неустойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gunder D., Friant D.* Stability of Flow in a Rocket Motor // J. Appl. Mech. 1950. V. 17. № 3. P. 327–333.
2. *Yamaguchi A.* Studies on the characteristics of axial plunger pumps and motors // Bull. JSME. 1966. V. 9. № 34. P. 314–327.
3. *Kalinin V.M., Sherstianikov V.A.* Vibration and pulsation processes in feed systems of liquid rocket engines // Acta astronaut. 1983. V. 10. № 11. P. 713–718.
4. *Aitken J.* An account on some experiments on rigidity produced by centrifugal force // Philos. Mag. 1878. Ser. 5. № 5: P. 81–105.
5. *Ashley H., Haviland G.* Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid // J. Appl. Mech. 1950. V. 17. № 3. P. 229–232.
6. *Феодосьев В.И.* О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб. 1951. Т. 10. С. 169–170.
7. *Housner G.W.* Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. № 2. P. 205–208.
8. *Long R.H.* Experiments and theoretical study of transverse vibrations of a tube containing flowing fluid // J. Appl. Mech. 1955. V. 22. № 1. P. 65–68.
9. *Gregory R.W., Paidoussis M.P.* Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid. Theory and experiments. Pt 1–2 // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1966. V. 239. No. 1435. P. 512–542.
10. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987. С. 432.
11. *Кондрашов Н.С.* Параметрические колебания трубопроводов на упругодемпфирующих опорах, вызываемые пульсирующим потоком // Рассеяние энергии при колебаниях механических систем. Киев: Наук, думка, 1968. С. 427–433.
12. *Chen S.S.* Dynamic stability of tube conveying fluid // J. Engng Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs. 1971. V. 97. № 5. P. 1469–1485.
13. *Paidoussis M.P., Issid N.T.* Dynamic Stability of pipes conveying fluid // J. of Sound and Vibrat. 1974. V. 33. № 3. P. 267–294.
14. *Paidoussis M.P., Issid N.T.* Experiments on parametric resonance of pipes containing pulsatile-flow // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1976. V. 43. № 2. P. 198–202.
15. *Светлицкий Ю.А.* Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. С. 279.
16. *Челомей С.В.* О динамической устойчивости упругих систем при протекании через них пульсирующей жидкости // Изв. АН СССР. МТТ. № 5. 1984. С. 170–174.
17. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. С. 503.
18. *Челомей С.В.* О динамической устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252. № 2. С. 307–310.