

УДК 533.6.013.42

© 1998 г. В. В. МОКЕЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ КОНСТРУКЦИЙ С ЖИДКОСТЬЮ И ГАЗОМ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Интерес к динамическому взаимодействию упругих конструкций с жидкостью и газом обусловлен развитием и совершенствованием различных отраслей современной техники. Во многих случаях для решения подобных задач достаточно использовать линейную постановку: жидкость – идеальная, конструкция – упругая. При этом удобно использовать конечноэлементную формулировку задачи гидроупругого взаимодействия конструкции с жидкостью в виде матричных уравнений относительно потенциалов перемещений (в сочетании с уравнениями для давлений) жидкости и перемещений конструкции. Такая формулировка приводит к симметричным матричным уравнениям, для решения которых могут быть использованы известные методы. В [1] для нахождения собственных чисел и векторов таких матричных систем используется метод частотнодинамической (частотной) конденсации. Метод был апробирован для задач гидроупругого взаимодействия упругих конструкций, содержащих сжимаемую или несжимаемую жидкость. В данной работе делается попытка обобщить этот метод на задачи колебания систем “конструкция–жидкость–поверхностные волны” и “конструкция–газ”. Основные трудности, возникающие при этом, связаны с сингулярностью гидродинамической матрицы жидкости. В работе обсуждаются способы преодоления этих трудностей. Приведены численные примеры, демонстрирующие точность метода. Представлены численные исследования ударного нагружения оболочек с жидкостью. Обсуждается вопрос о влиянии сжимаемости жидкости на вынужденные колебания конструкции.

1. Введение. Рассмотрим решение задачи гидроупругого взаимодействия системы, состоящей из упругой конструкции и жидкости. Для жидкости принимаются следующие допущения: возмущения среды малые, вязкость отсутствует, средняя скорость потока равна нулю. Будем использовать конечноэлементную формулировку решения задачи, для которой поведение жидкости описывается сеткой конечных элементов с потенциалом перемещений в качестве узловых неизвестных, поведение свободной поверхности – сеткой конечных элементов с нормальными перемещениями к невозмущенной поверхности жидкости в качестве узловых неизвестных, и поведение конструкции – сеткой конечных элементов с узловыми перемещениями в качестве неизвестных. Такая формулировка задачи приводит к матричным уравнениям вида [2]:

$$K\delta + C\dot{\delta} + M\ddot{\delta} = F$$

$$M = \begin{vmatrix} M_p & L^T & 0 \\ L & -H & Q \\ 0 & Q & 0 \end{vmatrix}, \quad K = \begin{vmatrix} K_p + K^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^{-1}Q \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

$$C = \begin{vmatrix} C_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{Bmatrix} u \\ \gamma \\ p \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} F_p \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Здесь u – вектор узловых перемещений конструкции и нормальных перемещений свободной поверхности жидкости, γ – вектор узловых значений потенциала перемещений жидкости, p – вектор узловых значений давлений жидкости, K_p, C_p, M_p – матрицы жесткости, вязкости и масс конструкции, L – матрица площадей раздела “конструкция – жидкость – свободная поверхность”, H, Q – матрицы гидродинамических жесткостей и масс жидкости, K^* – гидродинамическая матрица свободной поверхности жидкости, F_p – вектор внешних сил, действующих на упругую конструкцию, ρ – плотность жидкости. Выражения для матриц конечных элементов, из которых формируются матрицы $K_p, C_p, M_p, H, Q, L, K^*$ можно найти в [2, 3].

Уравнение (1.1) будет описывать колебания системы “упругая конструкция–газ”, если из вектора u исключить нормальные перемещения свободной поверхности жидкости, а матрицу K^* положить равной нулю.

2. Метод решения. Решение уравнения (1.1) ищется в виде линейной комбинации собственных векторов, полученных в результате решения задачи о собственных значениях уравнения

$$(K - \omega^2 M)\delta_0 = 0 \quad (2.1)$$

При этом вектор узловых перемещений определяется по формуле

$$\delta = \sum \delta_{0i} q_i(t)$$

где $q_i(t)$ – коэффициенты пропорциональности при собственных векторах. Значение $q_i(t)$ определяются из решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для определения собственных чисел и векторов уравнения (2.1) используется метод частотной конденсации. Описание алгоритма метода частотной конденсации можно найти в работе [1], а особенности применения этого метода к расчету конструкций с жидкостью – в [2].

Конечноэлементная формулировка задач “упругая конструкция–жидкость–поверхностные волны” и “упругая конструкция–газ” приводит к матричному уравнению (1.1) с сингулярной матрицей H . Это вызывает определенные трудности при нахождении собственных чисел и векторов таких систем. В [2] для преодоления этих трудностей вводится обобщенное гидродинамическое давление жидкости в качестве неизвестной величины, что позволяет путем преобразований матрицы H избавиться от ее сингулярности. При этом каждый независимый объем жидкости представляется в виде специального суперэлемента с вектором узловых перемещений границы этого объема и дополнительной неизвестной, соответствующей обобщенному давлению жидкости. Однако, матрицы таких суперэлементов являются сингулярными и, поэтому, дальнейшие вычисления с использованием таких суперэлементов также могут вызывать затруднения.

При использовании метода частотной конденсации сингулярность матрицы H приводит к тому, что при исключении последней компоненты вектора γ_0 по схеме Гаусса возникает ситуация “деление на ноль”. Поясним это более подробно. Для этого представим матрицы H, L, Q и вектор γ_0 в виде

N	ω	χ	ω	χ
1	501.2	0.01155	501.2	0.00796
2	610.6	0.09870	610.6	0.00670
3	784.1	0.00597	784.1	0.00122
4	807.5	0.04908	807.5	0.00039
5	810.5	0.01004	810.5	0.00074
6	826.9	0.00442	826.9	0.00064
7	828.3	0.00225	828.3	0.000449

$$H = \begin{vmatrix} H_m & H_1 \\ H_1^T & h_{m+1} \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} Q_m & Q_1 \\ Q_1^T & q_{m+1} \end{vmatrix}, \quad L = \begin{vmatrix} L_m \\ L_1 \end{vmatrix}$$

$$\gamma_0 = \begin{Bmatrix} \gamma_{0m} \\ \gamma_{0m+1} \end{Bmatrix}, \quad p_0 = \begin{Bmatrix} p_{0m} \\ p_{0m+1} \end{Bmatrix}$$

где H_m , Q_m – матрицы размерностью $m \times m$, H_1 , Q_1 – матрицы размерностью $1 \times m$, h_{m+1} , q_{m+1} – диагональные элементы матриц H и Q , L_m – матрица размерностью $n \times m$, L_1 – матрица размерностью $1 \times n$, $m+1$ – размерность вектора γ_0 , n – размерность вектора u . Так как матрица H_m не является сингулярной, то компоненты вектора γ_{0m} можно исключить по схеме Гаусса. Уравнение (2.1) после такого исключения будет иметь вид

$$-\omega^2 \begin{vmatrix} M_p + M_a & L_1^T + L_{a1}^T & S_{am}^T & S_{a1}^T \\ L_1 + L_{a1} & -(h_{m+1} + h_a) & Q_1^T + Q_{a1}^T & q_{m+1} + q_a \\ S_{am} & Q_1 + Q_{a1} & G_{am} & G_{a1} \\ S_{a1} & q_{m+1} + q_a & G_{a1}^T & g_a \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} K_p + K^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^{-1} Q_m & \rho^{-1} Q_1 \\ 0 & 0 & \rho^{-1} Q_1^T & \rho^{-1} q_{m+1} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ \gamma_{0m+1} \\ p_{0m} \\ p_{0m+1} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.2)$$

$$M_a = L_m^T H_m^{-1} L_m, \quad L_{a1} = -H_1^T H_m^{-1} L_m, \quad S_{am} = Q_m^T H_m^{-1} L_m, \quad S_{a1} = Q_1^T H_m^{-1} L_m$$

$$Q_{a1} = -H_1^T H_m^{-1} Q_m, \quad q_a = -H_1^T H_m^{-1} Q_1, \quad G_{a1} = Q_m^T H_m^{-1} Q_1, \quad G_{am} = Q_m^T H_m^{-1} Q_m$$

$$h_a = -H_1^T H_m^{-1} H_1, \quad g_a = Q_1^T H_m^{-1} Q_1$$

Элемент матрицы $-h_{m+1} - h_a = 0$, так как матрица H сингулярна. Поэтому, исключение переменной γ_{0m+1} с помощью стандартной процедуры Гаусса невозможно. Однако, это затруднение можно обойти, используя следующие приемы.

1. Первый прием заключается в добавлении к “нулю” числа, равного $-\alpha h_{m+1}$. Значение параметра α естественно зависит от числа значащих цифр, используемых в вычислениях. Если в вычислениях участвуют 15–16 значащих цифр, то $\alpha = 10^{-6} \dots 10^{-8}$. После такой операции компонента γ_{0m+1} исключается по стандартной схеме Гаусса.

2. Во втором способе исключение компоненты γ_{0m+1} ведется с помощью соотношения $\gamma = (\omega^2 \rho)^{-1} p$. В этом случае исключение компоненты γ_{0m+1} из уравнения (2.2) приводит к матричному уравнению вида

$$\left(\begin{array}{ccc} K_p + K^* & 0 & \rho^{-1}(L_1 + L_a) \\ 0 & \rho^{-1}Q_m & \rho^{-1}Q_{a1} \\ \rho^{-1}(L_1 + L_a)^T & \rho^{-1}Q_{a1}^T & \rho^{-1}(q_{m+1} + 2q_a) \end{array} \right) -$$

$$-\omega^2 \left(\begin{array}{ccc} M_p + M_a & S_{am} & S_{a1} \\ S_{am}^T & G_{am} & G_{a1} \\ S_{a1}^T & G_{a1}^T & g_a \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} u_0 \\ p_{0m} \\ p_{0m+1} \end{array} \right\} = 0 \quad (2.3)$$

Отметим, что при исключении по первому способу изменяются коэффициенты матрицы масс, а при исключении по второму способу изменяются коэффициенты матрицы жесткости.

Точность данных способов демонстрируется на примере колебаний цилиндрической оболочки с жесткими плоскими днищами, заполненной газом. Нижний край оболочки свободной оперт. Параметры оболочки: радиус 1 м, толщина 0.01 м, модуль упругости 70 ГПа, коэффициент Пуассона 0.3, плотность материала 2700 кг/м³. Параметры газа: скорость звука 340 м/с², плотность 1 кг/м³.

В качестве критерия качества вычисленных собственных частот и форм используется

$$\chi = \frac{\| (K - \omega^2 M) \delta \|}{\| K \delta \|}$$

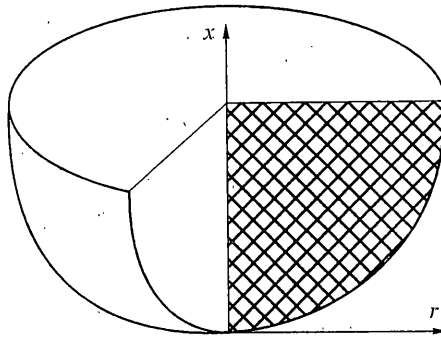
Критерий χ представляет отношение нормы невязки уравнения (2.1) к норме упругих сил и характеризует степень приближения ω_i и δ_i к соответствующим точным значениям.

В табл. 1 сравниваются значения собственных частот (Гц) и коэффициентов качества, полученных с помощью первого и второго способов (последние два столбца). Результаты, представленные в табл. 1, показывают, что несмотря на совпадение собственных частот, точность вычисления собственных форм с помощью второго способа намного выше (N – номер тона).

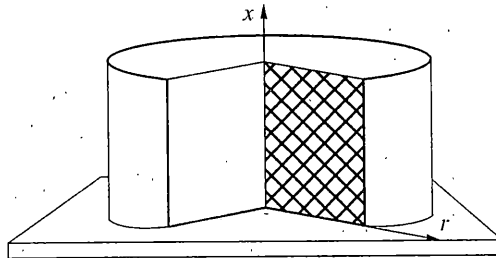
3. Численные примеры. Качество модального метода расчета вынужденных колебаний во многом зависит от качества решения проблемы собственных колебаний. Поэтому, ниже рассматриваются задачи расчета собственных частот оболочки с жидкостью и акустических полостей. Все вычисления собственных частот описанных выше методом выполнены с помощью пакета программ ДИАС-3.0.

Достоверность решений, получаемых описанным подходом, для систем “упругая оболочка–несжимаемая жидкость” с учетом волн на свободной поверхности демонстрируется на примере расчета собственных частот и форм полусферической оболочки с жидкостью.

Рассматриваются полусферическая оболочка с жидкостью, исследованная в [2] (фиг. 1). Верхний край оболочки защемлен. Параметры оболочки: радиус 5.08 м, толщина 0.00254 м, модуль упругости 10 ГПа, коэффициент Пуассона 0.3, плотность материала 2770 кг/м³. Параметры жидкости: плотность 1000 кг/м³, скорость звука 1450 м/с². Ниже приведены первые три низшие собственные частоты (Гц), которые сравниваются с собственными частотами, полученными в [2]. Сравнение результатов показывает хорошую сходимость.



Фиг. 1.



Фиг. 2

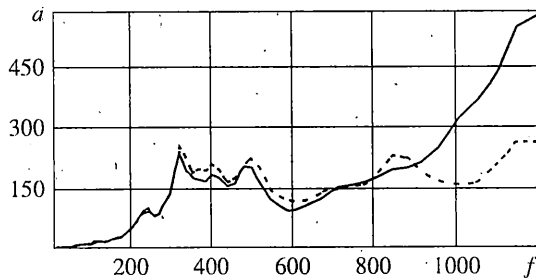
Достоверность решений, получаемых описанным подходом, для акустических систем демонстрируется на примерах расчета собственных частот и форм следующих акустических полостей: кольцо и полость осесимметричного типа. Во всех случаях стенки акустических полостей являются абсолютно жесткими. Все собственные частоты определяются для воздуха при комнатной температуре и, следовательно, для скорости звука 344.42 м/с . Формы собственных колебаний, соответствующие найденным собственным частотам, обозначаются индексами i, m, n , которые численно равны числу волн в продольном, окружном и радиальном направлениях цилиндрической системы координат соответственно.

Рассматриваются собственные колебания акустической полости, имеющей форму цилиндра. Полость имеет внутренний радиус 0.09049 м , внешний радиус 0.11906 м и длину 0.29845 м .

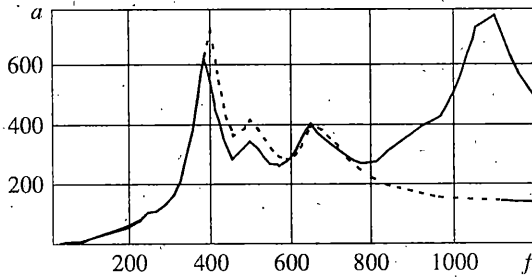
Акустическая полость моделировалась 90 осесимметричными элементами акустической среды с треугольным поперечным сечением. Число степеней свободы конечноэлементной модели 128. В табл. 2 частоты собственных колебаний (Гц), полу-

Таблица 2

N	i, m, n	ДИАС-3.0	[5]
1	(0, 1, 0)	727	731
2	(0, 2, 0)	1442	1447
3	(0, 3, 0)	2131	2135
4	(0, 4, 0)	2796	2792
5	(0, 5, 0)	3417	3369



Фиг. 3.



Фиг. 4.

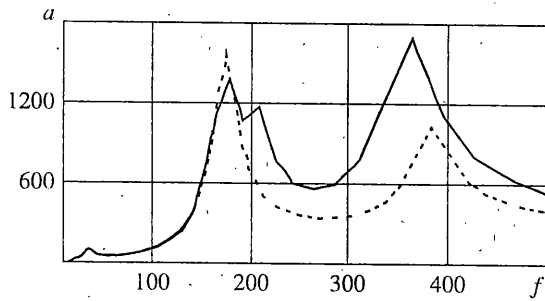
ченные с помощью пакета ДИАС-3.0, сравниваются с аналитическим решением работы [5].

Рассматриваются собственные колебания акустической полости, внешняя поверхность которой представляет собой замкнутый цилиндр с радиусом 0.1191 м и длиной 0.2985 м, а внутренняя – цилиндр с радиусом 0.0905 м и длиной 0.22866 м. Акустическая полость моделировалась 126 осесимметричными элементами акустической среды с треугольным поперечным сечением. В табл. 3 частоты собственных колебаний (Гц), полученные с помощью пакета ДИАС-3.0, сравниваются с экспериментальными результатами работы [6]. Сравнение показывает хорошую сходимость результатов.

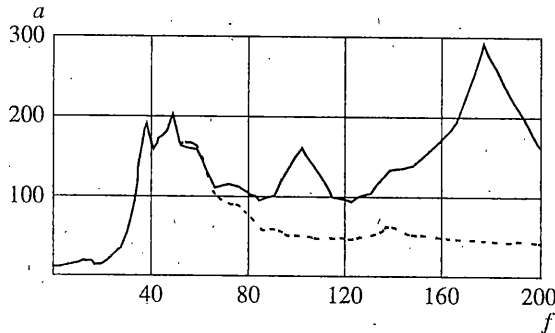
4. Исследование вынужденных колебаний оболочек с жидкостью при ударном нагружении. Рассматриваются вынужденные колебания оболочек с жидкостью в плане исследования влияния сжимаемости жидкости на нагруженность оболочек. Влияние сжимаемости жидкости на собственные частоты оболочек с жидкостью исследовалось в ряде работ [7, 8]. Было показано, что учет сжимаемости жидкости может существенно снижать низшие собственные частоты. С точки зрения практики, важным

Таблица 3

N	i, m, n	ДИАС-3.0	[6]
1	(1, 0, 0)	479	487
2	(0, 1, 0)	587	600
3	(1, 1, 0)	866	903
4	(2, 0, 0)	1077	1124
5	(0, 2, 0)	1079	1143
6	(2, 1, 0)	1265	1347
7	(1, 2, 0)	1324	1432



Фиг. 5.



Фиг. 6.

является изучение влияния сжимаемости жидкости на колебания конструкции с целью определения области применения модели несжимаемой жидкости.

Для изучения вопроса о влиянии сжимаемости жидкости на вынужденные колебания оболочек, полностью заполненных жидкостью, рассмотрим два примера.

В первом примере рассматриваются вынужденные колебания цилиндрической оболочки с плоским упругим днищем, полностью заполненной жидкостью, которая опирается на жесткое основание по внешнему контуру (фиг. 2). Параметры оболочки с жидкостью: модуль упругости 70 ГПа, коэффициент Пуассона 0.3, плотность оболочки 2700 кг/м³, радиус оболочки 1 м, толщина оболочки 0.01 м, длина оболочки 1 м, плотность жидкости 1000 кг/м³, скорость звука в жидкости 1500 м/с². Основание испытывает ударное возмущение, которое описывается следующей формулой: если $t < \tau$, то $U = U_0 \sin(\pi t / \tau)$, если $t > \tau$, то $U = 0$, где U – перемещение основания в направлении, перпендикулярном оси X . Параметры возмущения $\tau = 0.001$ с, $U_0 = 0.00001$ м.

Решение задачи вынужденных колебаний было получено с использованием метода разложения по собственным формам с учетом сжимаемости жидкости и без учета. Вычисления собственных частот были проведены для числа волн в окружном направлении равным единице в диапазоне 0–1200 Гц. Для оболочки со сжимаемой жидкостью в этом диапазоне было найдено 15 собственных частот, а для оболочки с несжимаемой жидкостью – 13 собственных частот. В результате расчета вынужденных колебаний получены зависимости ускорений различных узловых точек конечноэлементной модели оболочки. Однако, анализ результатов более удобно вести не во временной, а в частотной области. Для этого используются ударные спектры. Ударный спектр временной зависимости ускорения $a(t)$ представляет максимальное ускорение простого осциллятора в зависимости от его резонансной частоты при движении его

основания с ускорением $a(t)$ [9]. В зависимости от величины демпфирования, допускаемого в осцилляторе, различаются демпфированные и недемпфированные ударные спектры. Здесь и ниже под ударным спектром подразумевается недемпфированный ударный спектр. На фиг. 3 показаны ударные спектры радиального ускорения a [м/с²] точки оболочки с координатой $x = 0.45 L$, полученные для случая сжимаемой (сплошная линия) и несжимаемой жидкости (штриховая линия) в диапазоне 10...1200 Гц. Анализ результатов показывает, что в области низших частот спектры ускорений, полученные с учетом сжимаемости жидкости и без учета, практически сливаются. Однако, с ростом частоты f разница в спектрах растет и, начиная с некоторой частоты f_a , которую в дальнейшем будем называть акустической частотой, может оказаться существенной. Например, на фиг. 3 разница в ударных спектрах, начиная с 900 Гц, достигает 200% и более (т.е. $f_a \approx 900$ Гц). Для исследования влияния на частоту f_a характеристик оболочки были проведены расчеты оболочки, рассмотренной выше, с толщиной, увеличенной в 4 раза. Полученные результаты представлены на фиг. 4. Из рисунка видно, что до частоты 320 Гц значения амплитуд ударного спектра, полученного с учетом сжимаемости и без нее, практически совпадают. После 380 Гц появляются различия в спектрах, достигающие 10–20%, а после 750 Гц – 100% и более (т.е. $f_a \approx 750$ Гц). Таким образом, для исследуемой оболочки увеличение ее толщины привело к уменьшению частотного диапазона, для которого влиянием сжимаемости можно пренебречь.

Во втором примере рассматриваются вынужденные колебания рассмотренной в предыдущем разделе полусферической оболочки с жидкостью (фиг. 1). Оболочка нагружается импульсом осесимметричного давления.

Форма импульса треугольная, амплитуда – 98070 Па.

Были вычислены собственные формы, соответствующие собственным частотам, лежащим в диапазоне 0...500 Гц. Расчеты были проведены для случая сжимаемой и несжимаемой жидкости. Для оболочки со сжимаемой жидкостью было найдено 36 собственных частот и форм, а для оболочки с несжимаемой жидкостью – 30 собственных частот и форм. В результате расчета вынужденных колебаний получены зависимости ускорений различных узловых точек конечноэлементной модели оболочки, которые использовались для вычисления ударных спектров в диапазоне от 10 до 500 Гц. На фиг. 5 показаны ударные спектры продольного ускорения точки с координатой $r = 0.54 R$, полученные для модели сжимаемой (сплошная линия) и несжимаемой жидкости (штриховая линия). Анализ результатов показывает, что до частоты $f_a \approx 170$ Гц результаты, полученные для сжимаемой и несжимаемой жидкости, совпадают.

На фиг. 6 представлены результаты расчета исследуемой полусферической оболочки с увеличенным в два раза радиусом сферы. Вычисление собственных частот было проведено для диапазона 0...200 Гц, а ударные спектры были вычислены в диапазоне 10...200 Гц. Значение частоты f_a при этом уменьшается и становится приблизительно равным 80 Гц.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что сжимаемость жидкости пренебрежимо мало влияет на вынужденные колебания упругих оболочек, если частоты этих колебаний по величине не превышают значения некоторой предельной величины (акустической частоты f_a), которая зависит от характеристик оболочки и свойств жидкости. Значение акустической частоты может быть использовано для определения области применения модели несжимаемой жидкости при исследовании гидроупругого взаимодействия систем “упругая конструкция–жидкость”.

3. Заключение. Рассмотрена эффективная технология решения задач динамики конструкций, содержащих жидкие и газообразные среды, базирующаяся на конечноэлементной дискретизации конструкции и жидкости, разложения решения в ряд по собственным формам и нахождении собственных чисел и векторов методом частотной конденсации. Описаны особенности применения метода частотной конденсации для решения матричных уравнений систем “упругая конструкция–жидкость–поверх-

ностные волны” и “упругая конструкция–газ”. Эффективность метода демонстрируется на численных примерах. Показано влияние сжимаемости жидкости на вынужденные колебания оболочек с жидкостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мокеев В.В., Павлюк Ю.С. Эффективная процедура решения задач о собственных значениях при исследованиях взаимодействия конструкция–жидкость на основе конечноэлементных моделей // Изв. АН. МТТ. 1992. № 4. С. 178–182.
2. Dubois J.J., de Rouvray A.L. an improved fluid superelement for the coupled solid–fluid–surface wave dynamic interaction problem // Earthquake Eng. Struct. Dynam. 1978. V. 6. № 3. P. 235–245.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
4. Мокеев В.В. О задаче нахождения собственных значений и векторов больших матричных систем // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т. 32. № 10. С. 1652–1657.
5. Blevins R.D. Formulas for natural frequency and mode shape. New York: Van Nostrand, 1979. 492 p.
6. Гун С., Сигх Р. Расчет осесимметричных полостей методом конечных элементов // Тр. Амер. об-ва инж.-механиков: Конструирование и технология машиностроения. 1985. Т. 107. № 1. С. 78–83.
7. Фролов К.В., Антонов В.Н. Колебания оболочек в жидкости. М.: Наука, 1983. 143 с.
8. Шклярчук Ф.Н. Колебания упругой оболочки, содержащей тяжелую сжимаемую жидкость // Колебания упругих конструкций с жидкостью. М.: ЦНТИ “Волна”, 1976. С. 386–396.
9. Харрис С.М., Крид Ч.И. Справочник по ударным нагрузкам. Л.: Судостроение, 1980. 360 с.

Челябинск

Поступила в редакцию 21.III.1996