МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1998

УДК 624.07:534.1

© 1998 г. Р. А. САИДОВА, М. ЭРГАШОВ

УДАР КЛИНОМ ПО ГИБКОЙ НИТИ

Вопросы исследования процессов распространения волн и решения краевых задач о соударении гибкой нити с твердыми телами, имеющими различные геометрические формы, рассматривались, например в [1–7]. В [1–2] приведена постановка и методика численного решения задач о косом и нормальном поперечном ударе точкой, движущейся с постоянной скоростью, по гибкой нити

В публикуемой работе предлагается удобное для теоретического анализа решение задач о косом и нормальном поперечном ударе острым концом клинка (точкой), движущимся с постоянной скоростью, по линейно-упругой нити. Рассматриваются задачи о косом и нормальном поперечном ударе острым концом клина, движущимся с кусочно-постоянной (скачкообразно меняющейся) скоростью, по линейно-упругой нити.

1. Косой удар клином по нити со скольжением. Пусть при $t \geq 0$ произведен поперечный удар острым концом клина (точкой), движущимся с постоянной скоростью v_2, по горизонтальной и бесконечно длинной гибкой нити. Скорость v_2 образует постоянный угол β с нормалью к нити (фиг. 1). В результате в нити возникают продольные A_1, A_1' и поперечные B_2, B_1' волны. Указанными волнами и фронтом стационарного разрыва нить разбивается на шесть областей. Области O и O' являются областями покоя без начальной деформации.

Предположим, что на фронте стационарного разрыва C трение отсутствует и в каждый момент времени происходит относительное скольжение нити из области 2' в область 2, как через подвижный блок [3–7]. На фронтах поперечных волн B_2 и B_2' деформация не терпит разрыва [1–2]. Поэтому возмущенные действием удара области 1–2 и 1'–2' являются областями постоянных параметров.

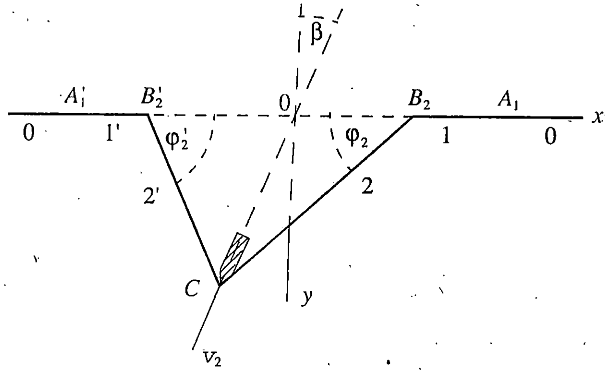
Пусть $x^{\cdot}$ и $y^{\cdot}$ – составляющие скорости частиц нити на оси $0x$ и $0y$ соответственно, φ – угол между нитью и осью $0x$, ε – относительная деформация. Неизвестные параметры движения будем снабжать соответствующими принятой нумерации рассматриваемых областей нити индексами.

Предположим, что при $t \geq \tau_{i+2}$ происходит скачкообразное возрастание скорости движения клина на величины

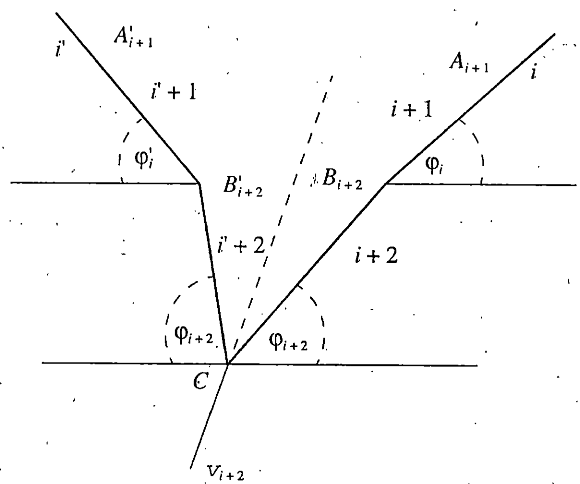
$\Delta v_{i+2,\,i} = v_{i+2} - v_i > 0$. Здесь и дальше $i = 2, 4, 6, \ldots$ – количество скачкообразного возрастания скорости движения клина в данный момент времени.

При изменении t от 0 до $t \geq \tau_{i+2}$ в нити последовательно возникают продольные A_1, A_1', A_3, A_3', A_5, A_5', …, A_{i+1}, A_{i+1}' и перечные B_2, B_2', B_4, B_4', …, B_{i+2}, B_{i+2}' волны (фиг. 1, 2). При этом в правой и левой части нити образуется 2 $(i + 1)$ изломов с соответствующими углами φ_2, φ_4, φ_6, …, φ_{i+2} и φ_2', φ_4', φ_6', …, φ_{i+2}'.

Предположим, что скорости удара v_2, v_4, …, v_{i+2} – постоянные величины и при $t \geq \tau_{i+2}$ деформация не достигает предела пропорциональности материала нити. При



Фиг. 1



Фиг. 2

этом возмущенные области $i+1$, $i'+1$ и $i+2$, $i'+2$ нити являются областями постоянных параметров и имеют одинаковую упругую деформацию ε_{i+2} (фиг. 2).

Известно [1–5], что упругая продольная волна вдоль нити распространяется со значительной большей скоростью, чем поперечная волна излома и на различных участках нити продольные волны могут догнать и взаимодействовать с поперечными волнами. Ниже предполагается, что в рассматриваемых областях $i+1$, $i+2$ и $i'+1$, $i'+2$ взаимодействия продольных и поперечных волн не происходит.

Предположим, что параметры движения областей $i-1$, i и $i'-1$, i' (фиг. 2) нити известны, а параметры областей $i+1$, $i+2$ и $i'+1$, $i'+2$ подлежат определению.

На фронтах волн A_{i+1}, B_{i+2} и A'_{i+1}, B'_{i+2} имеем соответственно [1–5]:

$$\dot{x}_{i+1}-\dot{x}_i = a(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+2})\cos\varphi_i$$

$$\dot{y}_{i+1}-\dot{y}_i = a(\varepsilon_{i+2}-\varepsilon_i)\sin\varphi_i \tag{1.1}$$

$$\dot{x}_{i+2}-\dot{x}_{i+1} = a\lambda_{i+2}(\cos\varphi_i-\cos\varphi_{i+2})$$

$$y^{\cdot}_{i+2} - y^{\cdot}_{i+1} = a\lambda_{i+2}(\sin\varphi_{i+2} - \sin\varphi_i), \quad \lambda_{i+2} = [\varepsilon_{i+2}(1+\varepsilon_{i+2})]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} x^{\cdot\prime}_{i+1} - x^{\cdot\prime}_i &= a(\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i)\cos\varphi'_i \\ y^{\cdot\prime}_{i+1} - y^{\cdot\prime}_i &= a(\varepsilon_{i+2} - \varepsilon_i)\sin\varphi'_i \\ x^{\cdot\prime}_{i+2} - x^{\cdot\prime}_{i+1} &= a\lambda_{i+2}(\cos\varphi'_{i+2} - \cos\varphi'_i) \\ y^{\cdot\prime}_{i+2} - y^{\cdot\prime}_{i+1} &= a\lambda_{i+2}(\sin\varphi'_{i+2} - \sin\varphi'_i) \end{aligned} \tag{1.2}$$

В точке C имеют место следующие кинематические условия:

$$\begin{aligned} y^{\cdot}_{i+2}dt &= v_{i+2}\cos\beta dt - \sin\varphi_{i+2}ds_{i+2} \\ x^{\cdot}_{i+2}dt &= \cos\varphi_{i+2}ds_{i+2} - v_{i+2}\sin\beta dt \\ y^{\cdot\prime}_{i+2}dt &= v_{i+2}\cos\beta dt + \sin\varphi'_{i+2}ds_{i+2} \\ x^{\cdot\prime}_{i+2}dt &= \cos\varphi'_{i+2}ds_{i+2} - v_{i+2}\sin\beta dt \end{aligned} \tag{1.3}$$

Уравнения (1.1)–(1.3) образуют замкнутую систему для определения $x^{\cdot}_{i+1}$, ε_{i+2}, $y^{\cdot}_{i+2}$, $x^{\cdot}_{i+2}$, y_{i+2}, y_{i+1}, $x^{\cdot\prime}_{i+1}$, $y^{\cdot\prime}_{i+1}$, $x^{\cdot\prime}_{i+2}$, $y^{\cdot\prime}_{i+2}$, φ'_{i+2}, ds_{i+2}.

Исключая неизвестные скорости и ds_{i+2} уравнения (1.1)–(1.3) приводим к виду

$$v_{i+2}\cos(\varphi_{i+2} + \beta) - (\lambda_i - \varepsilon_i)\sin\varphi_{i+2} = \eta_{i+2,i}\theta_{i+2,i} \tag{1.4}$$

$$v_{i+2}\cos(\varphi'_{i+2} - \beta) - (\lambda_i - \varepsilon_i)\sin\varphi'_{i+2} = \eta_{i+2,i}\theta'_{i+2,i} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} \eta_{i+2,i}H_{i+2,i} + v_{i+2}\gamma_{i+2}\cos\beta &= 2\lambda_{i+2}\sin\varphi'_{i+2}\sin\varphi_{i+2} \\ \eta_{i+2,i} &= \lambda_{i+2} - \varepsilon_{i+2} - \lambda_i - \varepsilon_i \\ \theta_{i+2,i} = \sin(\varphi_{i+2} - \varphi_i), &\quad \theta'_{i+2,i} = \sin(\varphi'_{i+2} - \varphi'_i) \\ \gamma_{i+2} &= \sin\varphi'_{i+2} + \sin\varphi_{i+2} \\ H_{i+2,i} &= \sin\varphi_i\sin\varphi'_{i+2} + \sin\varphi'_i\sin\varphi_{i+2} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь и в дальнейшем через v_{i+2} обозначена безразмерная величина v_{i+2}/a.

Трансцендентные уравнения (1.4)–(1.6) служит для определения ε_{i+2}, φ_{i+2} и φ'_{i+2}. Дальнейшее решение уравнений (1.4)–(1.6) удобно проводит с помощью численных методов.

2. Частные случаи. При $\beta = 0$ задаче является симметричной относительно вертикальной оси и скольжение нити по кромке клина отсутствует. Подставляя $ds_{i+2} = 0$, $\beta = 0$, из уравнения (1.3) найдем

$$y^{\cdot}_{i+2} = y^{\cdot\prime}_{i+2} = v_{i+2}, \quad x^{\cdot}_{i+2} = x^{\prime}_{i+2} = 0 \tag{2.1}$$

Аналогичные условия

$$y^{\cdot}_i = y^{\cdot\prime}_i = v_i, \quad x_i = x^{\cdot\prime}_i = 0 \tag{2.2}$$

имеют место в областях i и i'.

Таблица

β	i	φ_{i+2}	φ'_{i+2}	ν_{i+2}	ε_{i+2}
10°	0	5°	5°12′	0.0003528	0.0000154
	2	10°	10°30′	0.0033877	0.0014036
	4	15°	16°06′	0.0078028	0.0021616
	6	20°	22°00′	0.0133638	0.0030853
	8	25°	28°12′	0.0214661	0.0059149
	10	30°	34°30′	0.0337364	0.0120760
20°	0	5°	5°18′	0.0003891	0.0000165
	2	10°	11°00′	0.0036342	0.0014113
	4	15°	17°30′	0.0088164	0.0023302
	6	20°	24°42′	0.0155483	0.0033858
	8	25°	32°42′	0.0245403	0.0050478
	10	30°	41°00′	0.0393307	0.0117182
30°	0	5°	5°36′	0.0004482	0.0000179
	2	10°	11°48′	0.0041770	0.0014203
	4	15°	19°18′	0.0102987	0.0024096
	6	20°	28°30′	0.0191822	0.0039798
	8	25°	39°18′	0.0325038	0.0069809
	10	30°	50°42′	0.0591972	0.0232786

При этом уравнения (1.1)–(1.2) имеют следующее аналитическое решение

$$v_{i+2} = v_i + (1+2\varepsilon_i)\theta_{i+2,i}\alpha_{i+2,i}\mu_{i+2,i} \pm \theta_{i+2,i}\mu_{i+2,i}[(1+2\varepsilon_i)\alpha_{i+2,i} + 2\lambda_i\mu_{i+2,i}^{-1}] \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{i+2} = \varepsilon_i + \left[\pm(\theta_{i+2,i} + 4A_{i+2,i}^2)^{\frac{1}{2}} - (1+2\varepsilon_i)\theta_{i+2,i}\right](2\theta_{i+2,i})^{-1}$$

$$A_{i+2,i} = (v_{i+2} - v_i)\cos\varphi_i, \quad \alpha_{i+2,i} = \cos\varphi_i - \cos\varphi_{i+2} \quad (2.4)$$

$$\mu_{i+2,i} = [2\cos\varphi_{i+2}(2\cos\varphi_i - \cos\varphi_{i+2})]^{-1}$$

Уравнения (2.3), (2.4) представляют собой обратное решение задачи (заданная скорость движения клина v_{i+2} выражена через параметр φ_{i+2}).

Заметим, что в рассматриваемом случае возникающие в нити продольные и поперечные волны являются волнами нагрузки и для любого $\Delta t_{i+2,i} > 0$ и $\Delta v_{i+2,i} > 0$ требуется выполнение следующих условий: $\Delta\varepsilon_{i+2,i} > 0$ и $\Delta\varphi_{i+2,i} > 0$. Для выполнения последних условий в выражениях (2.3)–(2.4) следует взять верхние знаки.

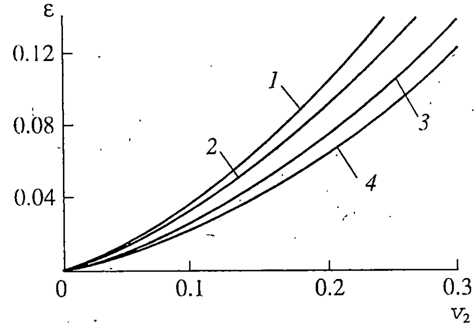
При $i = 0$ приходим к схеме движения, изображенной на фиг. 1. В этом случае и параметры φ_0, $x_0^{\cdot}$, ε_0, $y_0^{\cdot}$, x_0', y_0' равны нулю; нить первоначально не возмущена и не деформирована.

Рассматриваемая задача при $i = 0$ приводится к решению следующих уравнений

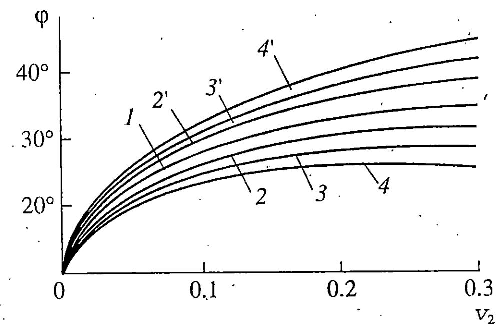
$$\operatorname{ctg}\varphi_2' = \operatorname{ctg}\varphi_2 - 2\operatorname{tg}\beta \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_2 = (1-\xi)^2[1-(1-\xi)^2]^{-1} \quad (2.6)$$

$$v_2 = \frac{\xi(1-\xi)\sin\varphi_2}{[1-(1-\xi)^2]\cos(\varphi_2+\beta)} \quad (2.7)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

$$\xi = \frac{2\cos(\varphi_2 + \beta)\sin\varphi_2'}{\cos\beta(\sin\varphi_2' + \sin\varphi_2)} \tag{2.8}$$

Выражения (2.5)–(2.7) можно написать в виде алгебраического уравнения относительно искомых параметров $\varepsilon_2\varphi_2$ или φ_2'. С другой стороны, эти уравнения представляют собой обратное решение задачи, удобное для теоретического анализа и ведения числовых расчетов.

3. Схема и результаты численных расчетов. Численные расчеты при $i = 0$ ведутся следующим образом: задавая значения угла φ_2 (для известных значений угла β), из уравнения (2.5) определяются соответствующие значения угла φ_2'. Подставляя найденные таким способом значения углов φ_2 и φ_2' в уравнения (2.6)–(2.7), определяются соответствующие значения скорости движения клина и деформация нити.

На фиг. 3, 4 приведены зависимости деформации ε_2 и углов φ_2 и φ_2' от скорости удара. Кривые *1–4* и *2'–4'*, значения ε_2, φ_2 и φ_2' получены при $\beta = 0°, 5°, 10°, 15°$ соответственно.

Видно, что с ростом скорости удара клина деформация и угол излома нити возрастают. С ростом угла β угол φ_2' возрастает, а угол φ_2 и деформация ε_2 убывают.

Согласно принятой выше постановке задачи скорость движения клина скачкообразно возрастает от v_2 при $0 \le t \le \tau_2$ до $v_{\max} = v_{i+2}$ при $t \ge \tau_{i+2}$.

В таблице приведены результаты числовых расчетов для случая $\varphi_2 = 5°$, $\varphi_{i+2} - \varphi_i = 5°$ и $\beta = 10°, 20°, 30°$ соответственно. Видно, что с увеличением угла β значения разности $\varphi'_{i+2} - \varphi_{i+2}$ увеличиваются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А.* Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.
2. *Рахматулин Х.А.* О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 6. С. 449–462.
3. *Павленко А.Л.* О распространении разрывов в гибкой нити // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 4. С. 112–122.
4. *Ленский Э.В.* Удар клином по упругой нити. Инж. ж. МТТ. 1968. № 2. С. 104–106.
5. *Максимов В.Ф.* Взаимодействие поперечной волны с геометрическим изломом линейно-упругой нити // Тр. кафедры газовая и волновая динамика МГУ. М.: Изд-во МГУ, 1975. Вып. 1. С. 116–120.
6. *Эргашов М.* Нормальный поперечный удар прямоугольным брусом по нити при наличии трения. // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 3. С. 160–163.
7. *Эргашов М.* Исследование деформаций, возникающих при поперечном ударе прямоугольным брусом по нити // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 159–163.

Ташкент

Поступила в редакцию 21.III.1996