

УДК 624.072.21

© 1998 г. А. Е. АНДРЕЕВ-АНДРИЕВСКИЙ

РАСЧЕТ ПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Рассмотрен пластический изгиб консольной балки в составе рамочного образца при его растяжении. Показано, что хорошее совпадение с экспериментальными данными дает расчет по схеме пластического шарнира со степенным упрочнением с одновременным учетом геометрической нелинейности – формоизменения рамки.

В связи с разработкой ударозащитной подвески¹ встала задача расчета ее силовой характеристики при больших перемещениях. На фиг. 1 показан фрагмент ударозащитной подвески в виде рамочного образца и схема его растяжения. Расчет проводится по схеме пластического шарнира с деформационным упрочнением материала по степенному закону, учтена геометрическая нелинейность при больших перемещениях.

Аппроксимируем связь между напряжением σ и пластической деформацией ϵ степенной функцией [1]:

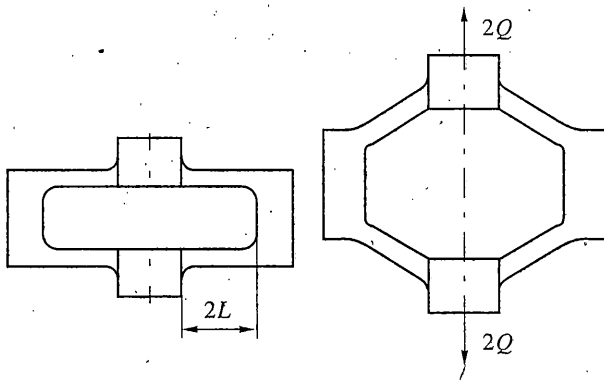
$$\sigma = \sigma_0 \epsilon^n \quad (1)$$

где σ_0 и n – параметры. Используем в качестве представительной точки предел прочности. Поскольку действительные σ и условные σ_c напряжения связаны [1] зависимостью $\sigma = (1 + \epsilon)\sigma_c$, то для дифференциалов имеем $d\sigma = d\epsilon\sigma_c + (1 + \epsilon)d\sigma_c$. В точке (ϵ_b, σ_b) предела прочности для условных напряжений достигается максимум кривой $\sigma_c(\epsilon)$ и $d\sigma_c = 0$, поэтому в этой точке от зависимости (1) можно потребовать выполнения двух условий: $\sigma = (1 + \epsilon_b)\sigma_b$, $d\sigma/d\epsilon = \sigma_b$, откуда и определяются искомые параметры

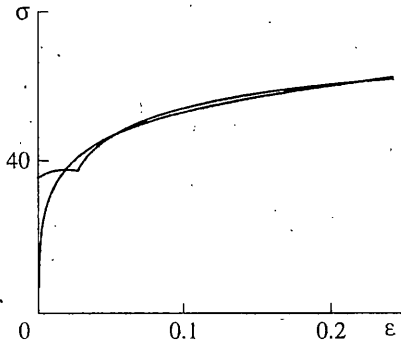
$$n = \frac{\epsilon_b}{1 - \epsilon_b}, \quad \sigma_0 = \frac{1 + \epsilon_b}{\epsilon_b^n} \sigma_b \quad (2)$$

На фиг. 2 показаны экспериментальная диаграмма для стали 20 и ее аппроксимация степенным законом упрочнения: $\sigma_0 = 830$ МПа (83 кгс/мм²), $n = 0.192$. Обе кривые удовлетворительно совпадают, особенно в области больших деформаций. Опишем использованный способ получения экспериментальной диаграммы деформирования. Абсциссы точек снимаются с машинной диаграммы с отсчетом не от нуля на оси ординат, а от прямой начального участка упругого деформирования. Ординаты точек с машинной диаграммы увеличиваются в $(1 + \epsilon)$ раз, где ϵ есть относительная деформация, определенная ранее. Затем абсциссы и ординаты масштабируются. Если пренебречь сжимаемостью материала, то получается экспериментальная диаграмма деформирования материала.

¹ См. Андреев-Андриевский А.Е., Уткин И.П., Антаков В.Б. Ударозащитная подвеска: Патент № 1834431 // Б. И. № 30. 1993. С. 56.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для прямоугольного сечения шириной B и высотой $2H$ зависимость изгибающего момента от кривизны χ имеет вид:

$$M = (\chi H)^n M_0 \quad (3)$$

$$M_0 = \frac{2}{2+n} \sigma_0 B H^2 \quad (4)$$

Здесь используется упрощающее допущение о сохранении прямоугольной формы поперечного сечения балки. В действительности при больших деформациях прямоугольное сечение становится примерно трапецевидным [2].

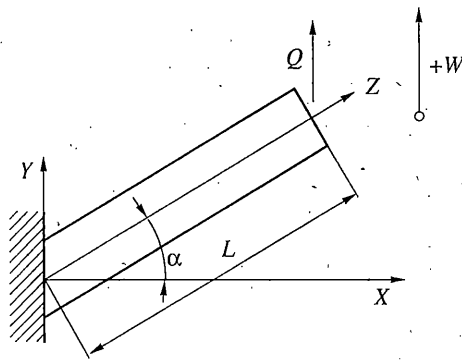
Из соображений симметрии следует, что в середине каждого из стержней рамки, длины которых полагаем равными $2L$, отсутствует изгибающий момент. Соответственно переходим к расчетной схеме, показанной на фиг. 3. Упругими деформациями и соответствующими смещениями по их малости пренебрегаем. Стержень наклонен к горизонтальной оси под углом α .

Изгибающей момент на расстоянии X от заделки

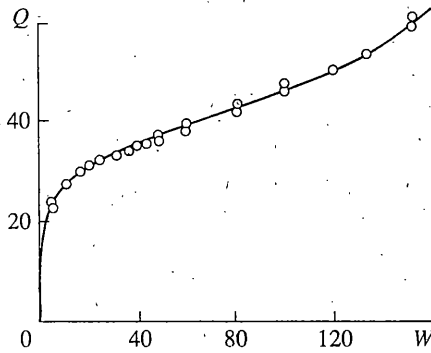
$$M = Q(X_K - X) \quad (5)$$

где Q – поперечная сила, X_K – абсцисса оконечности консоли. Обращаясь к зависимости (3), получаем выражение для кривизны χ :

$$\chi = \frac{1}{H} \left(\frac{Q}{M_0} \right)^{1/n} (X_K - X)^{1/n} \quad (6)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Поскольку кривизна есть производная от угла α наклона изогнутой линии стержня по длине Z данной линии $\chi = d\alpha/dZ$, то для угла α получаем уравнение, которое запишем в виде

$$\alpha(Z) = \frac{1}{H} \left(\frac{Q}{M_0} \right)^{1/n} \int_0^Z (X_k - X)^{1/n} dZ \quad (7)$$

В решении полученного уравнения (7) удовлетворимся схемой пластического шарнира, когда деформации сосредоточены в заделке стержня, т.е. в пластическом шарнире, относительно которого стержень поворачивается на угол A как жесткое. Согласно данной схеме решение уравнения (7) имеет просто вид $\alpha(Z) = A = \text{const}$, при этом $X = Z \cos A$, $X_k = L \cos A$. Подставив данное приближенное решение $\alpha(Z) = A$ в уравнение (7) получаем невязку D :

$$D(Z) = \frac{1}{H} \left(\frac{Q}{M_0} \right)^{1/n} (\cos A)^{1/n} \int_0^Z (L - Z)^{1/n} dZ - A \quad (8)$$

В соответствии с общей методологией невязка D должна быть минимизирована надлежащим выбором угла A , а в качестве меры при этом может выступать интеграл от квадрата невязки по длине L (метод наименьших квадратов) или какая-либо энергетическая мера невязки. Здесь для отыскания величины угла, исходя из идей метода коллокации, потребуем выполнения уравнения (7) в одной точке $Z = L$, т.е. потребуем

выполнения условий равновесия в этой точке. Исходя из принятого требования для (8) $D(L) = 0$, получаем искомое выражение для угла, которое после взятия интеграла в правой части может быть записано так

$$A = \frac{n}{1+n} \frac{1}{H} \left(\frac{Q}{M_0} \right)^{1/n} (\cos A)^{1/n} L^{(1+n)/n} \quad (9)$$

Отсюда получаем усилие сопротивления деформированию в функции угла поворота стержня

$$Q = \left(\frac{1+nH}{n} \frac{A^n}{L} \right)^n \frac{A^n}{(\cos A)^{1+n}} Q_0, \quad Q_0 = \frac{M_0}{L} \quad (10)$$

Согласно принятой схеме деформирования смещение W конца консоли при ее повороте на угол A равно

$$W = L \sin A \quad (11)$$

Полученные выражения (10), (11) задают зависимость $Q(W)$ в параметрическом виде через угол A как параметр. На фиг. 4 показаны расчетная кривая и экспериментальные точки для случая изгиба рамочного образца: длина каждого из четырех балочных элементов $2L = 112.5$ мм, сечение $B = 2H = 20.0$ мм, материал образца – сталь 20. Совпадение расчетных и опытных данных хорошее.

Таким образом, пластический изгиб консоли при больших перемещениях может быть рассчитан по схеме пластического шарнира со степенным законом деформационного упрочнения материала с одновременным учетом формоизменения; совпадение расчетных и опытных данных в области больших перемещений хорошее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
2. *Малинин Н.Н.* Технологические задачи пластичности и ползучести. М.: Высш. шк., 1979. 119 с.

Москва

Поступила в редакцию 14.VI.1996