МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1998

УДК 624.07:534.1

© 1998 г. А. П. МАЛЫШЕВ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В БАЛКЕ, СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ С ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Волны растяжения-сжатия в стержнях, на боковой поверхности которых действуют силы трения, изучены довольно подробно [1–3], в том числе и для законов трения, отличающихся от сухого трения Кулона [4, 5]. Вместе с тем, для изгиба балки при внешнем трении получено лишь асимптотическое волновое решение [6]. Настоящая работа посвящена разработке процедуры численного моделирования волновых переходных процессов изгиба балки с внешним сухим трением и исследованию некоторых характерных особенностей подобных процессов. Моделирование проводится на основе схемы С.К. Годунова [7], модифицированной с целью повышения точности при описании нескольких семейств волн, движущихся с различными скоростями. Оценена область применимости асимптотического решения.

1. Волновые процессы в балке Тимошенко описываются следующей системой уравнений [8]:

$$
\begin{gathered}
\partial Q/\partial x - \rho F \partial W/\partial t = -p, \quad \partial Q/\partial t - \alpha G F \partial W/\partial x = -\alpha G F \Phi \\
\partial M/\partial x - \rho J \partial \Phi/\partial t = -Q - m, \quad \partial M/\partial t - E J \partial \Phi/\partial x = 0
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где Q – перерезывающая сила, M – изгибающий момент, W – скорость поперечных смещений сечения балки, Φ – угловая скорость поворота сечений, E и G – модули упругости при растяжении и сдвиге, ρ – плотность, F, J и α – площадь, момент инерции и коэффициент формы сечения, t – время, x – координата вдоль оси балки, p и m – погонная нагрузка и погонный момент от сил трения.

Введем безразмерные параметры, помеченные верхним индексом 0, в соответствии с зависимостями

$$
\begin{gathered}
Q = E_0F_0Q^0, \quad M = E_0F_0A_0M^0, \quad W = c_0W^0, \quad \Phi = c_0\Phi^0/A_0 \\
E = E_0E^0, \quad G = E_0G^0, \quad \rho = \rho_0\rho^0, \quad F = F_0F^0, \quad J = F_0^2J^0 \\
t = A_0t^0/c_0, \quad x = A_0x^0, \quad p = E_0A_0p^0, \quad m = E_0F_0m^0 \\
A_0^2 = F_0, \quad c_0^2 = E_0/\rho_0
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

где нижним индексом 0 помечены размерные величины в некотором характерном сечении балки. В этом случае уравнения для безразмерных параметров будут идентичны уравнениям (1.1). Верхний индекс 0 далее ради краткости не приводится.

При вычислении p и m полагаем, что диссипативные силы в месте контакта балки с шероховатой поверхностью соответствуют закону сухого трения Кулона. Поперечное сечение балки для определенности будем считать прямоугольным. В зависимости от величины W и Φ поперечная нагрузка и момент, создаваемые силами трения, определяются различным образом:

$$(a)\quad W \neq 0, \quad \Phi \neq 0\colon\ p = -qa\ln\frac{d+1}{d-1}$$

$$m = -qh^2\left[d - 0.5\left(\frac{a}{b}\right)^2 \ln\frac{d+1}{d-1}\right]\operatorname{sign}\Phi$$

$$d = [1 + (a/b)^2]^{1/2}, \quad a = W/|\Phi|$$

(b) $W = 0$, $\Phi \neq 0$: $m = -qb^2 \operatorname{sign}\Phi$, p находится из условия равенства нулю суммы сил, действующих на сечение;

(c) $W \neq 0$, $\Phi = 0$: $p = -2qb \operatorname{sign} W$, m находится из условия равенства нулю суммы всех моментов, приложенных к сечению;

(d) $W = 0$, $\Phi = 0$: p и m находятся из условий равновесия неподвижного сечения.

Здесь $2b$ – полная высота сечения, отнесенная к A_0, q – сила трения, действующая на единицу площади контакта, причем балка касается шероховатой поверхности только одной боковой стороной. В соответствии с законом сухого трения Кулона при ненулевых скоростях $q = \text{const}$. Данные зависимости аналогичны приведенным в [6], но дополнены определением диссипативных факторов, соответствующих нулевым скоростям.

2. Разобьем балку по всей длине на участки длиной h, а время наблюдения волнового процесса разделим на шаги τ. Нижний индекс $n - 1/2$ будет соответствовать среднеинтегральному значению параметра на участке между $x = (n-1)h$ и $x = nh$ в момент времени t, а верхний индекс $n - 1/2$ – аналогичному значению параметра в момент $t + \tau$. Целочисленный индекс n припишем среднеинтегральному значению параметра на интервале $(t, t + \tau)$ при $x = nh$.

Уравнения (1.1) заменяются разностными соотношениями:

$$\begin{aligned}
&(\rho F)_*(W^* - W_*) = (Q_n - Q_{n-1})\tau/h + (p^* + p_*)\tau/2 \\
&Q^* - Q_* = (\alpha GF)_*(W_n - W_{n-1})\tau/h - (\alpha GF)_*(\Phi^* + \Phi_*)\tau/2 \\
&(\rho J)_*(\Phi^* - \Phi_*) = (M_n - M_{n-1})\tau/h + (Q^* + Q_*)\tau/2 + (m^* + m_*)\tau/2 \\
&M^* - M_* = (EJ)_*(\Phi_n - \Phi_{n-1})\tau/h
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь и далее индекс * эквивалентен $n - 1/2$.

Разрешая уравнения (2.1) относительно Q^*, W^*, M^* и Φ^*, можно получить расчетные формулы для перехода на следующий временной слой. Чтобы воспользоваться ими, необходимо, во-первых, определить диссипативные силы и моменты на следующем временном слое, во-вторых, вычислить параметры с целочисленными индексами. Решение последней задачи будет изложено позднее, а сейчас опишем порядок вычисления p^* и m^* с учетом их нелинейного характера.

Сначала проводится расчет параметров на следующем временном слое без учета сил трения. Затем по вычисленным значениям W_y^* и Φ_y^* на основании зависимостей (a)–(d) из предыдущего раздела определяются p_y^* и m_y^* . Пусть, например $W_y^* \neq 0$ и $\Phi_y^* \neq 0$, тогда для вычисления p_y^* и m_y^* следует использовать зависимости (a), в которые подставлены W_y^* и Φ_y^* .

После этого расчет параметров на следующем временном слое повторяется. Если полученные после него значения скоростей имеют тот же знак, что и в предварительном расчете без учета трения, принимаем $p^* = p_y^*$, $m^* = m_y^*$ и переходим к вычислению параметров на следующем участке балки. Если же окажется, что одна или обе скорости поменяли направление, то эти скорости полагаются равными нулю, так как в действительности силы трения ввиду своего диссипативного характера могут только уменьшить скорость вплоть до нуля, но не могут изменить ее направление. Соответствующие значения p^* и m^* находятся с помощью формул

$$
\begin{aligned}
p^* &= 2[(Q_{n-1} - Q_n)/h - (\rho F)_* W_*/\tau] - p_*, \quad (W^* = 0) \\
m^* &= 2[(M_{n-1} - M_n)/h - (\rho J)_* \Phi_*/\tau] - Q^* - Q_* - m_*, \quad (\Phi^* = 0)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Эти же формулы, которые следуют из условий равновесия сечения балки, применяются в расчетах по зависимостям (*b*)–(*d*).

Для определения параметров с целочисленными индексами используются соотношения на характеристиках системы (1.1):

$$
\begin{aligned}
Q_n - (jc_2\rho F)_{n-j/2} W_n &= [Q - jc_2\rho F W - \tau(\alpha G F \Phi + jc_2 p)/2]_{n-j/2} \\
M_n - (jc_1\rho J)_{n-j/2}\Phi_n &= [M - jc_1\rho J\Phi - jc_1\tau(Q + m)/2]_{n-j/2} \\
c_1^2 = E/\rho, \quad c_2^2 &= \alpha G/\rho, \quad j = 1, -1
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

где c_1 и c_2 – скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига, j – направляющий косинус внешней нормали к соответствующему торцу участка балки.

В промежуточных сечениях Q_n, W_n, M_n и Φ_n полностью определяются соотношениями (2.3). В краевых сечениях $x = 0$ и $x = Nh$ одна из компонент в парах (Q_n, W_n) и (M_n, Φ_n) задается граничным условием, а другая определяется с помощью соотношений на характеристиках, выпущенных из краевого сечения и остающихся в пределах балки по координате x.

Соотношения (2.3) замыкают разностную схему, однако непосредственное их использование при определенных обстоятельствах может снизить точность численного моделирования. Дело в том, что построенная таким образом схема Годунова имеет только первый порядок аппроксимации и при $k_i = c_i\tau/h$, существенно меньшем единицы, оставаясь монотонной, проявляет высокую сеточную вязкость, которая искажает численное решение. В рассматриваемой задаче, если для волн M и Φ выдерживать k_1 близким к единице, обеспечивая при этом устойчивость вычислительного процесса, то оказывается, что для волн Q и W $k_2 = 0.5$–0.6. Поэтому будут наблюдаться большие искажения тех компонент решения, которые соответствуют волнам, распространяющимся со скоростью c_2. Чтобы повысить точность численного решения обычно используются различные модификации схемы Годунова, имеющие второй порядок аппроксимации (см., например, [9]). В настоящей работе повышение точности моделирования достигается применением специальной шаговой процедуры.

Для каждой системы волн, распространяющихся со скоростью c_i, вводится свое, локальное расчетное время t_i, которое изменяется шагами τ_i. В рассматриваемой задаче $i = 1, 2$, однако описываемая процедура может использоваться при любом количестве систем волн r. Вводится также текущее время моделирования t.

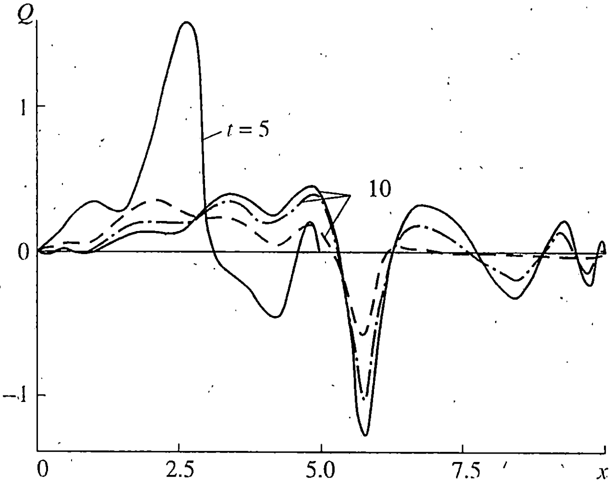
1. В начале расчета полагается $t = 0$, $t_i = \tau_i$ ($i = 1, 2, \ldots, r$).

2. Определяется текущий расчетный шаг:

$$\tau = \min_i (t_i - t)$$

3. С шагом τ проводится расчет параметров на временном слое $t + \tau$ и текущее время моделирования t увеличивается на τ.

4. В правых частях соотношений на характеристиках (2.3) обновляются для последующих расчетов только те параметры, которые относятся к системам волн с локальным временем t_i, равным t.



Фиг. 1

5. В системах волн, у которых $t_i = t$, локальное время увеличивается на τ_i и процедура повторяется с п. 2.

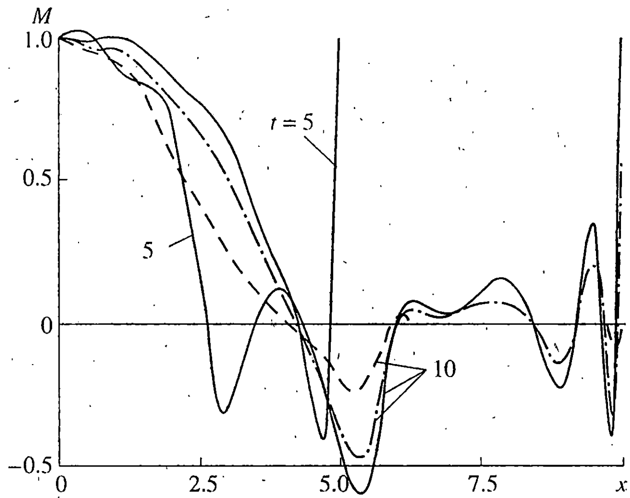
Если выбрать шаги τ_i так, что для каждой системы волн k_i равно единице или близко к ней, то описанная процедура позволяет проводить расчеты с высокой точностью, поскольку при $k_i = 1$ схема Годунова удовлетворяет так называемому условию сдвига [10], т.е. точно аппроксимирует законы сохранения, не проявляя при этом ни сеточной вязкости, ни дисперсионных ошибок.

3. Было проведено исследование волновых переходных процессов в упругой однородной балке постоянного сечения при различных краевых возмущающих факторах. Нагрузки прикладывались на торце $x = 0$. С целью упрощения анализа результатов моделирования рассматривалась балка, достаточно длинная для того, чтобы исключить появление волн, отраженных от другого торца. Все кинематические и динамические параметры волнового процесса, включая величину q, определяющую уровень трения, нормировались по максимальному значению краевой нагрузки. Расчеты проводились для $\alpha = 5/6$ и коэффициента Пуассона, равного 0.3, что соответствует $c_2 = 0.5661c_1$. Шаги численного моделирования принимались такими, что $k_1 = k_2 = 1$, а размер участков балки $h = 0.05$.

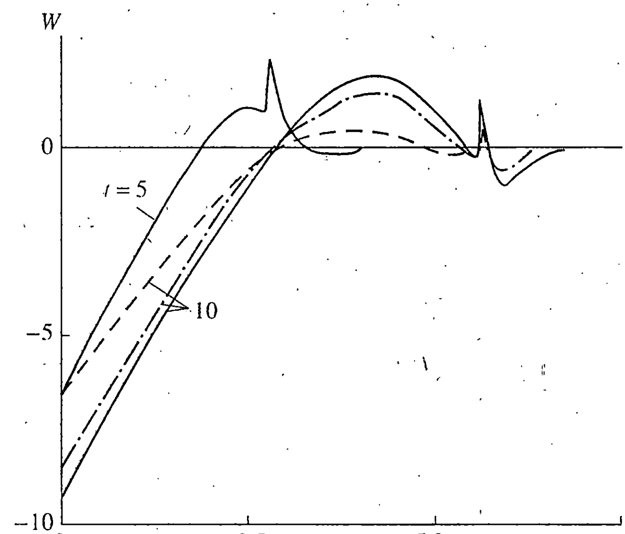
На фиг. 1 и 2 для двух моментов времени приведены профили волн перерезывающей силы и изгибающего момента, возникающих при граничных условиях на торце $x = 0$: $M = H(t)$, $Q = 0$, где $H(t)$ – единичная функция Хевисайда. Сплошные линии соответствуют $q = 0$ (внешнее трение отсутствует), штрихпунктирные линии – $q = 0.1$ и штриховые – $q = 0.3$. Волна M при отсутствии трения несет на головном фронте со скоростью c_1 сильный разрыв. Изгибающий момент в окрестности этого фронта имеет вид пика, сужающегося по мере распространения и вырождающегося по ширине даже в отсутствие трения. Трение уменьшает амплитудные значения возмущений, в том числе и высоту указанного пика, сглаживая профили волн, прежде всего, в их головной части.

Обращает на себя внимание уединенный импульс изгибающего момента, который формируется к моменту времени $t = 10$ в головной части волны M при $q = 0.3$. Направление изгибающего момента в нем противоположно направлению краевого момента, причем в широкой области позади него возмущения подавлены трением. Образование подобных изолированных пакетов бегущих возмущений связано с нелинейным характером диссипативных сил сухого трения.

На фиг. 3 и 4, где использованы те же обозначения, показаны профили поперечной и угловой скорости, когда на торце $x = 0$ $Q = H(t)$, $M = 0$. Здесь в момент времени



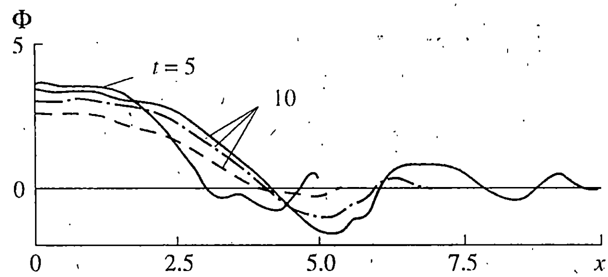
Фиг. 2



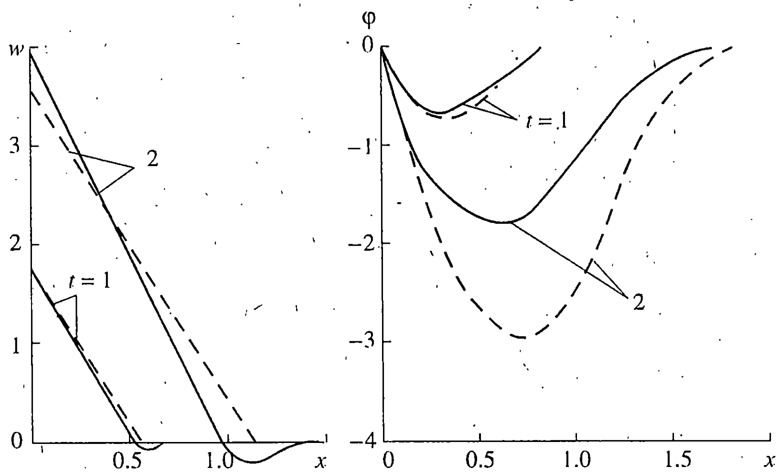
Фиг. 3

$t = 0$ терпит разрыв перерезывающая сила, поэтому волны Q и W, описываемые одной системой характеристик, несут сильный разрыв. Этот разрыв, который распространяется со скоростью c_2, точно воспроизводится благодаря описанной выше шаговой процедуре и четко виден на профиле W, соответствующем $q = 0$. Фронты, бегущие со скоростью c_1, несут в данном случае только слабые разрывы. С увеличением трения и здесь наблюдается подавление возмущений в головной части волн – между фронтами, распространяющимися со скоростями c_1 и c_2, а также общее снижение максимальных значений параметров возмущений. При $q = 0.3$ возмущения наблюдаются практически только позади фронта, движущегося со скоростью сдвиговых волн.

Сравнение профилей W и Ф показывает, что если фронт со скоростью c_1 несет только слабый разрыв, то в области между ним и фронтом сдвига преобладает вра-



Фиг. 4



Фиг. 5

щательное движение сечений: $|W/\Phi| \ll 1$, что подтверждает справедливость соответствующего допущения, принятого в [6]. Вместе с тем, в широкой области позади сдвигового фронта $|W|$ и $|\Phi|$ имеют одинаковый порядок и лишь для относительно больших значений времени ($t = 10$) на части балки, примыкающей к нагружаемому торцу, начинает существенно преобладать поступательное движение. Поэтому допущение о том, что позади сдвигового фронта можно не учитывать момент, создаваемый силами трения, представляется довольно грубым.

Для оценки области применимости асимптотического решения [6] оно сравнивалось с результатами численного моделирования. На фиг. 5 приведены профили волн поперечного смещения w и угла поворота φ в балке, у которой на торце $x = 0$ $Q = H(t)$, $\Phi = 0$. Сплошные линии соответствуют результатам численного моделирования, а штриховыми показаны зависимости, полученные по формулам [6], причем в формуле для w учитывалось только первое слагаемое. Сопоставление профилей показывает, что асимптотическое решение применимо лишь при $t \leq 1$. Уже при $t = 2$ его погрешность, особенно для угла поворота сечений, становится весьма существенной. Однако за время $t = 1$ волны возмущений пробегут расстояния порядка высоты поперечного сечения балки и будут оставаться в области, где в соответствии с принципом Сен-Венана может еще не сформироваться напряженно-деформированное состояние, согласующееся с принятыми в теории балок допущениями, в частности, с гипотезой плоских сечений. Указанные обстоятельства, к сожалению, снижают практическую ценность рассматриваемого асимптотического решения.

Приведенные результаты подтверждают эффективность разработанной методики, которая позволяет исследовать волновые процессы при произвольных граничных условиях и уровнях трения. Использование явной разностной схемы, предъявляющей умеренные требования к машинным ресурсам, делает ее особенно удобной для реализации на ПЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никитин Л.В.* Динамика упругих стержней с внешним сухим трением // Успехи механики. 1988. Т. 11. Вып. 4. С. 53–106.
2. *Викторов В.В., Кораблев Р.Р., Никитин Л.В., Хамраев А.Х.* Экспериментальная проверка закона сухого трения при распространении волн в обжатом стержне // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 165–171.
3. *Mogilevsky R.I., Ormonbekov T.O., Nikitin L.V.* Dynamics of rods with interfacial dry friction // J. Mech. Behav. Mater. 1993. V. 5. № 1. P. 85–93.
4. *Султанов К.С.* Численное решение задачи о распространении волн в вязкоупругом стержне с внешним трением // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 6. С. 92–101.
5. *Султанов К.С.* Волны в обжатом стержне при движении обжимающего тела // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 123–133.
6. *Могилевский Р.И., Никитин Л.В.* Динамический изгиб балки, лежащей на шероховатой поверхности // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 1. С. 176–179.
7. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
8. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.
9. *Малышев А.П.* Монотонная разностная схема повышенной точности для численного моделирования волновых процессов // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36. № 9. С. 155–159.
10. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. М.: Мир, 1990. 384 с.

Москва — Поступила в редакцию 23.I.1997