МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1998

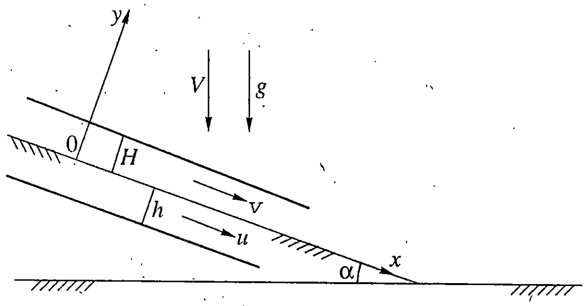
УДК 624.131:539.215

© 1998 г. А. Я. САГОМОНЯН

ДВИЖЕНИЕ ОПОЛЗНЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ НА СКЛОНАХ ВОЗВЫШЕННОСТЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДОЖДЯ

Оползень – скольжение массы грунта (почвы) вниз по поверхности склона вследствие нарушения равновесия под действием силы тяжести. Здесь рассматривается случай, когда нарушение равновесия происходит из-за сильного замачивания и увлажнения почвы, вызванного дождем (ливнем). Жидкость капель дождя проникает в мельчайшие поры почвы, ослабляя ее связанность (силы сцепления). В результате образуется водонасыщенная (увлажненная) почва с физико-механическими свойствами, отличными от свойств почвы до дождя: свойствами пластичности и вязкости [1, 2]. В этой сильно увлажненной среде образуется относительно тонкий слой, примыкающий к поверхности склона, в котором частицы среды стекают вниз к подножию возвышенности. Поток увлажненной почвы в слое вместе с материалом почвы уносит также жидкость, содержащуюся в порах почвы. Можно считать, что обе фазы в слое движутся с одинаковой скоростью. Задача состоит в том, чтобы определить движение увлажненной почвы в слое и его толщину. Ниже приняты следующие предположения. Увлажненная почва моделируется однородной несжимаемой линейно-вязкопластической средой. Допускается существование тонкого слоя подвижной вязкопластической среды, примыкающей к поверхности склона. Толщина слоя подлежит определению [3, 4]. Оползни возможны в процессе дождя и могут продолжаться после его окончания. В первом случае необходимо определить движение слоя непроникшей в почву жидкости над поверхностью склона, так же стекающей к подножию. Так же, как и в [4], здесь поверхность склона считается неограниченной плоскостью, наклоненной к горизонтальной плоскости Земли под углом α (фигура), т.е. задача рассматривается без учета граничных условий на вершине и у подножия возвышенности.

Рассмотрим движение оползня, возникающего в период дождя. В этот период часть жидкости капель, не проникшей в почву, образует над поверхностью склона сплошной слой воды, стекающей вниз к подножию. Благодаря диффузии и другим причинам отдельные частицы почвы с поверхности склона попадают в слой жидкости и уносятся потоком. Определение массы уносимых частиц входит в проблему водной эрозии. Обычно концентрация этих частиц в жидкости имеет порядок 10^{-4}–10^{-6}. В рассматриваемой здесь задаче этой концентрацией пренебрегается. В дождевом пространстве над поверхностью склона объемная концентрация жидкости ω капель дождя постоянна и равномерно распределена. Скорость капель $\mathbf{V}$ постоянна и направлена одинаково с вектором ускорения $\mathbf{g}$ силы тяжести. Рассматривается плоскопараллельное движение среды. Начало координат системы (x, y) берется на поверхности склона, ось x направлена вдоль поверхности склона вниз, ось y – вдоль внешней нормали $\mathbf{n}$ к этой поверхности (фигура). Движение жидкости в слое над поверхностью склона и в слое вязкопластической среды подчиним условиям, на основе которых получены известные приближенные уравнения Рейнольдса для движения вязкой жидкости в тонком слое [5, 6]. В обоих слоях скорости частиц вдоль оси x предпола-



Фиг. 1

гаются однонаправленными [5]. Уравнения движения вдоль оси y в слоях без учета сил инерции имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \cos\alpha, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho_0 g \cos\alpha, \quad \rho_0 = m\rho + (1-m)\rho_1 \tag{1}$$

где p – давление в средах, ρ и ρ_1 – плотности жидкости и материала почвы, ρ_0 – плотность вязкопластической среды, m – объемная концентрация пор в почве (пористость) предполагается постоянной. В обоих слоях давление не зависит от координаты x. Уравнения движения частиц вдоль оси x в слое жидкости и в слое вязкопластической среды, соответственно, записываются в виде

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \rho g \sin\alpha + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}, \quad \tau_{yx} = \eta\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2}$$

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t} = \rho_0 g \sin\alpha + \frac{\partial \tau^{\circ}_{yx}}{\partial y}, \quad \tau^{\circ}_{yx} = k + \mu\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} > 0 \tag{3}$$

Здесь v и u – компоненты скорости вдоль x в слоях жидкости и вязкопластической среды, η и μ – постоянные коэффициенты вязкости сред в этих слоях, τ_{yx} и τ°_{yx} – напряжения сдвига, k – предел текучести. В ряде работ, например, в [7], принимается, что скорость проникания жидкости в поры почвы на поверхности склона линейно зависит от давления на этой поверхности. Если w_0 – истинная скорость проникания в поры, $H(t)$ – толщина жидкого слоя, то при таком предположении можно написать равенство

$$w_0 = k_0 \rho g \cos\alpha H(t) \tag{4}$$

где k_0 – постоянный коэффициент пропорциональности. Пусть $H(t)$ обозначает границу между слоем жидкости и пространством дождя. Эта граница является подвижной поверхностью параллельной плоскости склона (фигура). Пусть ds – элемент плоскости $y = H(t)$. Через ds в единицу времени в слой втекает жидкость капель в количестве dM_1:

$$dM_1 = \rho\omega ds(\dot{H} + V\cos\alpha), \quad \dot{H} = dH/dt$$

За это время через элемент ds плоскости склона на противоположной стороне из жидкого слоя в почву втечет жидкость в количестве dM_2: $dM_2 = \rho m w_0 ds = \rho w ds$, $w = m w_0$. Величина w называется скоростью фильтрации. В рассматриваемой задаче разность $dM_1 - dM_2$ равна секундному изменению массы жидкости в объеме $H \cdot 1 \cdot ds$: $dM_1 - dM_2 =$ $= \partial(\rho H ds)/\partial t = \rho \dot{H}\, ds$.

После подстановок из этого равенства для скорости движения границы $y = H(t)$ получим

$$\dot{H} = \frac{\omega V\cos\alpha - mk_0\rho g\cos\alpha H(t)}{1-\omega} \qquad (5)$$

Интегрирование уравнения (5) при $t = 0$, $H = 0$ приводит к зависимости

$$B - H(t) = Be^{-At}, \quad A = \frac{mk_0\rho g\cos\alpha}{1-\omega}, \quad B = \frac{\omega V}{mk_0\rho g} \qquad (6)$$

Решение (6) имеет асимптоту

$$H = B \text{ при } t = \infty \qquad (7)$$

В реальных условиях предел текучести k в формуле (3) зависит от объемной концентрации (пористости) пор m, определяющей водонасыщенность (увлажненность) почвы. Можно предположить, что пористость убывает с глубиной почвы, а предел текучести k убывает вместе с увеличением пористости [4]. Ниже предел текучести считается постоянной величиной. Тогда уравнения (2) и (3) соответственно можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -a + \frac{1}{\nu}\frac{\partial v}{\partial t}, \quad a = \frac{g\sin\alpha}{\nu}, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho} \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -b + \frac{1}{\nu_0}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad b = \frac{g\sin\alpha}{\nu_0}, \quad \nu_0 = \frac{\mu}{\rho_0} \qquad (9)$$

Граница между областью дождя и слоем жидкости над склоном является пористой поверхностью разрыва параметров несжимаемой жидкости. Пусть v_s, w_s – компоненты скорости по осям x, y непосредственно за поверхностью разрыва; p_s, p_a – давления за и перед этой поверхностью; τ_s – напряжение сдвига на ней. Законы сохранения массы и изменения количества движения на пористой границе разрыва запишутся в виде

$$\begin{gathered}\omega(\dot{H} + V\cos\alpha) = \dot{H} + w_s, \quad \rho\omega(\dot{H} + V\cos\alpha)(V\cos\alpha - w_s) = p_s - p_a \\ y = H(t) \\ \rho\omega(\dot{H} + V\cos\alpha)(V\sin\alpha - v_s) = \tau_s, \quad \tau_s = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_s\end{gathered} \qquad (10)$$

Анализ условий (10) с учетом пористости границы $y = H(t)$, на которой ω имеет порядок 10^{-4}–10^{-6} приводит к приближенным граничным условиям

$$\partial v/\partial y = 0 \text{ или } v_s = V\sin\alpha, \quad p_s = p_a \text{ при } y = H(t) \qquad (11)$$

Эти приближения принимаются только для упрощения получаемых выражений для параметров среды. Принципиально не составляет труда пользоваться условиями (10). На границе между слоем жидкости и слоем вязкопластической среды – поверхности склона – должны выполняться условия равенства скоростей частиц сред и напряжений сдвига

$$u = v = U(t), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\left(-k + \eta\frac{\partial v}{\partial y}\right) > 0 \text{ при } y = 0 \qquad (12)$$

При невыполнении второго условия (12), т.е. при $\partial u/\partial y < 0$, вязкопластическая среда находится в состоянии жесткого тела. Символом $h(t)$ обозначим толщину слоя вязкопластической среды. Граница этого слоя $y = -h(t)$ также параллельна поверхности склона. Она разделяет слой подвижной среды от неподвижной. На этой границе принимается условие

$$u(-h, t) = 0 \ \text{при} \ y = -h(t) \tag{13}$$

Математические методы решений уравнений (8) и (9) известны [8]. Здесь эти уравнения решаются методом последовательных приближений, изложенным в [9]. Для уравнения (8) за первое приближение берется решение квазистационарного уравнения

$$\partial^2 v/\partial y^2 = -a, \quad a = g\sin\alpha/\nu, \quad \nu = \eta/\rho \tag{14}$$

После двукратного интегрирования его по y получим

$$v = -ay^2/2 + C_1 y + C_2, \quad \partial v/\partial y = -ay + C_1$$

Функции времени C_1, C_2 определяются первыми равенствами в условиях (11) и (12). В результате будем иметь

$$v = a(Hy - y^2/2) + U(t), \quad \partial v/\partial y = a(H-y) \tag{15}$$

где скорость U на поверхности склона подлежит определению. Если же в условиях (11) воспользоваться вторым равенством, то придем к выражению

$$v = \frac{ay}{2}(H-y) + V\frac{y}{H}\sin\alpha + \left(1 - \frac{y}{H}\right)U(t)$$

Составим производную по времени от решения (15) и подставим ее в правую часть уравнения (8) вместо $\partial v/\partial t$. Полученное таким образом равенство дважды проинтегрируем по y. В результате придем к соотношению

$$v = -\frac{a}{2}y^2 + \frac{\dot{U}}{2\nu}y^2 + \frac{a\dot{H}}{6\nu}y^3 + \bar{C}_1 + \bar{C}_2 \tag{16}$$

Решение (15) принимается за первое приближение v_1, за второе приближение v_2 берется сумма $v_2 = v_1 + v$, где v вычисляется по формуле (16).

Функции времени $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ определяются теми же условиями: первыми равенствами в (11) и (12). После определения этих функций второе приближение принимает вид

$$v_2 = \frac{1}{2}a(2Hy - y^2) + \frac{\dot{U}}{2\nu}/(y^2 - 2Hy) + \frac{a\dot{H}}{6\nu}(y^3 - 3H^2 y) + U(t) \tag{17}$$

Сравнения с точными решениями показали, что с хорошей точностью можно ограничиться вторым приближением [10]. Заметим, что, если за граничное условие взять второе равенство (11), то получим на границе $y = H$ напряжение сдвига, отличное от нуля. Решение уравнения (9) строится аналогично. За первое приближение его решения берется решение квазистатического уравнения

$$\partial^2 u/\partial y^2 = -b, \quad b = g\sin\alpha/\nu_0, \quad \nu_0 = \mu/\rho_0 \tag{18}$$

Дважды интегрируя это уравнение по y, получим

$$u = -\frac{1}{2}by^2 + C_1 y + C_2$$

Используя граничное условие (13), это решение представим в виде

$$u = \frac{1}{2}b(h^2 - y^2) + C_1(h+y), \quad -h \le y \le 0 \tag{19}$$

Функция времени C_1 определяется из второго равенства (12) с учетом скорости сдвига в формуле (15). В итоге решение (19) запишется так

$$u = \frac{1}{2}b(h^2 - y^2) + \frac{1}{\mu}(\eta aH - k)(h + y), \quad \eta aH > k \tag{20}$$

Второе приближение решения уравнения (9) строится аналогично второму приближению v_2 уравнения (8), приведенному в виде (17). Ниже оно не используется и здесь не приводится.

Закон сохранения массы несжимаемой вязкопластической среды в объеме единичной ширины вдоль оси x, заключенной между границами $y = -h(t)$, $y = 0$, приводит к равенству

$$\rho_1(1 - m)\dot{h} + \rho m w_0 = \rho_0 \dot{h} \tag{21}$$

Скорость w_0 определена в формуле (4). Из (21) определяется скорость границы $y = -h(t)$:

$$\dot{h} = dh/dt = w_0 = k_0 \rho g \cos\alpha H(t) \tag{22}$$

Подставив значение H по формуле (6) в правую часть равенства (22), после интегрирования получим значение толщины слоя

$$h = E(t + A^{-1}e^{-At}) + C, \quad E = Bk_0\rho g \cos\alpha \tag{23}$$

Постоянная интегрирования C в (23) определяется ниже из начальных условий. Практический интерес представляют решения уравнений в квазистатическом приближении (14) и (18). Из решения (15) и (20) следует, что на поверхности склона должно выполняться условие

$$\eta aH(t) - k \ge 0 \ \text{ при } y = 0 \tag{24}$$

В действительности, оползень – движение среды вдоль оси x, которое начинается внутри слоя, там где напряжение сдвига превосходит предел текучести. Здесь принимается следующее приближение: считается, что процесс оползня происходит при выполнении условия (24). Оно означает, что после начала дождя, оползень на поверхности склона возникает в момент t_*, который определяется из равенства

$$\eta aH_* = k, \quad H_* = B(1 - e^{-At_*}) \tag{25}$$

где k – предел текучести. При $k > \eta aB$ оползень не возникает. Из формул (24), (25) следует, что постоянная интегрирования в формуле (23) определяется из условий

$$t = t_*, \quad H = H_*, \quad h = h_*, \quad h_* = \int_0^{t_*} w_0 dt \tag{26}$$

В результате получим формулу, определяющую толщину слоя

$$h(t) = E\left(t - t_* - A^{-1}(e^{-At_*} - e^{-At})\right) + h_*, \quad t > t_* \tag{27}$$

Вдоль поверхности склона ($y = 0$) скорость находится так

$$u = U = \frac{1}{2}bh^2 + \frac{h}{\mu}(\eta aH - k), \quad \eta aH > k \tag{28}$$

Заметим, что скорость сдвига на границе $y = -h(t)$ определяется выражением

$$y = -h(t), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = bh + \frac{1}{\mu}(\eta a H - k), \quad \eta a H > k \tag{29}$$

Массовый расход среды в единицу времени Q равен интегралу от скорости, вычисленной по формуле (20), умноженному на плотность:

$$Q = \rho_0 \int_{-h}^{0} u dy = \rho_0 \left[\frac{bh^3}{3} + \frac{1}{2\mu}(\eta a H - k)h^2 \right], \quad \eta a H > k \tag{30}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Реология суспензий. Сб. статей / Под ред. В.В. Гогосова и В.Н. Николаевского. М.: Мир, 1975. 334 с.
2. *Воларович М.П.* Применение методов исследования вязкости и пластичности в прикладной минералогии // Тр. ин-та минералогии. 1934. Вып. 66. 52 с.
3. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
4. *Сагомонян А.Я.* К вопросу дождевой эрозии почв // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1995. № 5. С. 85–94.
5. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
6. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
7. *Слезкин Н.А.* О течении вязкой жидкости при наличии свободной границы пористого дна // Вестн. МГУ. Сер. Математики, механики, астрономии, физики, химии. 1957. № 5. С. 3–5.
8. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
9. *Швец М.Е.* О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя // ПММ. 1949. Т. 13. Вып. 3. С. 257–266.
10. *Кочетков А.М.* Приближенное решение некоторых задач нестационарного движения вязко-пластической среды // ПММ. 1950. Т. 14. Вып. 4. С. 433–436.
11. *Бахшиян Ф.А.* К вязко-пластическому течению при ударе цилиндра по пластине // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 1. С. 47–52.
12. *Шемякин Е.И.* О подвижности больших оползней // Докл. РАН. 1993. Т. 331. № 6. С. 742–744.

Москва

Поступила в редакцию 8.IV.1998