

УДК 624.131:539.215

© 1998 г. А. Г. ЕГОРОВ, А. В. КОСТЕРИН, Д. Р. САХАБУТДИНОВА

### **ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ С НЕИЗВЕСТНОЙ ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ**

Рассматриваются одномерные задачи фильтрационной консолидации вязкоупругого пористого полупространства, насыщенного вязкопластической жидкостью; под действием поверхностной нагрузки.

Теория фильтрационной консолидации широко используется для расчета деформаций водонасыщенных грунтов под влиянием внешних нагрузок. Значительное внимание при этом уделяется одномерной задаче. Ее решение применяется для интерпретации экспериментальных компрессионных зависимостей, служит тестом для общих алгоритмов решения многомерных задач, имеет практическое значение при оценке обширных в плане воздействий на грунт.

В глинизированных породах существенное влияние на фильтрацию жидкости оказывает наличие предельного градиента давления [1]. Одномерная задача консолидации с учетом этого рассматривалась в [2–6]. При этом принималось, что пористая матрица деформируется упруго. Однако в существенно нестационарных условиях, наряду с упругими, необходимо учитывать и вязкие свойства глинизированных грунтов.

В данной статье реологические свойства пористой матрицы описываются моделью Кельвина–Фойгта, а фильтрация жидкости – простейшим законом с предельным градиентом давления. Рассмотрены две задачи о деформировании пористого полупространства, к границе которого в начальный момент времени прикладывается постоянная нагрузка, либо нагрузка импульсного типа. Выявлен ряд качественных и асимптотических свойств решений. Установлено, что при определенных значениях “импульса” возникают две сопряженные зоны фильтрации с противоположно направленными потоками. Проведен численный анализ решений. Найдены замороженные (остаточные) напряжения.

**1. Постановка задачи. Начальное состояние.** Пусть в момент времени  $t = 0$  к границе невозмущенного насыщенного пористого полупространства  $x > 0$  способом “высокопроницаемый поршень” [7] прикладывается нагрузка  $\Pi(t)$ . В сделанных предположениях относительно свойств пористой матрицы и жидкости, процесс фильтрационной консолидации описывается уравнениями [7–9]:

$$\partial\sigma/\partial x + \partial p/\partial x = 0 \quad (1.1)$$

$$\partial e/\partial t + \partial q/\partial x = 0 \quad (1.2)$$

$$\sigma = -\lambda(e + \tau_0 \partial e/\partial t) \quad (1.3)$$

$$q = -k\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right), \quad k(s) = k_0 \begin{cases} 0 & |s| < \Gamma \\ s - \Gamma \operatorname{sign}(s) & |s| > \Gamma \end{cases} \quad (1.4)$$

Здесь  $\sigma$  – эффективные напряжения (положительны при сжатии),  $p$  – давление жидкости,  $e = \partial u / \partial x$  – деформация,  $u$  – смещение скелета,  $q$  – скорость фильтрации,  $\Gamma$  – предельный градиент давления,  $k_0$  – коэффициент фильтрации, константы  $\lambda$ ,  $\tau_0 \lambda$  описывают упругие и вязкие свойства грунта соответственно.

Удобно свести систему (1.1)–(1.4) к уравнению относительно  $\sigma(x, t)$ . В безразмерных переменных оно имеет вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \left(1 + \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial x} k \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right) = 0, \quad k(s) = \begin{cases} 0, & |s| < 1 \\ s - \text{sign}(s), & |s| > 1 \end{cases} \quad (1.5)$$

Здесь за безразмерными переменными сохранены прежние обозначения, а в качестве масштабов выбраны

$$t_0 = \tau_0, \quad x_0 = \sqrt{\lambda k_0 \tau_0}, \quad \sigma_0 = \Gamma \sqrt{\lambda k_0 \tau_0}, \quad u_0 = k_0 \Gamma \tau_0 \quad (1.6)$$

Обратимся к начальным и граничным условиям задачи. В силу принятого способа приложения нагрузки имеем

$$\sigma(0, t) = \Pi(t) \quad (1.7)$$

Рассмотрим два вида нагружения:  
постоянное

$$\Pi(t) = \begin{cases} \Pi = \text{const}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

импульсное

$$\Pi(t) = \begin{cases} I/\varepsilon, & 0 < t < \varepsilon \\ 0, & t \leq 0, \quad t \geq \varepsilon \end{cases}$$

Нагрузка на границе терпит скачок при  $t = 0$  в первом и  $t = 0, \varepsilon$  во втором случае. В силу того, объемные деформации насыщенной среды при этом измениться не успевают [8], величина  $e$  непрерывна в соответствующие моменты времени. Для  $de/dt$  и  $\sigma$  это не так. При скачкообразном изменении нагрузки на границе, напряжения во всем полупространстве претерпевают скачок. Из (1.5) следует, что распределение напряжений  $\sigma_+$  после скачка и  $\sigma_-$  до него связаны условием

$$\sigma_+ - \frac{\partial}{\partial x} k \left(\frac{\partial \sigma_+}{\partial x}\right) = \sigma_- - \frac{\partial}{\partial x} k \left(\frac{\partial \sigma_-}{\partial x}\right) \quad (1.8)$$

Таким образом, в ответ на приложение нагрузки в момент  $t = 0$  в среде при  $t = 0 + 0$  мгновенно вырабатывается отличное от нуля “начальное” распределение  $\sigma$ . Оно находится из (1.7), (1.8) и условий сопряжения. Последние порождаются тем, что в соответствии с (1.5) полупространство  $x > 0$  разбивается на зоны двух типов. В одних

$$|\partial \sigma / \partial x| < 1, \quad \partial \sigma / \partial t = 0$$

Назовем их зонами замороженных напряжений. В других – зонах фильтрации

$$|\partial \sigma / \partial x| > 1, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial^3 \sigma}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0$$

Границы раздела зон заранее неизвестны и должны определяться из условий сопряжения. При этом возможны, вообще говоря, две ситуации. Либо граница  $x = l(t)$  отделяет зону фильтрации ( $x < l$ ) от зоны замороженных напряжений, либо она раз-

деляет зоны фильтрации с противоположно направленными потоками. В обоих случаях условия сопряжения имеют вид

$$[\sigma] = 0, \quad \left[ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \right] = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Big|_{x=l-0} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x} \Big|_{x=l+0} = \pm 1 \quad (1.9)$$

где  $[\cdot]$  означает скачок функции при  $x = l$ . Они являются следствием (1.1)–(1.4) и требования непрерывности по пространству напряжений, скорости фильтрации и деформаций.

Обратим внимание на то, что условие  $[\sigma] = 0$  выполняет различную роль при наступлении ( $i > 0$ ) и отступлении ( $i < 0$ ) зоны фильтрации. В первом случае напряжения справа от  $l$  (в зоне замороженных напряжений) известны и это условие играет роль начального условия для  $\sigma$  в зоне фильтрации. Во втором случае оно определяет заранее неизвестные остаточные напряжения при  $x > l$ .

Принципиальная возможность отступления зоны фильтрации и связанная с этим зависимость распределения остаточных напряжений от характера протекания фильтрационных процессов является интересной особенностью рассматриваемой модели. Она связана с вязкими свойствами скелета грунта. В их отсутствие с необходимостью  $i > 0$ . Покажем это.

Для чисто упругого скелета имеем

$$x < l(t): \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}; \quad x = l(t): \quad [\sigma] = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = -1$$

Выбор отрицательного знака здесь сделан для определенности. Он не принципиален. Обозначим через  $\sigma_0(t)$  значение  $\sigma$  при  $x = l(t)$ . В силу цепочки равенств

$$\dot{\sigma}_0 = \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Big|_{x=l} + i \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Big|_{x=l} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \Big|_{x=l} - i$$

и положительности второй производной от  $\sigma$  в точке  $l$  имеем

$$\dot{\sigma}_0 + i > 0 \quad (1.10)$$

С другой стороны, постоянные во времени напряжения  $\sigma_+(x)$  справа от  $l$  определяются величиной  $\sigma_0$ :  $\sigma_+(l(t)) = \sigma_0(t)$  и условие их замороженности  $\partial \sigma_+ / \partial x > -1$  записывается в виде

$$\dot{\sigma}_0 / i > -1 \quad (1.11)$$

Остается заметить, что (1.8) и (1.9) противоречат друг другу при  $i < 0$ .

Теперь имеется все необходимое для определения начального состояния. В случае постоянной нагрузки это делается просто. Здесь, очевидно, полупространство оказывается разделенным на примыкающую к границе  $x = 0$  зону фильтрации и полубесконечную зону замороженных напряжений с  $\sigma = 0$ . Начальные напряжения в зоне фильтрации находятся вместе с положением  $x = l_0$  границы раздела зон из (1.8), (1.9):

$$t = 0 + 0: \quad \sigma = \text{sh}(l_0 - x), \quad 0 < x < l_0 = \ln(\Pi + \sqrt{1 + \Pi^2}) \quad (1.12)$$

В случае импульсной нагрузки уравнение (1.8) применяется дважды: при  $t = 0$  и  $t = \varepsilon$ . Обозначим искомое "начальное" распределение  $\sigma(\varepsilon + 0)$  через  $\sigma_0$ , а распределения при  $t = 0 + 0$ ,  $t = \varepsilon - 0$  через  $\sigma_{-2}$ ,  $\sigma_{-1}$  соответственно.

Для определения  $\sigma_{-2}$  имеем ту же задачу, что и для постоянной нагрузки. Нужно лишь заменить в ней  $\Pi$  на  $I/\varepsilon$ . В пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  зона фильтрации занимает все полупространство, и

$$\sigma_{-2} = (I/\varepsilon) \exp(-x), \quad x > 0$$

Функцию  $\sigma_{-1}(x)$  можно найти, учитывая малость соответствующего промежутка времени  $\varepsilon$ . Подставляя в соответствующее соотношение разложение  $\sigma_{-1} = \sigma_{-2} + \partial\sigma/\partial t(x, \varepsilon - 0)t$ , получим простую краевую задачу для  $\partial\sigma/\partial t(x, \varepsilon - 0)$ , решив которую, найдем

$$\sigma_{-1} = \sigma_{-2} + \frac{1}{2}Ixe^{-x}, \quad x > 0$$

Для нахождения  $\sigma_0(x)$  остается решить задачу

$$\sigma_0 = \frac{d}{dx}k\left(\frac{d\sigma_0}{dx}\right) = \sigma_{-1} - \frac{d}{dx}k\left(\frac{d\sigma_{-1}}{dx}\right) = Ie^{-x}, \quad x > 0 \quad (1.13)$$

с граничным условием  $\sigma_0(0) = 0$ . Характерный вид  $\sigma_0$  можно уяснить из решения указанной задачи в пренебрежении начальным градиентом давления по сравнению с величиной импульса  $I$ . В (1.13) при этом нужно заменить  $k(d\sigma_0/dx)$  на  $d\sigma_0/dx$ . Соответствующее решение

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}Ixe^{-x} \quad (1.14)$$

возрастает от нуля при  $x = 0$  до своего максимального значения в точке  $x = 1$  и монотонно убывает до нуля с дальнейшим ростом  $x$ .

То же самое происходит и в общем случае. На отрезке  $[0, l_0]$  реализуется возрастающая ветвь  $\sigma_0$ , отвечающая зоне фильтрации с положительным направлением фильтрационного потока. В  $l_0$  величина  $\sigma_0$  максимальна и далее монотонно убывает, причем по-разному для малых и больших импульсов.

В случае малых  $I$  вся область  $x > l_0$  является зоной замороженных напряжений и в ней, согласно (1.13),  $\sigma_0 = Ie^{-x}$ . Распределение напряжений в зоне фильтрации  $0 < x < l_0$ , равно как и граница  $l_0$  находятся из (1.13) и условий сопряжения. Ограничимся тем, что выпишем выражение для  $l_0$ :

$$I = \frac{4 \operatorname{sh}(l_0)}{3 + \exp(-2l_0) - 2l_0} \quad (1.15)$$

Условием реализации такого решения является условие  $|\sigma'(l_0 + 0)| < 1$  или, что то же самое,  $I < \exp(l_0)$ . Оно, с учетом (1.15), преобразуется к виду  $I < I_*$ . Критическое значение  $I_* = 2.23\dots$  есть решение уравнения  $I_*^2 (\ln I_*^2 - 1) = 3$ , тождественного (1.15) при замене в нем  $l_0$  на  $\ln I$ .

Если  $I > I_*$ , то появляется еще одна граница раздела зон  $x = r_0$ . При  $x > r_0$  по-прежнему имеет место зона замороженных напряжений с экспоненциально затухающей  $\sigma_0$ . А на интервале  $[l_0, r_0]$  реализуется вторая зона фильтрации, фильтрационный поток в которой противоположен по направлению фильтрационному потоку области  $[0, l_0]$ . Для нахождения  $l_0, r_0$  из (1.13) с учетом условий сопряжения (1.9) можно получить пару трансцендентных уравнений. Они не приведены здесь в силу громоздкости. Результаты расчетов по ним будут представлены в дальнейшем. Здесь же ограничимся указанием асимптотики  $r_0, l_0$  при  $I \rightarrow \infty$ . В этом случае  $l_0 \sim 1$ , что совпадает с точкой максимума  $\sigma_0(x)$ , а  $r_0$  логарифмически возрастает с ростом  $I$ , определяясь формулой

$$\frac{\exp(r_0) - 4 \operatorname{sh}(1)}{r_0 - 3/2} \sim I$$

Заметим, что в другом предельном случае ( $I \rightarrow 0$ ) из (1.15) следует, что  $l_0 \sim I$ .

Вычислив  $\sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0$ , можно найти из (1.1)–(1.4) “начальные” распределения и других физических величин. Обратим, в частности, внимание на то, что в “началь-

ный" момент времени грунт сжат, так что смещение равно  $l \exp(-x)$  и на его поверхность отжать равное  $l$  количество воды из пор.

**2. Постоянная нагрузка.** Качественная картина процесса консолидации в этом случае достаточно ясна. В начальный момент времени в полупространстве скачком устанавливается напряженное состояние (1.12). С течением времени граница  $x = l(t)$  зоны фильтрации движется вправо, так что сама область фильтрации и напряжения в каждой точке ее монотонно увеличиваются. Своих предельных значений они достигают при  $t = \infty$ . Соответствующее распределение напряжений определяется решением стационарной задачи:

$$\sigma|_{t=\infty} = \begin{cases} \Pi - x & x < l_{\infty} \\ 0 & x > l_{\infty} \end{cases} = \Pi \quad (2.1)$$

Смещение свободной поверхности возрастает со временем от нуля до величины  $\Pi^2/2$  на стационаре.

Прозрачность картины развития рассматриваемого процесса, разумеется, не снимает вопроса о ее количественном анализе. Наибольший интерес при этом вызывают не столько его результаты, сколько собственно метод расчета, который переносится на более сложные задачи, рассматриваемые в следующих пунктах статьи. Изложим здесь его простейший вариант, ограничиваясь в дальнейшем лишь необходимыми пояснениями.

Для нахождения динамики развития напряжений применяется разностный метод с чисто неявной по времени дискретизацией (1.5):

$$\sigma - \frac{(1+\tau)}{h} (k(\sigma_x) - k(\bar{\sigma}_x)) = \check{f} = \check{\sigma} - \frac{1}{h} (k(\check{\sigma}_x) - k(\bar{\sigma}_x)) \quad (2.2)$$

Здесь  $h, \tau$  — шаги по пространству и времени, галочка указывает на предыдущий временной слой, а нижние индексы  $x$  и  $\bar{x}$  — на правую и левую разностную производную соответственно. При используемых граничных условиях нелинейное разностное уравнение (2.2) имеет единственное решение [10]. Для его отыскания могут применяться универсальные итерационные методы сквозного счета, автоматически выделяющие зоны с различным характером решения. Нами, например, с успехом использовался метод обобщенного Лагранжиана [11]. Скорость сходимости итерационного процесса и, соответственно, быстродействие такого сорта методов, однако, невелики. Отметим, что в одномерных задачах оказывается возможным, используя априорную информацию о характере расположения зон фильтрации и замороженных напряжений, построить прямой метод решения (2.2)<sup>1</sup>.

В нашей ситуации он основывается на том, что существует граничный узел сетки (с номером  $n$ ), такой, что для произвольной узловой точки  $i$  имеем  $\sigma_x < -1$  при  $i < n$ ,  $\sigma = 0$  при  $i > n$  и  $-1 < \sigma_x < 0$  при  $i = n$ . При этом (2.2) преобразуется к виду

$$\sigma_0 = \Pi \quad (2.3)$$

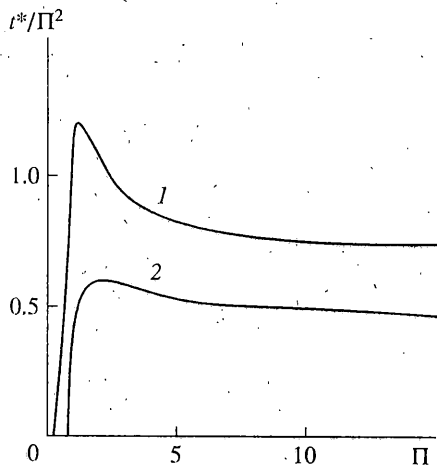
$$\sigma_i - (1+\tau)\sigma_{ix} = \check{f}_i, \quad 0 < i < n \quad (2.4)$$

$$\sigma_n + \frac{(1+\tau)}{H} (\sigma_x - 1) = \check{f}_n, \quad 0 \leq \sigma_n \leq h \quad (2.5)$$

а  $n$  подлежит определению наряду с  $\sigma$ .

Для решения (2.3)–(2.5) используется метод прогонки. Решение (2.3), (2.4) ищется в виде рекуррентного соотношения  $\sigma_i = \alpha_i \sigma_{i+1} + \beta_i$  (как принято в этом методе [12]). Прогоночные коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i$  последовательно определяются прямым ходом

<sup>1</sup> Указано А.В. Лапиным.



Фиг. 1

прогонки. На каждом шаге проверяется, является ли расчетный узел граничным. Для этого достаточно сравнить между собой  $\beta_i$  и  $h$ . Действительно, если  $i = n$ , то  $\sigma_{i+1} = 0$  и  $\sigma_i = \beta_i$ . Таким образом, согласно неравенству в (2.5)  $i = n$ , если  $\beta_i \leq h$ . После нахождения  $n$  величина  $\sigma_n$  подсчитывается согласно (2.5), а остальные  $\sigma_i (i < n)$  вычисляются обратным ходом прогонки. Ясно, что для решения исходной задачи данным методом требуется столько же операций, сколько и для обращения обычной трехдиагональной матрицы. Обоснование его может быть проведено, например, для любых неубывающих нагрузок  $P(t)$ .

Из результатов расчета приведем графики зависимости времени  $t_*$  выхода решения на стационар в зависимости от величины прикладываемой нагрузки (фиг. 1). Значение  $t_*$  определялось как время, при котором  $l(t_*) = \kappa l(\infty)$ . Выбору  $\kappa = 0.95$  соответствует кривая 1,  $\kappa = 0.9$  – кривая 2. С ростом  $\Pi$  они быстро выходят на параболическую асимптотику  $t_* \sim a\Pi^2$  ( $a = 0.74$  для  $\kappa = 0.95$ ;  $a = 0.49$  для  $\kappa = 0.9$ ). При  $\Pi > 15$  погрешность асимптотических формул не превышает 10%.

Указанная асимптотическая зависимость связана с тем, что при больших  $\Pi$  процесс установления протекает медленно, и вязкий член в (1.3) пренебрежимо мал. Поэтому соответствующая константа  $\tau_0$  не может входить в искомую связь  $t_*$  с  $\Pi$ . Анализ используемых масштабов (1.6)  $t_0$  и  $\sigma_0$  для  $t_*$  и  $\Pi$  указывает на то, что это возможно лишь при квадратичной зависимости последних.

**3. Импульсная нагрузка.** Более сложно, чем в рассмотренном выше случае  $\Pi = \text{const}$ , протекает процесс фильтрационной консолидации пористого полупространства под воздействием импульсной нагрузки. Сжатый импульсом при  $t = 0$  грунт с течением времени разуплотняется, засасывая первоначально отжатую на поверхность влагу. Пик напряжений при этом, уменьшаясь, перемещается в глубь грунта. В отсутствие предельного градиента давления напряжения полностью отрелаксировали бы, обратившись при  $t = \infty$  в ноль. Наличие предельного градиента приводит к сохранению остаточных напряжений.

В отличие от случая постоянной нагрузки, предъявить их непосредственно можно далеко не всегда. Это просто сделать лишь тогда, когда зона фильтрации наступает на зону замороженных напряжений. В этом случае при  $t = \infty$   $\sigma$  в зонах фильтрации будет представлять собой линейную функцию с единичным наклоном, а в зоне замороженных напряжений сохранит свое исходное экспоненциальное распределение. При отступлении же зоны фильтрации значения  $\sigma$  в зоне замороженных напряжений определяются деталями динамики рассматриваемого процесса и априори не известны.

В нашей ситуации наступление зоны фильтрации возможно в двух случаях. Один из них реализуется при  $I < I_*$ , когда приложенный импульс изначально формирует единственную зону фильтрации. С течением времени ее граница  $x = l(t)$  и связанный с ней пик напряжений перемещаются вправо вплоть до своего предельного положения

$$\sigma_{\infty} = \begin{cases} x & x < l_{\infty} \\ Ie^{-x} & x > l_{\infty} \end{cases}, \quad l_{\infty} = Ie^{-l_{\infty}} \quad (3.1)$$

Другой случай реализуется при больших значениях  $I$ . При этом вязкие свойства скелета существенны лишь при формировании "начального" распределения  $\sigma$ , и в силу замечания, сделанного в п. 1 относительно чисто упругой матрицы грунта, зона фильтрации с необходимостью наступает на зону замороженных напряжений. Численные расчеты показывают, что соответствующий критерий можно записать в виде  $I > I_* \approx 12.4$ . Остаточные напряжения в этом случае даются соотношением

$$\sigma_{\infty} = \begin{cases} x & x < l_{\infty} \\ 2l_{\infty} - x & l_{\infty} < x < r_{\infty}, \quad 2l_{\infty} = r_{\infty} + Ie^{-r_{\infty}} \\ Ie^{-x} & x > r_{\infty} \end{cases} \quad (3.2)$$

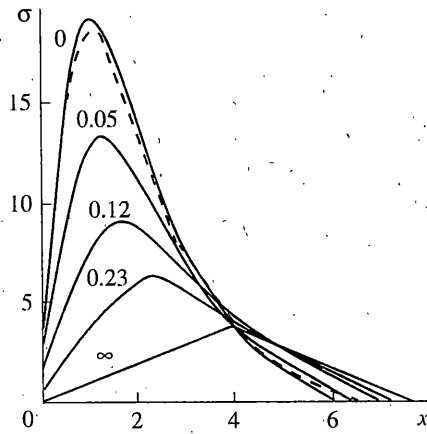
а функции  $l(t)$ ,  $r(t)$ , определяющие подвижные границы, монотонно возрастают от  $l_0$ ,  $r_0$  при  $t = 0 + 0$  до  $l_{\infty}$ ,  $r_{\infty}$  при  $t = \infty$ . Единственная константа ( $l_{\infty}$  или  $r_{\infty}$ ), с точностью до которой (3.2) определяет остаточные напряжения, находится численно.

При промежуточных ( $I_* < I < I^*$ ) значениях импульса зона замороженных напряжений наступает на зону фильтрации. Функция  $r(t)$ , описывающая соответствующую границу, монотонно убывает, в то время как  $l(t)$  остается возрастающей функцией времени. С уменьшением  $I$  при этом последовательно реализуются три ситуации. При  $I_2 < I < I^*$  для всех  $t$  имеем  $r(t) > l(t)$ , так, что сформировавшаяся в начальный момент промежуточная зона фильтрации сохраняется вплоть до выхода решения на стационар. В двух других случаях в некоторый момент времени  $l$  догоняет  $r$ , и промежуточная зона фильтрации исчезает. Отличаются они друг от друга тем, что в одном случае  $l_{\infty} = l(\infty) > r(0) = r_0$  и, очевидно, при расчете остаточных напряжений можно пользоваться формулой (3.1), в другом  $l_{\infty} < r_0$  и делать этого нельзя. Условиями реализации данных режимов являются соответственно условия  $I_* < I < I_1$  и  $I_1 < I < I_2$ .

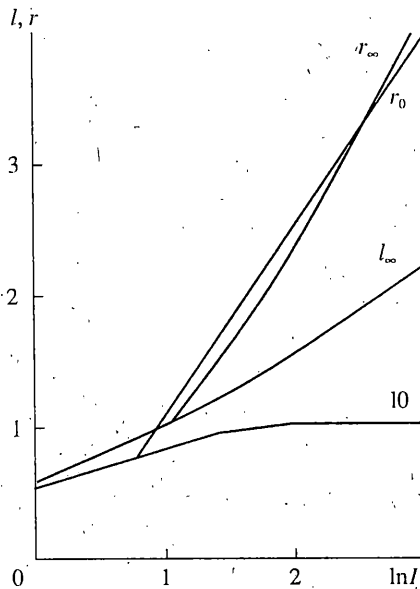
Значения  $I_1 = 2.52$ ,  $I_2 = 2.76$  находятся путем численного решения задачи. Что касается метода решения, то он в основных деталях подобен изложенному в п. 2, хотя и усложнен наличием промежуточной подвижной границы  $l$ . Для определения ее положения на каждом временном слое приходится проводить конечное (и небольшое в расчетах) число итераций.

Типичные для  $I > I^*$  результаты расчета  $\sigma$ , выполненные при  $I = 100$  представлены на фиг. 2. Цифры у кривых указывают нормированный на  $I^{\frac{2}{3}}$  момент времени. Штриховой линией изображено  $\sigma_0$ , подсчитанное по приближенной формуле (1.14). Обратим внимание на наличие точки перегиба у этих графиков. Изменение знака  $d^2\sigma/dx^2$  есть простое следствие того, что  $d\sigma/dx$  принимает одинаковое (и равное  $-1$ ) значение на концах интервала  $[l, r]$ . С другой стороны из (1.2), (1.4) следует, что  $d^2\sigma/dx^2$  совпадает со скоростью деформаций  $de/dt$  скелета грунта. Так, что несмотря на общую тенденцию к разуплотнению среды (левее точки перегиба), имеет место и примыкающая к зоне замороженных напряжений область, претерпевающая сжатие.

Зависимости  $l_0$ ,  $r_0$ ,  $l_{\infty}$ ,  $r_{\infty}$  от  $I$ , характеризующие основные режимы рассматриваемого процесса представлены на фиг. 3. Из нее видно в частности, что при  $I \rightarrow \infty$  величина  $l_{\infty}$  прямо пропорциональна  $I^{\frac{1}{3}}$ . Коэффициент пропорциональности равен при-



Фиг. 2



Фиг. 3

мерно 0.9. Из (3.2) следует, что в этом пределе  $r_{\infty} = 2l_{\infty}$ . Укажем дополнительно, что характерное время выхода на стационар здесь оказывается пропорциональным  $l^{\frac{2}{3}}$ . Если определять это время так же, как в п. 2 с  $\kappa = 0.9$ , то коэффициент пропорциональности равен примерно 0.8. Объяснение данных автомодельных зависимостей, как и в п. 2, основано на возможности пренебрежения при больших  $l$  вязкостью скелета в процессе релаксации напряжений от начального к стационарному состоянию.

**4. Серия импульсов.** В предыдущем пункте показано, что после приложения к границе пористого полупространства импульсной нагрузки в нем сохраняются остаточные напряжения. Если теперь вновь приложить ту же нагрузку, то напряжения отрелаксируют к новому стационарному состоянию: пик остаточных напряжений увеличится и продвинется в глубь грунта. Интересно рассмотреть нагружение пористого



полупространства серией одинаковых импульсов, каждый из которых отделен от другого "бесконечным" промежутком времени, в течение которого в полупространстве устанавливается новое стационарное состояние. При этом возникают два основных вопроса.

Первый из них состоит в том, выйдут ли с ростом  $n$  числа импульсов остаточные напряжения на некое предельное состояние или их пик неограниченно продвигается в глубь грунта. Ответить на него довольно просто и ответ заключается в том, что реализуется вторая возможность. Для того чтобы понять это, достаточно заметить, что "начальное" после приложения  $n$ -го импульса распределение напряжений  $\sigma_0^n$  определяется через остаточные напряжения  $\sigma_\infty^{n-1}$ , сформированные  $(n-1)$ -м импульсом, формулой (1.3), в правую часть которой добавляется  $\sigma_\infty^{n-1}(x)$ . Отсюда следует, что в примыкающей к бесконечности зоне замороженных напряжений  $\sigma_0^n = Ine^{-x}$ , а, значит, ее граница не может лежать левее, чем  $\ln(In)$ , удаляясь на бесконечность с ростом  $n$ .

Второй вопрос связан с ответом на первый и заключается в нахождении асимптотики при  $n \rightarrow \infty$  остаточных напряжений  $\sigma_\infty^n$ . Можно показать, что распределение  $\sigma_\infty^n$  описывается при больших  $n$  формулой (3.2), в которой следует заменить  $l_\infty, r_\infty, I$  на  $l_\infty^n, r_\infty^n, In$  соответственно. При этом  $l_\infty^n$  и  $r_\infty^n$  связаны соотношением

$$2l_\infty^n = r_\infty^n + In \exp(-r_\infty^n) \quad (4.1)$$

и задача сводится к нахождению зависимости  $r_\infty^n$  от  $n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для ее решения достаточно выразить  $r_\infty^n$  через два параметра —  $r_\infty^{n-1}$  и  $n$  — участвующих в постановке задачи отыскания "начального"  $\sigma_0^n$  распределения напряжений  $\sigma^n$ :

$$\sigma_0^n - \frac{d}{dx} k \left( \frac{d\sigma_0^n}{dx} \right) = f(x; n, r_\infty^{n-1}) = Ie^{-x} + \begin{cases} x & x < l_\infty^{n-1} \\ 2l_\infty^{n-1} - x & l_\infty^{n-1} < x < r_\infty^{n-1} \\ I(n-1)e^{-x} & x > r_\infty^{n-1} \end{cases} \quad (4.2)$$

Для достаточно больших  $n$  функция  $\sigma_0^n$  определяет четыре характерные области — слева направо — зону фильтрации  $\Omega_1$ , зону замороженных напряжений  $\Omega_2$  с  $\sigma_0^n = x + Ie^{-x}$ , зону фильтрации  $\Omega_3$ , зону замороженных напряжений  $\Omega_4$  с  $\sigma_0^n = Ine^{-x}$ . Рассматриваемый процесс релаксации напряжений распадается при этом на два временных этапа. На первом из них, вплоть до исчезновения  $\Omega_2$ , напряжения в  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  изменяются независимо друг от друга. Численные расчеты указывают на то важное обстоятельство, что к моменту его окончания напряжения в  $\Omega_3$  успевают отрелаксировать. На втором этапе, таким образом, изменяются лишь напряжения в  $\Omega_1$  и за счет этого граница между  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  продвигается в сторону  $\Omega_3$ ; правая граница  $\Omega_3$  остается практически неподвижной.

Изложенное в значительной степени упрощает исходную задачу нахождения  $r_\infty^n$ , позволяя отвлечься от  $\Omega_1$  и рассматривать процесс установления напряжений лишь в  $\Omega_3 = \{l(t) < x < r(t)\}$ . При этом  $r_\infty^n$  будет в главном члене совпадать с  $r(\infty)$ . Еще одним упрощающим моментом здесь является возможность пренебрежения вязкими свой-

ствами скелета. Они несущественны в силу большой длительности процесса установления, связанной, в свою очередь, с большим пространственным размером  $\Omega_3$ .

Приходим, таким образом, к задаче отыскания  $\sigma$  как решения уравнения

$$\partial\sigma/\partial t = \partial^2\sigma/\partial x^2 \quad (4.3)$$

в области  $\Omega(t)$  (индексы 3 и  $n$  для простоты опускаются) с неизвестными подвижными границами  $l(t)$ ,  $r(t)$ , определяемыми соотношениями

$$x = r(t): \quad \partial\sigma/\partial x = -1, \quad \sigma = \text{In}e^{-x} \quad (4.4)$$

$$x = l(t): \quad \partial\sigma/\partial x = -1, \quad \sigma = x + \text{I}e^{-x}$$

В “начальный” момент времени распределение  $\sigma$ , согласно (4.2), определяется как решение задачи

$$t = 0: \quad \sigma - \frac{d}{dx}k\left(\frac{d\sigma}{dx}\right) = f, \quad \sigma(0) = \sigma(\infty) = 0$$

Вообще говоря, интересно лишь стационарное решение этой задачи. Для того чтобы получить его, не обязательно решать задачу полностью. Действительно, на стационаре  $\sigma$  – линейная функция, а значит (4.4) связывает  $r_\infty = r(\infty)$  с  $l_\infty = l(\infty)$  формулой

$$r_\infty - 2l_\infty = \text{I} \exp(-l_\infty) - \text{In} \exp(-r_\infty) \quad (4.5)$$

Получим еще одну, независимую от (4.5), связь между этими двумя величинами.

Для этого проинтегрируем (4.3) по  $\Omega$ . Воспользовавшись граничными условиями (4.4), получим

$$\frac{d}{dt} \int_l^r \sigma(x, t) dx - \frac{dF(r(t))}{dt} + \frac{dF(l(t))}{dt} = 0$$

где через  $F(x; n, r_\infty^{n-1})$  обозначена первообразная  $f$ . Отсюда следует, что величина  $\int_l^r \sigma(x, t) dx - F(r(t)) + F(l(t))$  сохраняется в течение всего процесса релаксации напряжений. Более того, интегрированием (4.2) можно убедиться, что в “начальный” момент времени, а значит, и всегда, она равна нулю. Полагая далее  $t = \infty$  и учитывая линейность  $\sigma^n(x, \infty)$ , получим искомую связь

$$\frac{1}{2} (\text{In}e^{-r_\infty} + l_\infty + \text{I}e^{-l_\infty})(r_\infty - l_\infty) = F(r_\infty; n, r_\infty^{n-1}) - F(l_\infty; n, r_\infty^{n-1}) \quad (4.6)$$

Исключив из (4.5), (4.6) величину  $l_\infty$ , найдем функциональную связь  $r_\infty$  с  $r_\infty^{n-1}$  и  $n$ .

Отождествив, наконец,  $r_\infty$  с  $r_\infty^n$  – на возможность чего было указано выше – приходим к искомой зависимости  $r_\infty^n$  от  $r_\infty^{n-1}$ ,  $n$ . Соответствующее выражение в общем случае довольно громоздко, но асимптотически при больших  $n$  и  $r_\infty^n$  сводится к простому соотношению

$$(r_\infty^n)^2 - (r_\infty^{n-1})^2 \approx 4 \text{I} \exp(-r_\infty^n/2)$$

Переходя от (4.6) к дифференциальному уравнению и интегрируя его, найдем окончательно

$$(r_\infty^n - 2) \exp(r_\infty^n/2) \approx \text{I}n$$

Это же соотношение можно с учетом (4.1) записать в терминах высоты  $l_{\infty}^n$  пика остаточных напряжений

$$2(l_{\infty}^n - 1) \exp(l_{\infty}^n) \approx In.$$

Численные расчеты подтверждают справедливость полученной асимптотической формулы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-013-17300).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бондаренко Н.Ф.* Физика движения подземных вод. Л.: Гидрометеоздат, 1973. 216 с.
2. *Флорин В.А.* Основы механики грунтов. Т. 2. Л.-М.: Госстройиздат, 1961. 544 с.
3. *Pascal Florica, Pascal Hanry, Murray D.W.* Consolidation with threshold gradients // Intern. J. Numer. and Anal. Geomech. 1981. V. 5. № 3. P. 247–261.
4. *Нуриджанян С.Ш., Хачатрян Э.А.* Влияние начального градиента напора на процесс консолидации // Изв. АН Арм.ССР. Сер. техн. наук. 1983. Т. 36. № 5. С. 22–25.
5. *Мазуров П.В.* К одномерной теории нелинейной консолидации // Вопросы подземной гидромеханики и оптимизации нефтедобычи. Ч. 1. Казань: Казан. физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1985. С. 94–105.
6. *Мазуров П.А.* Расчет одномерной нелинейной консолидации // Вопросы подземной гидромеханики и оптимизации нефтедобычи. Казань: Казан. физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1987. С. 55–62.
7. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
8. *Егоров А.Г., Костерин А.В., Скворцов Э.В.* Консолидация и акустические волны в насыщенных пористых средах. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. 102 с.
9. *Бернардинер М.Г., Ентов В.М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
10. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
11. *Fortin M., Glowinski R.* Augmented Lagrangian methods: applications to numerical solution of boundary-value problems. Amsterdam: North-Holland, 1983. 340 p.
12. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.

Казань

Поступила в редакцию 1.X.1996