

УДК 539.374

© 1998 г. А. Е. ГВОЗДЕВ, А. А. МАРКИН

## ТЕРМОМЕХАНИКА УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО КОНЕЧНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Получена система дифференциальных соотношений, определяющая термомеханическую реакцию материала на заданный процесс конечного деформирования и температурного воздействия. Используются предложенное в статье [1] допущение о поверхности обратимости и принцип максимума производства диссипации. Полагается, что процесс необратимого деформирования по данной траектории может быть равновесным и неравновесным. В равновесном процессе скорость деформирования такова, что не оказывает влияние на термомеханические параметры.

Предложена частная модель, учитывающая эффект сверхпластичности. Для конкретизации вязких и пластических свойств, в рамках предложенной модели, достаточно зависимостей предельного значения интенсивности напряжений и максимального значения коэффициента скоростного упрочнения от температуры. Такие зависимости получены экспериментально для ряда материалов и приведены в работе [2].

**1. Основные термомеханические соотношения.** Рассматривается процесс механического и теплового воздействия на материальный элемент, удельные значения термомеханических характеристик отнесены к начальному объему. Силовое воздействие описывается обобщенным тензором истинных напряжений  $\mathbf{S}$ , процесс деформирования задается мерой  $\mathbf{K}$ [1]. Тепловое воздействие за время  $\Delta t$  характеризуется удельной тепловой энергией  $d'Q$ . Согласно первому закону термодинамики

$$dU = d'A + d'Q \quad (1.1)$$

где  $U$  – удельная внутренняя энергия,  $d'A = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{K}$  – элементарная работа. Отсутствие штриха у приращения внутренней энергии означает, что она есть параметр состояния. Удельная энтропия  $\eta$  и температура  $T$  удовлетворяют второму закону термодинамики

$$d\eta = d'Q/T + d'w/T, \quad d'w \geq 0 \quad (1.2)$$

где  $w$  – диссипация механической работы. Из (1.1) и (1.2) следует основное термодинамическое тождество [3]:

$$d\Psi + \eta dT - \mathbf{S} \cdot d\mathbf{K} + d'w = 0 \quad (1.3)$$

где  $\Psi = U - ST$  – удельная свободная энергия.

В соответствии с общим постулатом изотропии А.А. Ильюшина параметры состояния и параметры процесса в момент  $t$  определяются процессом деформирования – законом изменения  $\mathbf{K}(\hat{t})$  на отрезке  $t_0 \leq \hat{t} \leq t$ , а также законом изменения температуры. При этом параметры состояния есть функции температуры, но функционалы (в об-

щем случае) процесса деформирования. На основании общего постулата представим основную термомеханическую задачу в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= A\Psi[T(t); \mathbf{K}(\hat{t})]_{t_0}^t; \quad \eta(t) = A\eta[T(t); \mathbf{K}(\hat{t})]_{t_0}^t \\ w(t) &= A_w[T(\hat{t}); \mathbf{K}(\hat{t})]_{t_0}^t; \quad \mathbf{S}(t) = A_s[T(\hat{t}); \mathbf{K}(\hat{t})]_{t_0}^t \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $A\Psi$ ,  $A\eta$ ,  $A_w$ ,  $A_s$  – универсальные для данного материала операторы, связанные термодинамическими законами (1.2), (1.3).

Один из возможных подходов к построению операторов из (1.4) состоит во введении дополнительных параметров состояния и последующей экспериментальной проверке данной гипотезы. Необходимым требованием является сохранение параметрами состояния после изолирования системы сколь угодно долго постоянных значений. Если непосредственно после изолирования параметры процесса отличаются от последующих стационарных значений, то процесс считается неравновесным. Неравновесность может быть вызвана как неоднородностью распределения параметров по объему элемента, так и влиянием скорости деформирования. В дальнейшем считаем распределение однородным, а неравновесность обусловленной скоростью деформирования.

**2. Построение общей термомеханической модели упруговязкопластических материалов.** Рассмотрим материалы, для которых значение девиатора напряжения, достигнутое при неравновесном деформировании, в результате изоляции может изменяться и приобретать стационарное (равновесное) значение  $\mathbf{S}^{(w)}$ . Отметим, что с момента изоляции  $d'Q = 0$ ;  $d'A = 0$ . Разность между текущим –  $\hat{\mathbf{S}}$  и равновесным значениями девиатора напряжений образует вязкую составляющую –  $\mathbf{S}^{(v)}$ , при этом

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^{(w)} + \mathbf{S}^{(v)} \quad (2.1)$$

Подчиним реакцию материала на термомеханические воздействия ряду требований:

1. Равновесное напряжение является параметром состояния.
2. В полярном базисе меры  $\mathbf{K}$  справедлив частный постулат изотропии [4].
3. Изменение объема обратимо (упруго).
4. В пятимерном пространстве девиаторов равновесных напряжений существует поверхность, разделяющая области обратимого и необратимого течений процесса. Процессы нагружения, траектории которых расположены внутри и на поверхности обратимы и равновесны. Если после достижения начальной поверхности процесс необратим, то поверхность изменяется. При этом конец вектора равновесных напряжений остается на поверхности.
5. Интенсивность равновесных напряжений –  $\tau^{(s)}$  ограничена.

$$\tau_e^{(s)}(T) \leq \tau^{(s)} < \tau_m^{(s)}(T) \quad (2.2)$$

где  $\tau_e^{(s)}$  – начальный предел упругости,  $\tau_m^{(s)}$  – предел насыщения.

Неизменяемую при обратимом деформировании девиаторную составляющую меры  $\mathbf{K}$  обозначим через  $\hat{\mathbf{K}}_p$ .

Упругая составляющая  $\hat{\mathbf{K}}_e = \hat{\mathbf{K}} - \hat{\mathbf{K}}_p$  изменяется в обратимых процессах. В результате тензор-девиатор деформации скорости –  $\hat{\mathbf{W}}$ , определяемый как обобщенная яманновская производная от девиатора –  $\hat{\mathbf{K}}$  [3], при необратимом деформировании представляется выражением

$$\hat{\mathbf{W}} = \hat{\mathbf{K}}_e^\Delta + \hat{\mathbf{K}}_p^\Delta = \hat{\mathbf{W}}_e + \hat{\mathbf{W}}_p \quad (2.3)$$

Упругие свойства материала в обратимых и необратимых процессах определяются свободной энергией как функцией параметров состояния. В дальнейшем используем следующее представление:

$$\Psi = \Psi(k_e; \theta; \tau^{(s)}; \gamma; T) \quad (2.4)$$

где  $k_e = (\hat{\mathbf{K}}_e \cdot \hat{\mathbf{K}}_e)^{1/2}$  – интенсивность упругой деформации;  $\theta = \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}$  – параметр состояния, определяющий изменение объема;  $\gamma = \hat{\mathbf{K}}_e \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(s)} / \tau^{(s)}$  – смешанный инвариант параметров состояния. Если рассматривается обратимый процесс, то  $d'w = 0$  и упругая составляющая  $\mathbf{K}_{(e)}$  определяется на основании тождества (1.7) и частного постулата из следующих выражений:

$$\sigma = \partial\Psi/\partial\theta \quad (2.5)$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{k_e} \frac{\partial\Psi}{\partial k_e} \hat{\mathbf{K}}_e + \frac{1}{\tau^{(s)}} \frac{\partial\Psi}{\partial\gamma} \mathbf{S}^{(s)} \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) учитывает возможность появления упругой анизотропии в результате необратимого деформирования. При переходе к неравновесному процессу необходимо положить в левой части (2.6)  $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S}^{(s)}$ . Тогда упругая составляющая принимает значение  $\hat{\mathbf{K}}_e^{(s)}$ , которое представим в следующем виде:

$$\hat{\mathbf{K}}_e^{(s)} = \hat{\mathbf{S}}^{(s)} / (2G)$$

$$2G = \frac{1}{k_e^{(s)}} \frac{\partial\Psi^{(s)}}{\partial k_e^{(s)}}, \quad \Psi^{(s)} = \Psi|_{k_e=k_e^{(s)}}(s) \quad (2.7)$$

где  $2G$  – секущий упругий модуль,  $\Psi^s$  – свободная энергия в необратимом процессе.

Для определения скорости диссипации рассмотрим процесс элементарного необратимого нагружения с последующей разгрузкой, замкнутый по равновесным напряжениям и температуре. В результате получим

$$\dot{w} = \dot{w}^{(V)} + \dot{w}^{(s)}$$

$$\dot{w}^{(s)} = \mathbf{S}^{(s)} \cdot \hat{\mathbf{W}}_p - \frac{\partial\Psi}{\partial\tau^{(s)}} \dot{\tau}^{(s)} \quad (2.8)$$

$$\dot{w}^{(V)} = \mathbf{S}^{(V)} \cdot \hat{\mathbf{W}}$$

Здесь  $\dot{w}^{(s)}$  – пластическая составляющая скорости диссипации, а  $\dot{w}^{(V)}$  – вязкая составляющая.

Конкретизацию пластических и вязких свойств материала производим, используя принцип максимума скорости диссипации [5], согласно которому на истинных значениях  $\mathbf{S}^{(s)}$  и  $\mathbf{S}^{(V)}$  при заданной (не варьируемой) скорости деформирования, скорость диссипации максимальна. Допускаемые к сравнению равновесные напряжения должны принадлежать поверхности обратимости, а вязкие составляющие связаны условием

$$(\mathbf{S}^{(V)} + \delta\mathbf{S}^{(V)}) \cdot (\mathbf{S}^{(V)} + \delta\mathbf{S}^{(V)}) = \mathbf{S}^{(V)} \cdot \mathbf{S}^{(V)}$$

Полагая вариации равновесной и вязкой составляющих девиатора напряжений независимыми, на основании принципа максимума, приходим к следующим соотношениям, определяющим пластические и вязкие свойства материала:

$$\hat{\mathbf{W}}_p = \frac{1}{\tau^{(s)}} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\tau^{(s)}} \mathbf{S}^{(s)\Delta} + \frac{\dot{w}^{(s)}}{\tau^{(s)}} \mathbf{S}^{(s)} \right), \quad \dot{\tau}^{(s)} > 0 \quad (2.9)$$

$$\mathbf{S}^{(V)} = (\dot{w}^{(V)}/V^2)\hat{\mathbf{W}} \quad (2.10)$$

где  $\mathbf{V} = (\hat{\mathbf{W}} \cdot \hat{\mathbf{W}})^{1/2}$  – скорость деформации.

Из (2.9) и (2.10) следует, что пластические и вязкие свойства материала определяются заданием соответствующих функционалов производства диссипации

$$\begin{aligned} \dot{w}^{(s)}(t) &= A_p[\tau^s(\hat{t}); T(\hat{t})]_{t_e}^t \\ \dot{w}^{(V)}(t) &= A_v[\tau^s(\hat{t}); V(\hat{t}); T(\hat{t})]_{t_e}^t \end{aligned} \quad (2.11)$$

Если конкретизирована зависимость (2.4) свободной энергии от параметров состояния и вид операторов  $A_p$  и  $A_v$ , то может быть решена основная термомеханическая задача. То есть по заданному закону деформирования и изменению температуры от времени определяются законы изменения свободной энергии, энтропии, диссипации и напряженного состояния.

Рассмотрим последовательность решения данной задачи при неравновесном деформировании на временном отрезке  $t_e \leq \hat{t} \leq t$ . Из термодинамического тождества (1.7), с учетом (2.8), находим

$$\eta = -\partial\Psi^{(s)}/\partial T, \quad \sigma = \partial\Psi^{(s)}/\partial\theta \quad (2.12)$$

$$\tau^{(s)} = \partial\Psi^{(s)}/\partial k_e^{(s)} \quad (2.13)$$

Из (2.13) определяем интенсивность упругой составляющей как функцию от  $\tau^s$ :

$$k_e^{(s)} = G^{-1}(\tau^{(s)}, \theta, T)\tau^{(s)} \quad (2.14)$$

Из (2.7), (2.9), (2.14) находим дифференциальное соотношение, определяющее равновесную составляющую напряжений

$$\left(\frac{1}{G} + \frac{\partial\Psi}{\partial\tau^{(s)}}\right)\mathbf{S}^{(s)\Delta} + (\dot{w}^{(s)}/\tau^{(s)2} - (\ln 2G)/2G)\mathbf{S}^{(s)} = \hat{\mathbf{W}}(t) \quad (2.15)$$

Интегрируя (2.15) при начальном условии  $\mathbf{S}^{(s)}|_{\hat{t}=t_e} = \mathbf{S}_e^{(s)}$ , определяем закон изменения равновесной составляющей –  $\mathbf{S}^{(s)}(t)$ . Используя (2.15), определяем из (2.14) зависимость  $k_e^{(s)}(t)$ . Подставляя функцию  $k_e^{(s)}(t)$  в выражения (2.4), (2.12), (2.13), находим  $\eta(t)$ ,  $\delta(t)$ ,  $\tau^s(t)$ . После чего из (2.11) определяем зависимость пластической и вязкой скоростей диссипации от времени. Из (2.10) находим вязкую составляющую напряжения  $\mathbf{S}^{(V)}(t)$ . Суммируя равновесную, вязкую и гидростатическую составляющие, устанавливаем закон изменения напряженного состояния  $\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}^{(s)} + \mathbf{S}^{(V)} + \delta\mathbf{E}$ .

Таким образом, показана принципиальная возможность решения основной термомеханической задачи (1.4) при неравновесном деформировании.

**3. Построение и экспериментальная конкретизация частной модели.** Аппроксимируем свободную энергию (2.4) квадратичной зависимостью от параметров состояния  $k_e$ ,  $\theta$ ,  $T$ . При этом возможность появления деформационной анизотропии не учитывается, так как параметры  $\gamma$  и  $\tau^s$  не включаются в выражение свободной энергии. По аналогии с известным представлением [3] получим:

$$\Psi = -\eta_0(T - T_0) + K\left(\frac{\theta}{2} + 3\beta(T - T_0)\right)\theta - \frac{c(T - T_0)^2}{T_0} + Gk_e^2 \quad (3.1)$$

где  $\beta$  – коэффициент линейного расширения;  $K$  – модуль объемного сжатия;  $G$  – модуль сдвига;  $c$  – коэффициент теплоемкости.

Скорость пластической составляющей диссипации принимаем в следующем виде:

$$\dot{w}^{(s)} = \mu(\tau^{(s)}, T)\dot{\tau}^{(s)} \quad (3.2)$$

Учитывая условие (2.2), аппроксимируем универсальную для данного материала функцию  $\mu(\tau^{(s)}, T)$  следующим выражением

$$\mu = \frac{\tau^{(s)} \left( \frac{G \tau_m^{(s)} - \tau_e^{(s)}}{G_k \tau_m^{(s)} - \tau_e^{(s)}} - 1 \right)}{2G} \quad (3.3)$$

где  $G_k$  – функция от температуры, удовлетворяющая условию  $G/G_k > 1$ . Вязкую составляющую производства диссипации представим функцией следующего вида

$$\dot{w}^{(V)} = A_V(\tau^{(s)}, V, T) \quad (3.4)$$

При аппроксимации (3.3) отразим эффект структурной сверхпластичности. Известно [6], что при температуре  $\sim 0.7T$  плавления, для многих металлических материалов существует скорость деформации  $V_0$  (скорость сверхпластичности), в окрестности которой происходит изменение напряжения от значений  $\tau_m^{(s)}$  (пороговое напряжение) до  $\tau_m$ . Вне данной окрестности скорость деформации практически не влияет на напряженное состояние. Указанным требованиям удовлетворяет следующая аппроксимация:

$$\dot{w}^{(V)} = \tau^{(s)} (\exp(2m_0 \arctg V/V_0) - 1) V \quad (3.5)$$

где  $m_0$  – функция от температуры.

Конкретизация выражений свободной энергии и скорости диссипации универсальными зависимостями (3.1)–(3.5) позволяет решать термомеханические задачи для широкого класса процессов деформирования и температурного воздействия. В частности, рассмотрим процессы простого деформирования (лучевые траектории в  $k$ -пространстве Ильюшина). Подставляя (3.1)–(3.5) в (2.15) и (2.10), получим следующие законы изменения равновесной и вязкой составляющей интенсивности напряжения при  $\tau \geq \tau_e^{(s)}$ :

$$\tau^{(s)} = \tau_m^{(s)} - (\tau_m^{(s)} - \tau_e^{(s)}) \exp(-2G_k(s - s_e) / (\tau_m^{(s)} - \tau_e^{(s)})) \quad (3.6)$$

$$\tau^{(V)} = \tau^{(s)} (\exp(2m_0 \arctg V/V_0) - 1) \quad (3.7)$$

где  $s$  – длина траектории деформации. Так как процесс простой, то полная интенсивность определяется выражением

$$\tau = \tau^{(s)} + \tau^{(V)} = \tau^{(s)} (\exp(2m_0 \arctg V/V_0)) \quad (3.8)$$

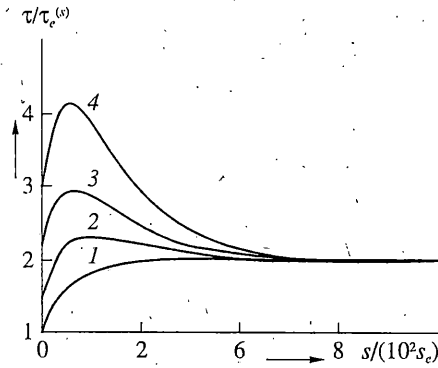
Выражение (3.8) можно использовать для экспериментальной конкретизации температурных зависимостей  $\tau_e^{(s)}(T)$ ,  $\tau_m^{(s)}(T)$ ,  $G_k(T)$ ,  $m_0(T)$ ,  $V_0(T)$ . Первые три зависимости устанавливаются из серии изотермических экспериментов по равновесному простому деформированию, например, растяжению, сжатию или чистому сдвигу.

Экспериментальная конкретизация  $m_0(T)$  и  $V_0(T)$  связана с исследованием безразмерного параметра скоростного упрочнения

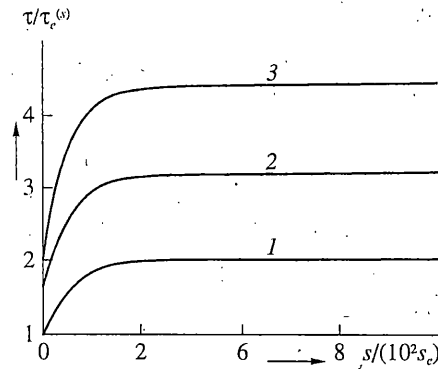
$$m = \frac{V d\tau}{\tau dV} \quad (3.9)$$

Из (3.8) получим следующее представление:

$$m = 2m_0 V_0 V / (V_0^2 + V^2) \quad (3.10)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Зависимости  $m_0(T)$  и  $V_0(T)$  устанавливаются из серии неравновесных изотермических экспериментов. Известные экспериментальные данные [5, 6] свидетельствуют, что представление (3.10) адекватно отражает вязкие свойства сверхпластических материалов.

**4. Пример.** Рассматривается изотермический процесс растяжения образца. Зависимость скорости деформации от длины траектории имеет следующий вид:

$$V = \sqrt{3/2} a \exp(-\sqrt{2/3}(s - s_e)) \quad (4.1)$$

где  $a$  – скорость торца, отнесенная к длине образца при  $s = s_e$ .

На фиг. 1 представлены зависимости относительной интенсивности  $\tau/\tau_e^{(s)}$  от относительной длины траектории  $s/(10^2 s_e)$  при различных постоянных значениях скорости торца:  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0.5$ ,  $a_3, a_3 \sqrt{3/2} = V_0$ ,  $a_4 = 2a_3$ .

На фиг. 2 представлены те же зависимости, но при постоянных скоростях деформации  $V_1 = 0$ ,  $V_2 = 0.5V_0$ ,  $V_3 = V_0$ . При этом, согласно (4.1), скорость торца должна изменяться по закону

$$a = \sqrt{2/3} V_i \exp(\sqrt{2/3}(s - s_e)) \quad (4.2)$$

Расчеты проводились по формулам (3.6)–(3.8), при следующих значениях материальных характеристик:  $s_e = 10^{-3}$ ,  $\tau_m^{(s)}/\tau_e^{(s)} = 2$ ,  $\tau_e^{(s)}/G_k = 0.1$ . Полученные зависимости

иллюстрируют существенное влияние закона изменения скорости торца образца на напряженное состояние. Кривые, представленные на фиг. 1, наряду с участком упрочнения имеют ниспадающие участки. Такое поведение наблюдается во многих экспериментах [2, 6]. Согласно предлагаемой модели, причина данного поведения заключается в экспоненциальном уменьшении скорости деформации, а следовательно, и вязкой составляющей напряжения при постоянной скорости торца. Равновесная составляющая напряжения не убывает, и на начальном участке ее рост (деформационное упрочнение) превосходит уменьшение вязкой составляющей.

Если скорость торца возрастает в соответствии с законом (4.2), то ниспадающие ветви на диаграммах отсутствуют и после деформационного упрочнения интенсивность стабилизируется. При этом стационарные значения ограничены сверху пределом  $\tau_m$ , который, согласно (3.8), определяется выражением

$$\tau_m = \lim_{s \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty} \tau = \tau_m^{(s)} \exp(m_0/\pi) \quad (4.3)$$

Связь (4.3) позволяет использовать зависимость  $\tau_m(T)$  для определения порогового напряжения. Зависимость  $\tau_m(T)$  является одной из основных характеристик сверхпластического материала, имеются многочисленные экспериментальные данные по ее определению. В то же время, эксперименты по определению зависимости порогового напряжения от температуры  $\tau_m^{(s)}(T)$  немногочисленны и характеризуются существенным разбросом результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-00321).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркин А.А. Об изменении упругих и пластических свойств при конечном деформировании // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 120–126.
2. Гвоздев А.Е. Производство заготовок быстрорежущего инструмента в условиях сверхпластичности. М.: Машиностроение, 1992. 175 с.
3. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
4. Маркин А.А., Толоконников Л.А. Меры процессов конечного деформирования // Изв. Сев.-Кавк. научн. центра высш. шк. Естеств. н. 1987. № 2. С. 51–56.
5. Излев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
6. Смирнов О.М. Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности. М.: Машиностроение, 1979. 184 с.

Тула

Поступила в редакцию 17.IV.1997