

УДК 539.374

© 1998 г. В. Н. КУКУДЖАНОВ

О СТРУКТУРЕ ПОЛОС ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЕФОРМАЦИИ В НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассматривается задача о локализации пластических деформаций в упругопластическом материале при динамическом нагружении стержня в стадии, предшествующей разрушению, когда его состояние отвечает падающему участку диаграммы. В качестве модели используется нелокальная модель упругопластической среды, в которой локальная деформация заменяется осредненной деформацией по представительной объему структурной ячейки, размеры которой малы по сравнению с характерным размером задачи. Решается задача о локализации деформаций при ударе стержня о жесткую преграду. Эта задача решалась в работах многих авторов в упругопластической и жесткопластической постановке. В работе [1] она была решена для вязкопластической модели при идеальной диаграмме Прантля.

Для получения аналитического решения задачи применяется нелинейный анализ. Используется асимптотический метод срачивания быстро и медленно меняющихся решений гиперболических волновых уравнений упругопластических сред, развитый автором в [2]. Решение задачи получено в замкнутой форме. Установлено, что локализация пластических деформаций происходит в узкой зоне, на ударяемом конце стержня. Показано, что задача о динамической локализации сводится к решению задачи о структуре стационарного разрыва, которое для упругопластической разупрочняющейся среды обладает свойствами, существенно отличающимися от свойств при упрочнении. Структура разрыва такова, что пластическая деформация оказывается неограниченно возрастающей во времени величиной, осциллирующей внутри зоны локализации, скорость частиц стержня также быстро меняется и совершает затухающие осцилляции по ширине зоны около своего асимптотического значения, напряжение же изменяется значительно медленнее. В пределе при стремлении внутреннего параметра длины к нулю зона локализации напряжения остается непрерывным, в то время как скорость имеет конечный, а деформация бесконечный разрыв. Сравнение предельных поведенческих решений для настоящей модели и для упруговязкопластического стержня [3] показывает, что они существенно различаются при $\delta \neq 0$, но в пределе, когда малый параметр $\delta \rightarrow 0$ дают одно и тоже решение для упругопластического разупрочняющегося материала.

1. Рассматривается модель нелокальной упругопластической среды. Модель применяется для описания структурной неоднородности материала и в первую очередь в стадии, предшествующей разрушению в состоянии разупрочнения, когда в нем появляются микродефекты, поры и он становится локально неоднородным. Поэтому в таком материале за деформацию естественно принимать не локальную характеристику, а некоторую осредненную по объему с определенным весом [4]:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{V} \int_V g(\xi) \varepsilon(\mathbf{x} + \xi) dV \quad (1.1)$$

В качестве ядра в (1.1) принимается функция нормального распределения по радиусу сферического объема

$$g(\xi) = \left(\frac{1}{l\sqrt{2\pi}} \right)^3 \exp\left(-\frac{\|\xi\|^2}{2l^2} \right) \quad (1.2)$$

где l – параметр, характеризующий размеры структурной частицы или масштаб внутренней структуры материала. Подстановка (1.2) в подынтегральное выражение (1.1) и разложение локальной деформации в ряд Тейлора по ξ приводит к разложению по степеням малого параметра $\delta = l/L$, который есть отношение микроразмера структуры к характерному макро размеру задачи

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon(x) + \frac{1}{2!} \delta^2 \nabla^2 \epsilon + \frac{1}{4!} \delta^4 \nabla^4 \epsilon + \dots + O(\delta^{2n}) \quad (1.3)$$

где ∇^2 – лапласиан по безразмерным переменным $\bar{x}_i = x_i/L$. Если ограничиться лишь первым дополнительным членом в этом разложении, приходим к теории с градиентом деформации второго порядка. Такое приближение значительно упрощает математическую формулировку задачи, т.к. ее описание остается в рамках дифференциальных уравнений, увеличивается лишь их порядок.

Выпишем уравнения теории пластического течения в нелокальной формулировке.

Вначале приведем уравнения локальной адитивной теории течения, в которой принимается, что скорость деформации представляется в виде суммы упругой и пластической частей.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (1.4)$$

Для упругой скорости деформации справедлив закон Гука

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}^e \quad (1.5)$$

Пластическая скорость деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ определяется на основе ассоциированного закона

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \partial F / \partial \sigma_{ij} \quad (1.6)$$

Условие текучести задается в виде

$$F(\sigma, \lambda) = 0 \quad (1.7)$$

Для параметра λ можно записать условия в форме Куна–Таккера $\lambda \geq 0$, $F(\sigma, \lambda) \leq 0$, $F(\sigma, \lambda) \lambda = 0$. Поскольку (1.4) выполняется тождественно по t в любом процессе активного или нейтрального нагружения, то имеет место уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = 0 \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) служит для определения λ :

$$\lambda = F_{ij} \sigma_{ij} / F_\lambda, \quad F_{ij} = \partial F / \partial \sigma_{ij}, \quad F_\lambda = \partial F / \partial \lambda \quad (1.9)$$

Подставляя в уравнения движения продифференцированное по времени t :

$$\dot{\sigma}_{ij,j} - \rho \dot{v}_i = 0 \quad (1.10)$$

выражение для σ_{ij} из (1.8):

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} v_{k,l} + \frac{F_{kl} \dot{\sigma}_{kl}}{F_\lambda} F_{ij} = E_{ijkl} v_{k,l} - \lambda F_{ij} \quad (1.11)$$

получаем систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно скоростей v_i :

$$\begin{aligned} E_{ijkl} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\partial (F_{ij} \lambda)}{\partial x_j} &= \rho \ddot{v}_i \\ F_{ij} E_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \lambda (F_{ij} F_{ij} - F_\lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Скалярный параметр λ можно исключить из последнего уравнения и получить систему трех уравнений относительно v_i :

$$\begin{aligned} (E_{ijkl} - F_{mn} E_{mnkl} F_{ij} \kappa) \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (F_{mn} E_{mnkl} F_{ij} \kappa) \frac{\partial v_k}{\partial x_l} &= \rho \ddot{v}_i \\ \kappa &= F_{mn} F_{mn} - F_\lambda \end{aligned} \quad (1.13)$$

При $F_\lambda > 0$ касательный модуль в уравнениях положительно определен и система уравнений (1.13) гиперболическая, но при $F_\lambda < 0$ оператор локально теряет свою положительную определенность, система уравнений (1.9) становится эллиптической, а задача некорректно поставленной, по крайней мере, в классе разрывных, но ограниченных функций [5, 7].

Требуется провести регуляризацию модели. Это целесообразно сделать, учитывая не только математические, но и физические соображения, так чтобы регуляризованная модель учитывала бы малые, но реально существующие эффекты, которыми пренебрегает исходная модель.

Возможны различные варианты к решению этой задачи. Их можно разделить на два основных типа. Первый, более очевидный, состоит в учете диссипативных членов в определяющих уравнениях за счет сил вязкости, аналогично тому, как это делается в механике жидкости. Отличие состоит в том, что вводится вязкость, зависящая от скорости пластической деформации. Это приводит к гиперболическому типу старшего оператора, совпадающим с упругим оператором, а не к параболическому, как это имеет место для жидкости [2, 3]. Такая упруговязкопластическая модель лучше отвечает физическим представлениям и опытным данным.

Второй подход основан на введении высших производных не по временной переменной, а по пространственным переменным, который отвечает учету физических эффектов, связанных с пространственной неоднородностью явлений, происходящих при пластическом деформировании и разрушении материала [5, 6]. В частности, он может основываться на учете нелокального характера пластической деформации или связанной с ней величиной λ . Поскольку неприятности, как отмечалось выше, возникают из-за изменения знака у производной F_λ , отвечающей за модуль упрочнения упругопластического материала, то можно пытаться исправить положение, заменяя локальное значение параметра λ в условии пластичности (1.7)–(1.8) на усредненное, в приближении, учитывающем второй градиент $\nabla^2 \lambda$, которое запишем в виде

$$F_{ij} \dot{\sigma}_{ij} + F_\lambda \dot{\lambda} + E l^2 \nabla^2 \dot{\lambda} = 0 \quad (1.14)$$

где l – малый параметр, определяющий внутренний масштаб структуры. Тогда вместо системы уравнений (1.8) получим

$$E_{ijkl} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j} - (\lambda F_{ij})_{,j} - \rho \dot{v}_i = 0 \quad (1.15)$$

$$F_{ij} E_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \lambda (F_{ij} F_{ij} - F_\lambda) + El^2 \nabla^2 \lambda = 0$$

Таким образом, во втором уравнении появился старший дифференциальный оператор с малым параметром. Теперь λ не может быть исключено из системы (1.15), как это было сделано при получении системы уравнений (1.14), и нужно рассматривать систему четырех уравнений (1.15) относительно неизвестных v_i и λ совместно. Нетрудно видеть, что старший оператор первых трех уравнений содержит вторые производные только от скоростей v_i , а в четвертое уравнение (1.15) входят вторые производные только от λ . Характеристический определитель распадается и для первых трех уравнений он совпадает с определителем для упругой среды, а четвертое уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением для определения λ .

Таким образом, введение второго градиента $\nabla^2 \lambda$ в уравнение пластичности приводит к восстановлению гиперболичности для нелокальной модели, в которой возмущения распространяются с постоянными упругими скоростями, а не с переменными скоростями упругопластических возмущений, зависящими от напряженно-деформированного состояния, как это было до регуляризации.

2. Перейдем к одномерному случаю одноосного напряженного состояния тонкого стержня, ось x направим вдоль оси стержня с началом координат на ударяемом конце $\sigma_y = \sigma_z = 0$, $\epsilon_y = \epsilon_z \neq 0$ определяющие уравнения принимают следующий вид:

$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon^p) \quad (2.1)$$

$$F' = \sigma - f(\lambda) + El^2 \nabla^2 \lambda = 0, \quad \epsilon^p = \lambda F_\sigma = \lambda$$

Уравнения движения и уравнение совместности поля скоростей и пластических деформаций после исключения σ можно записать так

$$\rho \dot{v} = f'(\epsilon^p) \frac{\partial \epsilon^p}{\partial x} - El^2 \nabla^3 \epsilon^p \quad (2.2)$$

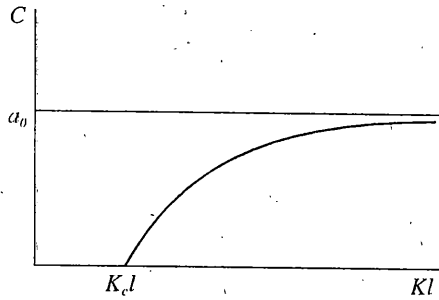
$$\frac{\partial v}{\partial x} = (1 + f'(\epsilon^p)/E) \frac{\partial \epsilon^p}{\partial t} - l^2 \nabla^2 \epsilon^p$$

Система (2.2) относительно скорости v и пластической деформации ϵ^p . Если из первого уравнения (2.2) исключить член, содержащий градиент второго порядка и полученное уравнение проинтегрировать по времени, то получим систему относительно перемещения u и пластической деформации ϵ^p

$$\rho \ddot{u} = E(\partial^2 u / \partial x^2 - \partial \epsilon^p / \partial x) \quad (2.3)$$

$$\partial u / \partial x = \epsilon^p + f(\epsilon^p) / E - l^2 \nabla^2 \epsilon^p$$

Видно, что старший оператор системы (2.3) гиперболический и совпадает с упругим оператором, также как и в трехмерном случае. При $l \rightarrow 0$ система (2.3) переходит в хорошо известную систему уравнений Рахматулина–Кармана, выраженную в переменных v и полной деформации ϵ . Действительно из (2.3) следует однозначная



Фиг. 1

зависимость между ε и ε'' : $\varepsilon = \varepsilon'' + f(\varepsilon'')E$. Обозначая $f(\varepsilon'') = \varphi(\varepsilon)$, получаем из уравнений (2.2) при $l = 0$:

$$\rho \dot{v} = \frac{1}{E} \frac{\partial \varphi(\varepsilon)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.4)$$

Система уравнений (2.4); записанная относительно скорости v и полной деформации ε , имеет общепринятый более простой вид, чем в переменных ε'' и v при $l = 0$:

$$\rho \dot{v} = \frac{1}{E} \frac{\partial f(\varepsilon'')}{\partial x} (1 + f'(\varepsilon'')/E) \frac{\partial \varepsilon''}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.5)$$

Исследуем распространение гармонических бегущих волн в пластической нелокальной среде, описываемой системой уравнений (2.2).

Предполагая состояние стержня однородным, исследуем распространение малых гармонических возмущений этого состояния. Тогда в системе (2.3) коэффициенты можно считать постоянными и решение брать в виде бегущей волны

$$v = v_0 \exp ik(x - ct), \quad \varepsilon'' = \varepsilon_0'' \exp ik(x - ct) \quad (2.6)$$

где c – фазовая скорость волны, а k – волновое число.

Прямая подстановка (2.6) в (2.3) дает систему однородных уравнений относительно v_0 и ε_0'' ; условия разрешимости которой приводит к дисперсионному уравнению

$$\frac{c^2}{a^2} = \left(l^2 k^2 + \frac{f'(\varepsilon'')}{E} \right) \left(1 + \frac{f'(\varepsilon'')}{E} + l^2 k^2 \right)^{-1}, \quad a^2 = E\rho^{-1} \quad (2.7)$$

Откуда следует, что фазовые скорости c являются действительными числами только при выполнении условия

$$k > k_c = 1/l \left(|f'(\varepsilon'')|/E \right)^{\frac{1}{2}}$$

т.е. существует критическое значение для волнового числа k_c , ниже которого бегущая волна вида (2.6) превращается в стоячую. Зависимость фазовой скорости c от безразмерного волнового числа kl приведена на фиг. 1. Волны длина которых $\lambda > \lambda_c = 2\pi/k_c$ по стержню не распространяются, а сосредотачиваются в сечении стержня, где появляется впервые разупрочнение и деформации превышают критическое значение, например, после столкновения волн. При этом ширина зоны локализации будет пропорционально увеличению параметра l и зависит от максимального относительного касательного модуля на падающей части диаграммы.

Кроме того из (2.7) следует, что $c \rightarrow a$ при $k \rightarrow \infty$, т.е. фазовая скорость малых возмущений стремится к упругой скорости и нелокальная модель восстанавливает гиперболический тип системы уравнений.

Как видно из приведенного линейного анализа, он позволяет сделать определенные качественные выводы о распространении волн в нелинейной среде и о ширине зоны локализации. Однако его предсказания весьма относительны, т.к. они сделаны на основе предположений, весьма далеких от условий, которые выполняются в реальных краевых задачах и на основе такого анализа практически ничего нельзя сказать, о том как развивается процесс локализации в пространстве и во времени при тех или иных условиях. Несравненно большими возможностями обладает нелинейный метод анализа задач для уравнений с малым параметром при старших дифференциальных операторах. В [2, 8] был развит асимптотический метод исследования нелинейных динамических задач распространения волн и дано его применение к исследованию широкого круга задач [8, 9, 12]. Ниже будет показано, что этот метод может быть обобщен и применен к исследованию стационарных квазиразрывов, какими являются полосы локализации в упругопластических материалах.

3. Рассмотрим распространение волн в стержне из материала, определяющие уравнения которого были описаны в пп. 1–2 на примере краевой задачи об ударе стержня о жесткую стенку. Начальные и краевые условия для этой задачи будут такими:

$$\sigma = \varepsilon = 0, \quad v = v_0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (3.1)$$

$$v = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad v = v_0 \quad \text{при} \quad x = L$$

Заметим, что другой задачей, к которой будет применимо полученное решение, с минимальными изменениями, будет задача о растяжении–сжатии свободного стержня длиной $2L$ с обоих концов мгновенно приложенными постоянными скоростями v_0 . Если начало координат поместить в середине стержня, то для него начальные и краевые условия будут такими:

$$v = \sigma = \varepsilon = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (3.2)$$

$$v = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad v = v_0 H(t) \quad \text{при} \quad x = L$$

где $H(t)$ – ступенчатая функция Хевисайда. Систему уравнений примем в форме (2.2) относительно скорости v , ε' , так как граничные условия заданы относительно скорости v .

В дальнейшем будем пользоваться безразмерными переменными

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v_0}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad \bar{\varepsilon}' = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}$$

$$at_0 = L, \quad \sigma_0 = \rho a_0 v_0, \quad a\varepsilon_0 = v_0$$

где v_0 – скорость, приложенная к концу стержня, остальные характерные размерные величины выражаются через v_0 . Тогда система примет следующий вид

$$\partial^2 \bar{v} / \partial \bar{t}^2 - \partial^2 \bar{v} / \partial \bar{x}^2 = -\partial^2 \bar{\varepsilon}' / \partial \bar{x} \partial \bar{t} \quad (3.3)$$

$$\partial \bar{v} / \partial \bar{x} = (1 + f'(\bar{\varepsilon}')) / E \partial \bar{\varepsilon}' / \partial \bar{t} - l^2 / L^2 \nabla^2 \bar{\varepsilon}'$$

В систему (3.3) входит малый безразмерный параметр $\delta = l/L$ равный отношению внутреннего масштаба длины к внешнему.

Дифференцируя первое уравнение (3.3) по x и интегрируя второе по t , получим одно уравнение относительно $\bar{\varepsilon}^p$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\bar{\varepsilon}^p + f(\bar{\varepsilon}^p) - \delta^2 \nabla^2 \bar{\varepsilon}^p) = 0 \quad (3.4)$$

Знак черты над безразмерными величинами в дальнейшем будем опускать. Уравнение (3.4) или система уравнений (3.3) будем решать разлагая решение в ряд по степеням параметра δ :

$$U = U_0 + \delta U_1 + \dots + O(\delta^n) \quad (3.5)$$

где $U(v, \varepsilon^p)$ – вектор решения.

В качестве нулевого приближения получим систему уравнений (2.5), записанную в безразмерных переменных v, ε , либо систему уравнений (2.4) в переменных v, ε^p :

$$\begin{aligned} \partial v_0 / \partial t &= f'(\varepsilon_0^p) \partial \varepsilon_0^p / \partial x \\ \partial \varepsilon_0^p / \partial t &= (1 + f'(\varepsilon_0^p) / E)^{-1} \partial v / \partial x \end{aligned} \quad (3.6)$$

Решение (3.6) при граничных и начальных условиях (3.1) или (3.2) легко может быть получено [11].

Уравнение (3.6) приводит к решению поставленной задачи с условиями (3.1), в котором деформация имеет особенность в виде дельта-функции в точке $x = 0$ [11]. С другой стороны разложение (3.5) справедливо, если только решение гладкое и, следовательно, в окрестности $x = 0$, где оно быстро изменяется, (3.5) становится неприменимым.

Для того чтобы получить равномерно точное решение во всей области определения, следует учесть, что градиенты решения велики в окрестности по сравнению с остальной областью, где решение изменяется медленно. В этой области решение должно быть построено в виде разложения в ряд по малому параметру μ , характеризующему рост решения. Для этого произведем растяжение по координате $\beta = x/\mu$ так, чтобы члены уравнения, содержащие высшие производные по x были бы одного порядка с другими членами порядка $O(1)$. Это условие и определит связь между параметрами μ и δ . Анализ системы уравнений (3.3) показывает, что разложение в области быстрого изменения решения для разных величин следует брать разными, учитывая априорные соображения об их изменяемости. Это приводит к следующему виду разложений

$$\begin{aligned} v &= v^{(0)} + \mu v^{(1)} + \dots + O(\mu^n) \\ \sigma &= f(\varepsilon) + \mu \sigma^{(1)} + \dots + O(\mu^n) \\ \varepsilon_p &= \varepsilon_p^0 / \mu + \varepsilon_p^{(1)} + \mu \varepsilon_p^{(2)} + \dots + O(\mu^n) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в уравнения (3.3) или (3.4), найдем, что для нулевого приближения должны выполняться следующие уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \beta} &= \frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial^4 \varepsilon_p^{(0)}}{\partial \beta^4} = (1 + f'(\varepsilon_p^0)) \frac{\partial^2 \varepsilon_p^{(0)}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \beta} &= (1 + f'(\varepsilon_p^0) / E) \frac{\partial \varepsilon_p^{(0)}}{\partial t} - \frac{\delta^2 \partial^2 \varepsilon_p^{(0)}}{\mu^3 \partial \beta^2}, \quad \mu = \delta^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

откуда видно, что последний член имеет порядок $O(\mu)$. Тогда дифференцируя (3.8) по t и учитывая, что $f(\varepsilon_p)$ – медленно изменяющаяся функция, которую можно считать постоянной величиной при закритических деформациях, получим

$$\frac{\partial^5 \varepsilon_p^{(0)}}{\partial \beta^4 \partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} (1 + f'(\varepsilon_p)/E) = \frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial t^2 \partial \beta}$$

Интегрируя по t , получаем, что уравнения для $v^{(0)}$ и $\varepsilon_p^{(0)}$ имеют одинаковый вид

$$\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial t^2} + (1 + D^2)^{-1} \frac{\partial^4 v^{(0)}}{\partial \beta^4} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_p^{(0)}}{\partial t^2} + (1 + D^2)^{-1} \frac{\partial^4 \varepsilon_p^{(0)}}{\partial \beta^4} = 0 \quad (3.9)$$

$$D^2 = f'/E$$

Граничные условия для уравнения (3.9) находим из условия сращивания с медленноизменяющимся решением уравнений (3.6). Так как это решение дает, что от сечения $x = 0$ в область $x > 0$ в обеих задачах (3.1) и (3.2) распространяется волна с амплитудой $v = v_0$, то условия сращивания при $\beta \rightarrow \infty$ будут

$$v^{(0)}|_{\beta \rightarrow \infty} = v_0 \quad v^{(0)}|_{\beta=0} = 0 \quad (3.10)$$

второе условие есть граничное условие (3.1).

Начальные условия не играют роли, т.к. $L \gg l$ и $t_0 \gg l/a$, следовательно, решение будет справедливо для больших значений времени t по сравнению с l/a .

Уравнение (3.9) можно записать в виде произведения двух операторов

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) v^{(0)} = 0, \quad \gamma^2 = (1 + D^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

Решение уравнения (3.9) при условиях (3.10) будет автомодельным и будет зависеть только от одной переменной.

Поскольку граничные условия ставятся на бесконечном интервале, задача не содержит макропараметра длины и является автомодельной.

Введем новую переменную

$$z = \xi/2t^{1/2}, \quad \xi = \sqrt{2}(1-i)\beta/2\gamma$$

где i – мнимая единица, тогда (3.11) запишется в виде произведения операторов по переменной z :

$$L_1 L_2(v^{(0)}) = 0$$

$$L_1(v^{(0)}) = -\frac{1}{4t} \left(\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial z^2} + 2\bar{z} \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \bar{z}} \right), \quad L_2(v^{(0)}) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial v^{(0)}}{\partial z} \right) \quad (3.12)$$

Окончательно находим, что уравнение (3.11) может быть записано в виде $L_1 L_2(v^{(0)}) = 0$ или $L_2 L_1(v^{(0)}) = 0$. Откуда видно, что решения уравнений $L_1(v^{(0)}) = 0$ и $L_2(v^{(0)}) = 0$ удовлетворяют уравнению (3.12). Тогда их линейная комбинация также является решением (3.12). Найдем $v_1^{(0)}$ и $v_2^{(0)}$. Оба решения удовлетворяют одному и тому же уравнению, но в уравнении $L_2(v^{(0)}) = 0$ комплексной переменной является z , а в уравнении $L_1(v^{(0)}) = 0$ комплексно сопряженная переменная \bar{z} .

Решения этих уравнений могут быть легко получены через функцию интеграла ошибок $\operatorname{erf} z$ от комплексных переменных z и \bar{z} :

$$v_1^{(0)} = (2C_1)/\sqrt{\pi} \int_0^{\bar{z}} e^{-\eta^2} d\eta = C_1 \operatorname{erf} \bar{z}, \quad v_2^{(0)} = 2C_2/\sqrt{\pi} \int_0^z e^{-\eta^2} d\eta = C_2 \operatorname{erf} z \quad (3.13)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Преобразуем эти функции комплексных переменных к действительной переменной ζ , которая связана с z уравнением $z = (1+i)\sqrt{\pi}\zeta/2$.

Тогда, получаем представление решения от действительной переменной ζ через интегралы Френеля

$$\begin{aligned} \operatorname{erf} z &= \operatorname{erf}(1+i)\sqrt{\pi}\zeta/2 = (1+i)[C(\zeta) - iS(\zeta)] \\ \operatorname{erf} \bar{z} &= (1-i)[C(\zeta) + iS(\zeta)], \quad \zeta = \frac{1+\beta}{\sqrt{2\pi}t\gamma} \\ C(\zeta) &= \int_0^\zeta \cos \frac{\pi\eta^2}{2} d\eta, \quad S(\zeta) = \int_0^\zeta \sin \frac{\pi\eta^2}{2} d\eta \end{aligned} \quad (3.14)$$

Действительное решение уравнения (3.11), удовлетворяющее граничным условиям (3.10), берем в виде суммы решений (3.15)

$$v^{(0)} = C(\operatorname{erf} z + \operatorname{erf} \bar{z}) = C(S(\zeta) + C(\zeta)) \quad (3.15)$$

которое удовлетворяет условию при $\beta = 0$. Из условия при $b \rightarrow \infty$ находим константу C . Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \frac{1}{2} \quad (3.16)$$

находим

$$v^{(0)} = v_0[S(\zeta) + C(\zeta)] \quad (3.17)$$

Решение (3.17), записанное в переменных β, t , показано на фиг. 2 при $t = \text{const}$. Оно осциллирует с затуханием по пространственной переменной β около своего асимптотического значения v_0 . При больших значениях $\beta \gg 1$ это затухание линейное, длина волны уменьшается с ростом β также по линейному закону. Это следует из асимптотического разложения для $C(\zeta)$ и $S(\zeta)$ [10]:

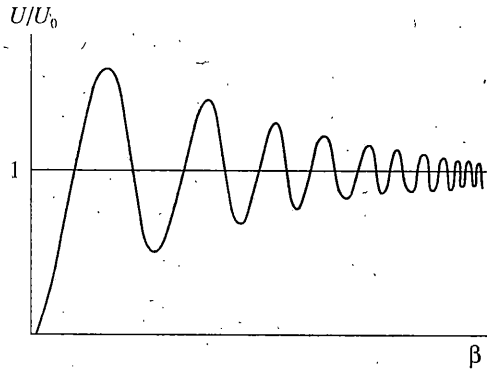
$$\begin{aligned} C(\zeta) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\zeta} \left(\sin \frac{\pi\zeta^2}{2} - \frac{1}{\pi\zeta^2} \cos \frac{\pi\zeta^2}{2} \right) + O(\zeta^{-5}) \\ S(\zeta) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi\zeta} \left(\cos \frac{\pi\zeta^2}{2} + \frac{1}{\pi\zeta^2} \sin \frac{\pi\zeta^2}{2} \right) + O(\zeta^{-5}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

После того как найдены скорость, несложно определить $\varepsilon^{(0)}$ с помощью уравнения совместности полей скоростей и деформаций

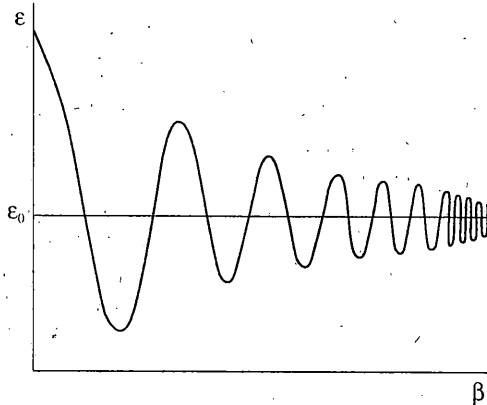
$$\frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial v^{(0)}}{\partial \beta} = \frac{v_0}{\gamma\sqrt{2\pi}t} \left(\sin \frac{\pi\zeta^2}{2} + \cos \frac{\pi\zeta^2}{2} \right)$$

Интегрирование дает следующее выражение для деформации

$$\varepsilon^{(0)} - \varepsilon_0 = \gamma^2 v_0 \beta \left[\frac{1}{\pi\zeta} \left(\sin \frac{\pi\zeta^2}{2} + \cos \frac{\pi\zeta^2}{2} \right) + C(\zeta) - S(\zeta) \right] \quad (3.19)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Используя асимптотические формулы (3.18), находим при больших значениях $\zeta \gg 1$:

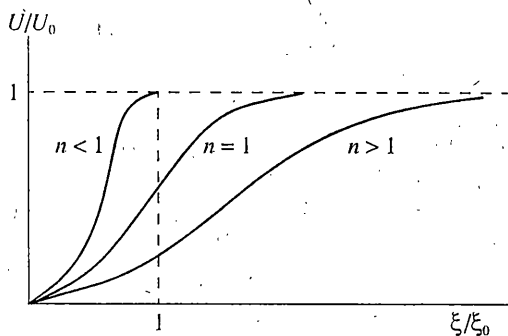
$$\varepsilon^{(0)} - \varepsilon_0 = v_0 \sqrt{\frac{8t^3}{\pi}} \frac{\gamma}{\beta^2} \left(\cos \frac{\pi \zeta^2}{2} + \sin \frac{\pi \zeta^2}{2} \right) (1 + O(\zeta^{-2})) \quad (3.20)$$

Профиль решения для деформации приведен на фиг. 3, где видно, что амплитуда колебаний около начального значения уменьшается, как β^{-2} в соответствии с формулой (3.19)–(3.20). В точке $x = 0$ деформация растет, как $t^{\frac{1}{2}}$:

$$\dot{\varepsilon}^{(0)} - \varepsilon_0 = \frac{v_0}{\gamma} \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \quad (3.21)$$

При $l \rightarrow 0$ зона локализации стягивается в точку $x = 0$, при этом решение (3.15)–(3.20) дает скачок скорости первого рода $[v] = v_0$ и скачок деформации вида дельта-функции $\delta(x)$.

Сравнение результатов публикуемой работы с решением для структуры полос локализации в упруговязкопластическом материале, полученные в работе [3], показывает (фиг. 2 и 4), что для нелокальной модели дисперсионные эффекты преобладают над диссипативными. Это приводит к осциллирующему затухающему решению, как для скорости v , так и для деформации ε , в то время как для упруговязкопластическо-



Фиг. 4

го решения профили гладкие и монотонные экспоненциально затухающие функции, что говорит об обратном соотношении дисперсионного и диссипативного эффектов.

Предельное решение при $l \rightarrow 0$ для разупрочняющегося упругопластического материала для обеих моделей имеет одинаковый характер, а зона локализации стягивается в точку.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 98-01-00957).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баренблатт Г.И., Ишлинский А.Ю. Об ударе вязкопластического стержня о жесткую преграду // ПММ. 1962. Т. 24. Вып. 3. С. 497–503.
2. Кукуджанов В.Н. Распространение упругопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформации // Тр. ВЦ АН СССР. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1967. 48 с.
3. Kukudzhanov V.N. Modelling of the strain softening and localization in dynamic problems. Mechanics of Materials with intrinsic length scale // Proc. of EUROMECH – Mecamat 2nd European mech. of Mater. Conf. Magdeburg. 1998. P. 205–212.
4. Pijaudier-Cabot G., Bazant Z.P. Nonlocal damage theory // J. Eng. Mech. V. 113. 1987. P. 1512–1533.
5. De Borst R., Muhlhaus H.B. Gradient – dependent plasticity: formulation and aglorifmic aspects // Int. J. Num. Mech Eng. V. 35. 1992. P. 521–539.
6. Steinmann P., Stein E. Finite element localization analysis of micropolar strength degrading materials // In Computer modelling of concrete structures. Eds H. Mang, N. Bicanic, De Borst. 1994. P. 435–444.
7. Никитин Л.В. Закритическое поведение разупрочняющегося материала // ДАН. 1995. Т. 342. С. 487–490.
8. Kukudzhanov V.N. Investigation of shock wave structure in elastoviscoplastic bars using the asymptotic method. Arch. Mech. 1981. V. 33. № 5. P. 739–751.
9. Кукуджанов В.Н. Асимптотические решения уточненных уравнений упругих и упругопластических волн в стержнях // Волны в неупругих средах / Под ред. Ю.Н. Работнова. Кишинев: Наука, 1970.
10. Корн Дж.А., Корн Т.М. Справочник по математике // М.: Наука, 1969. 831 с.
11. Bazant Z.P., Belytschko T.B. Wave propagation in strain – softening bar: exact solution // J. Mech. 111, 1985. P. 381–389.
12. Кукуджанов В.Н. Одномерные задачи распространения волн напряжений в стержнях // Сообщения по прикл. мат. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1977. Вып. 7. С. 55.