

УДК 539.3

© 1998 г. А. Г. ГОРШКОВ, Д. В. ТАРЛАКОВСКИЙ

ВЕРТИКАЛЬНЫЙ УДАР АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОЙ СФЕРЫ ИЛИ ЦИЛИНДРА С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПО УПРУГОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

Рассматриваются двумерные (осесимметричная или плоская) нестационарные контактные задачи с подвижными границами для упругого анизотропного полупространства и ударника в виде абсолютно жесткой сферической (или круговой цилиндрической) оболочки с упругим или акустическим наполнителем на сверхзвуковом участке взаимодействия. Для построения разрешающего интегродифференциального уравнения используются результаты работ [1] (определение реакции заполнителя для сферы) и [2, 3] (вычисление результирующей контактной силы). В случае цилиндрического ударника для реакции заполнителя выводится и используется асимптотическая формула.

1. Постановка задачи. В начальный момент времени $\tau = 0$ абсолютно жесткая сферическая (круговая цилиндрическая) оболочка, ограниченная концентрическими поверхностями радиусов r_0 и r_1 ($r_1 < r_0$) и заполненная упругой средой (эту систему далее будем называть "ударником"), касается в точке O (по прямой Ox_2) границы $x_3 = 0$ полупространства $x_3 > 0$ ($Ox_1x_2x_3$ – прямоугольная декартова система координат). До начала взаимодействия ударник движется поступательно перпендикулярно границе полупространства со скоростью V_0 . Положим, что он кроме геометрической обладает и необходимой массовой симметрией. Тогда при соответствующих свойствах заполняющей полупространство среды, о которых будет сказано ниже, и в процессе взаимодействия его движение останется поступательным вдоль оси Ox_3 и будет описываться следующей начальной задачей:

$$m\ddot{h} = R_e + R + R_0, \quad h(0) = 0, \quad \dot{h}(0) = V_0 \quad (1.1)$$

где h – глубина погружения, m – масса (погонная масса) оболочки, R и R_0 – результирующие контактных напряжений (соответствующие погонные усилия), возникающих при взаимодействии внешней поверхности ударника с полупространством и его внутренней поверхности с наполнителем. Здесь и далее точками обозначено дифференцирование по времени τ .

Полупространство предполагается линейно упругим анизотропным и однородным. Его контакт с ударником происходит в условиях свободного проскальзывания или абсолютно жесткого сцепления. Среда, заполняющая полупространство, обладает симметрией, обеспечивающей вертикальное движение ударника [2, 3]: произвольная среда при свободном проскальзывании или среда, для которой Ox_3 – ось симметрии порядка выше второго при жестком сцеплении. На начальном, так называемом "сверхзвуковом", этапе взаимодействия (скорость расширения границы области контакта не меньше максимальной скорости распространения упругих волн вдоль границы полупространства) контактная сила R может быть явно выражена через кинема-

тические параметры ударника и геометрические характеристики области контакта. В случае вертикального движения она имеет вид [2]:

$$R = -\mu S \dot{h} \quad (1.2)$$

Здесь μ – коэффициент, характеризующий свойства среды и условия контакта ($\mu = \mu_{33}^{(1)}$) при свободном проскальзывании контактирующих поверхностей, $\mu = \mu_{33}^{(3)}$ в случае абсолютно жесткого контакта; алгоритм вычисления коэффициентов $\mu_{33}^{(k)}$ указан в [2, 3]; $S = \pi b^2$ для сферы ($S = 2b$ в случае цилиндра) – площадь (погонная площадь) области контакта; $b(\tau)$ – её радиус, который определяется из условия пересечения внешней границы ударника и недеформированной границы полупространства, что возможно для указанного начального этапа взаимодействия (вне области контакта возмущения отсутствуют):

$$b(\tau) = \sqrt{h(2-h)} \quad (1.3)$$

Уравнения движения заполнителя как однородной изотропной линейно упругой среды с учетом осевой (плоской) симметрии задачи запишем относительно скалярно-го ϕ и ненулевой компоненты ψ векторного потенциалов перемещений в сферической (r, θ, ν) системе координат для сферической оболочки

$$\begin{aligned} \gamma_0^2 \ddot{\phi} &= \Delta \phi, \quad \eta_0^2 \ddot{\psi} = \Delta \psi - \frac{\psi}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (0 \leq r \leq r_1) \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

и в цилиндрической (r, θ, x_2) системе координат для варианта цилиндрического ударника

$$\begin{aligned} \gamma_0^2 \ddot{\phi} &= \Delta \phi, \quad \eta_0^2 \ddot{\psi} = \Delta \psi \quad (0 \leq r \leq r_1) \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

В обоих случаях начало систем координат совпадает с центром оболочки, а угол θ отсчитывается от положительного направления оси Ox_3 . Нормальное u и тангенциальное v перемещения, физические компоненты σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ тензора напряжений и потенциалы ϕ , ψ связаны между собой известными соотношениями теории упругости.

Граничные условия для заполнителя представим в обобщенном виде:

$$u|_{r=r_1} = h \cos \theta, \quad \sigma_{r\theta}|_{r=r_1} = k_0 (v|_{r=r_1} + h \sin \theta); \quad \phi, \psi = O(1), \quad r \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

где значение коэффициента $k_0 = 0$ соответствует свободному проскальзыванию границ заполнителя и оболочки, а $k_0 = \infty$ – их абсолютно жесткому сцеплению.

Начальные условия для заполнителя имеют следующий вид:

$$u|_{\tau=0} = v|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{u}|_{\tau=0} = V_0 \cos \theta, \quad \dot{v}|_{\tau=0} = -V_0 \sin \theta \quad (1.7)$$

Как следует из связи перемещений и потенциалов, последние могут быть переформулированы так

$$\phi|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{\phi}|_{\tau=0} = V_0 r \cos \theta \quad (1.8)$$

Для замыкания поставленной задачи (1.1)–(1.3), (1.4) (или (1.5)), (1.6) и (1.8) необходимо иметь выражение для контактной силы R_0 , которое в соответствующих системах координат может быть записано в следующей форме:

$$R_0 = \int_{\Omega} (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) |_{r=r_1} dS \quad (1.9)$$

где интеграл является двойным по кругу Ω радиуса $b(\tau)$ в случае сферического ударника, $dS = dx_1 dx_2$ (определенным по отрезку $\Omega = [-b(\tau), b(\tau)]$ для цилиндра, $dS = dx_1$).

Все использованные выше величины являются безразмерными. При этом в качестве единиц измерения выбираются следующие: длина – r_0 , масса – ρr_0^3 , время – r_0/c , где ρ и c – плотность материала полупространства и максимальная скорость распространения волн вдоль его границы. Безразмерные коэффициенты, использованные в (1.4), (1.5) и далее, определяются так

$$\gamma_0 = c/c_1, \quad \eta_0 = c/c_2, \quad \beta = (\lambda_0 + 2\mu_0)/(\rho c^2), \quad \kappa = \lambda_0/(\lambda_0 + 2\mu_0) \quad (1.10)$$

где λ_0 и μ_0 – упругие постоянные Ламе, а c_1 и c_2 – скорости распространения волн растяжения – сжатия и формоизменения в заполнителе.

2. Реакция заполнителя в случае сферической оболочки. Задачу (1.5), (1.6), (1.8) сведем к задаче с однородными начальными условиями. Для этого представим искомые функции следующим образом:

$$\varphi = \varphi_* + V_0 r \tau \cos \theta, \quad \psi = \psi_* \quad (2.1)$$

$$u = u_* + V_0 \tau \cos \theta, \quad v = v_* - V_0 \tau \sin \theta, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^*$$

Потенциалы φ_* , ψ_* , очевидно, удовлетворяют уравнениям (1.5), граничным условиям (1.6) с заменой h на $h_1 = h - V_0 \tau$, нулевым начальным условиям и по-прежнему связаны с перемещениями u_* , v_* и напряжениями $\sigma_{\alpha\beta}^*$ соответствующими формулами теории упругости.

Данная задача совпадает с точностью до обозначений и замены внутреннего радиуса, равного 1, на r_1 с приведенной в [1]. Здесь с помощью разложения в ряды по полиномам Лежандра; преобразования Лапласа по времени (индекс L обозначает трансформанту, параметр преобразования – s) и метода “обобщенных сферических волн” найдено точное выражение для реакции R_0 для произвольных и начальных ($\tau < 2\gamma_0 r_1$) моментов времени. В рассматриваемой контактной задаче достаточно ограничиться последним вариантом:

$$R_0^L(s) = \frac{m_3 Q(s)}{r_1^2 P(s)} h_1^L(s), \quad m_3 = \frac{4}{3} \pi \beta \gamma_0^2 r_1^3$$

$$Q(s) = k_0 r_1 \eta_0^2 Q_1(s) + \beta \gamma_0^2 Q_2(s), \quad P(s) = k_0 r_1 \eta_0^2 P_1(s) + \beta \gamma_0^2 P_2(s)$$

$$Q_k(s) = H_k(r_1 s, -\gamma_0, -\eta_0), \quad P_k(s) = G_k(r_1 s, -\gamma_0, -\eta_0) \quad (k = 1, 2) \quad (2.2)$$

$$H_1(s, \alpha, \beta) = R_{10}(\alpha s) R_{20}(\beta s) + 2R_{10}(\beta s) R_{20}(\alpha s) =$$

$$= \alpha \beta (2\alpha + \beta) s^3 + (2\alpha^2 + 9\alpha\beta + \beta^2) s^2 + 9(\alpha + \beta) s + 9$$

$$H_2(s, \alpha, \beta) = R_{10}(\alpha s) R_{12}(\beta s) + 4R_{10}(\beta s) R_{20}(\alpha s) =$$

$$= \alpha \beta^3 s^4 + \beta (4\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2) s^3 + (4\alpha^2 + 18\alpha\beta + 3\beta^2) s^2 + 18(\alpha + \beta) s + 18$$

$$G_2(s, \alpha, \beta) = \alpha^2 \beta^3 s^3 + \alpha \beta^2 (3\alpha + 2\beta) s^2 + 2\beta (\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2) s + 2(\alpha^2 + 3\beta^2) \quad (2.3)$$

$$G_1(s, \alpha, \beta) = \alpha^2 \beta^2 s^2 + \alpha \beta (\alpha + 2\beta) s + \alpha^2 + 2\beta^2, \quad R_{10}(z) = z + 1$$

$$R_{11}(z) = z^2 + 2z + 2, \quad R_{12}(z) = z^3 + 3z^2 + 6z + 6, \quad R_{20}(z) = R_{11}(z) + R_{10}(z)$$

где m_3 – безразмерная масса заполнителя.

В рациональной функции, входящей в формулу (2.2), степень числителя больше степени знаменателя. Поэтому выделим соответствующую сингулярную составляющую

$$R_0^L(s) = -m_3 \operatorname{sh}_1^L(s) (\varepsilon + \chi^L(s))$$

$$\varepsilon = -\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Q(s)}{sr_1^2 P(s)}, \quad \chi^L(s) = -\frac{Q(s)}{sr_1^2 P(s)} - \varepsilon \quad (2.4)$$

Тогда с учетом свойств преобразования Лапласа оригинал реакции заполнителя может быть записан следующим образом:

$$R_0(\tau) = -m_3 \left[\varepsilon h_1 + \frac{\partial}{\partial \tau} (h_1 * \chi) \right] \quad (2.5)$$

Из формул (2.3) и (2.4) следуют выражения для коэффициента ε и функции $\chi^L(s)$ для двух предельных случаев контакта заполнителя и оболочки:

абсолютно жесткое сцепление ($k_0 = \infty$):

$$\varepsilon = \frac{1}{r_1} \left(\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\eta_0} \right), \quad \chi^L(s) = -\frac{Q_1(s)}{sr_1^2 P_1(s)} - \varepsilon = \frac{T_1(s)}{sr_1^2 P_1(s)} \quad (2.6)$$

$$T_1(s) = -\eta_0 (4\gamma_0 - \eta_0) r_1^2 s^2 + (8\gamma_0 + 5\eta_0 - 2\gamma_0^2/\eta_0 - 2\eta_0^2/\gamma_0) r_1 s - 9$$

свободное проскальзывание ($k_0 = 0$):

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma_0 r_1}, \quad \chi^L(s) = -\frac{Q_2(s)}{sr_1^2 P_2(s)} - \varepsilon = \frac{T_2(s)}{sr_1^2 P_2(s)} \quad (2.7)$$

$$T_2(s) = -\eta_0 (4\gamma_0^2 - \eta_0^2) r_1^3 s^3 + (4\gamma_0^2 + 16\gamma_0 \eta_0 - 3\gamma_0^2 - 2\eta_0^3/\gamma_0) r_1^2 s^2 + 2(8\gamma_0 + 9\eta_0 - 3\eta_0^2/\gamma_0) r_1 s - 9$$

Из последних формул с помощью предельного перехода при $\eta_0 \rightarrow \infty$ может быть получен соответствующий результат для *акустического заполнителя* [1]:

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma_0 r_1}, \quad \chi^L(s) = \frac{\gamma_0 r_1 s - 2}{\gamma_0 r_1 R_{11}(-\gamma_0 r_1 s)} \quad (2.8)$$

Оригинал функции $\chi^L(s)$ может быть вычислен точно с помощью теоремы разложения. При этом можно показать, что действительные части особых точек функции $\chi^L(s)$ положительны (в вариантах (2.6) и (2.8) это проверяется непосредственно, так как нули знаменателя находятся явно), что характерно для внутренних задач.

3. Цилиндрическая оболочка. В этом случае также проведем замену (2.1) и, учитывая симметрию задачи, представим искомые функции φ_* , u_* , σ_{rr} в виде рядов Фурье по $\cos n\theta$, а Ψ_* , v_* , $\sigma_{r\theta}$ – по $\sin n\theta$ соответственно с коэффициентами $\varphi_n(r, \tau)$, $u_n(r, \tau)$, $\sigma_{rr}(r, \tau)$, $\Psi_n(r, \tau)$, $v_n(r, \tau)$, $\sigma_{r\theta}(r, \tau)$. Подставляя эти ряды в формулу (1.9) и учитывая

ортогональность системы тригонометрических функций, получим, что реакция заполнителя зависит только от коэффициентов разложений с индексом $n = 1$:

$$R_0 = - \int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) \Big|_{r=r_1} r_1 d\theta = -\pi r_1 (\sigma_{rr1} - \sigma_{r\theta 1}) \Big|_{r=r_1} \quad (3.1)$$

При этом коэффициенты рядов с номером $n = 1$ связаны между собой так

$$u_1 = \partial \varphi_1 / \partial r + \psi_1 / r, \quad v_1 = -\varphi_1 / r - \partial \psi_1 / \partial r$$

$$\sigma_{rr1} = \beta \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + \kappa \frac{u_1 + v_1}{r} \right), \quad \sigma_{r\theta 1} = \beta \frac{\gamma_0^2}{\eta_0^2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial r} - \kappa \frac{u_1 + v_1}{r} \right) \quad (3.2)$$

и, согласно (1.5) и (1.6), удовлетворяют следующей начально-краевой задаче:

$$\gamma_0^2 \ddot{\varphi}_1 = \Delta_1 \varphi_1, \quad \eta_0^2 \ddot{\psi}_1 = \Delta_1 \psi_1, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}$$

$$u_1 \Big|_{r=r_1} = h_1, \quad \sigma_{r\theta 1} \Big|_{r=r_1} = k_0 (v_1 \Big|_{r=r_1} + h_1); \quad \varphi_1, \psi_1 = O(1), \quad r \rightarrow 0$$

$$\varphi_1 \Big|_{\tau=0} = \psi_1 \Big|_{\tau=0} = \dot{\varphi}_1 \Big|_{\tau=0} = \dot{\psi}_1 \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (3.3)$$

Решая ее в пространстве преобразований Лапласа и учитывая (3.1), получим, что изображение реакции и в этом варианте ударника можно представить в виде (2.2), где $m_3 = \pi \beta \gamma_0^2 r_1^2$, а функции $Q(s)$ и $P(s)$ по-прежнему связаны с $Q_k(s)$ и $P_k(s)$ ($k = 1, 2$) первыми двумя формулами из (2.3). Однако функции $Q_k(s)$ и $P_k(s)$ имеют более сложный вид и выражаются через модифицированные функции Бесселя $I_n(z)$:

$$Q_1(s) = r_1^2 s^2 [4I_1(\xi_0)I_1(\zeta_0) - \xi_0 I_0(\xi_0)I_1(\zeta_0) - \zeta_0 I_0(\zeta_0)I_1(\xi_0)]$$

$$Q_2(s) = 2Q_1(s) + r_1^2 s^2 \zeta_0^2 I_1(\zeta_0)I_1(\xi_0), \quad \xi_0 = \gamma_0 r_1 s, \quad \zeta_0 = \eta_0 r_1 s$$

$$P_1(s) = \xi_0 \zeta_0 I_0(\xi_0)I_0(\zeta_0) - \xi_0 I_0(\xi_0)I_1(\zeta_0) - \zeta_0 I_0(\zeta_0)I_1(\xi_0)$$

$$P_2(s) = 2R_1(s) - \zeta_0^2 I_1(\zeta_0) [\xi_0 I_0(\xi_0) - I_1(\xi_0)] \quad (3.4)$$

Прежде, чем приводить формулу (3.3) к виду (2.4), решим вопрос об определении оригинала реакции. Найти его точно не представляется возможным. Поэтому ограничимся построением приближенных формул, справедливых при $\tau \rightarrow 0$ ($s \rightarrow \infty$), что в силу сделанного выше замечания оправдано для рассматриваемой контактной задачи. Для этого воспользуемся асимптотическим разложением модифицированной функции Бесселя [4]:

$$I_n(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left[\sum_{j=0}^3 \frac{b_{nj}}{z^j} + o\left(\frac{1}{z^3}\right) \right] \quad \left(z \rightarrow \infty, \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{2} \right) \quad (3.5)$$

$$b_{00} = b_{10} = 1, \quad b_{01} = 1/8, \quad b_{11} = -3/8, \quad b_{02} = 9/128, \quad b_{12} = -15/128$$

$$b_{03} = 75/1024, \quad b_{13} = -105/1024$$

Теперь, учитывая (3.5), для функций $P_1(s)$, $P_2(s)$, $Q_1(s)$ и $Q_2(s)$ в (2.12) получим асимптотические представления при $s \rightarrow \infty$ с точностью до s^{-3} (остаточный член здесь и далее опущен):

$$P_1(s) = E(s) \gamma_0 \eta_0^2 r_1^2 s^2 \sum_{j=0}^3 \frac{c_{1j}}{(r_1 s)^j}, \quad P_2(s) = -E(s) \gamma_0 \eta_0^2 r_1^2 s^3 \sum_{j=0}^3 \frac{c_{2j}}{(r_1 s)^j}$$

$$Q_1(s) = -E(s)(\gamma_0 + \eta_0)r_1^3 s^3 \sum_{j=0}^3 \frac{d_{1j}}{(r_1 s)^j}, \quad Q_2(s) = E(s)\eta_0^2 r_1^4 s^4 \sum_{j=0}^3 \frac{d_{2j}}{(r_1 s)^j} \quad (3.6)$$

$$E(s) = e^{\xi_0 + \zeta_0} / (2\pi \sqrt{\xi_0 \zeta_0})$$

$$c_{11} = -\frac{7}{8} \left(\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\eta_0} \right), \quad c_{12} = -\frac{15}{64} \frac{1}{\gamma_0 \eta_0} + \frac{57}{128} \left(\frac{1}{\gamma_0^2} + \frac{1}{\eta_0^2} \right), \quad c_{21} = -\frac{7}{8} \frac{1}{\gamma_0} - \frac{19}{8} \frac{1}{\eta_0}$$

$$c_{13} = -\frac{15}{1024} \frac{1}{\gamma_0 \eta_0} \left(\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\eta_0} \right) + \frac{195}{1024} \left(\frac{1}{\gamma_0^3} + \frac{1}{\eta_0^3} \right), \quad c_{22} = \frac{57}{128} \frac{1}{\gamma_0^2} + \frac{219}{128} \frac{1}{\eta_0^2} + \frac{133}{64} \frac{1}{\gamma_0 \eta_0}$$

$$c_{23} = \frac{195}{1024} \frac{1}{\gamma_0^3} - \frac{1017}{1024} \frac{1}{\eta_0^3} - \frac{1083}{1024} \frac{1}{\gamma_0^2 \eta_0} + \frac{585}{1024} \frac{1}{\gamma_0 \eta_0^2}$$

$$d_{11} = -\frac{1}{\gamma_0 + \eta_0} \left[\frac{23}{4} + \frac{3}{8} \left(\frac{\gamma_0}{\eta_0} + \frac{\eta_0}{\gamma_0} \right) \right], \quad d_{12} = \frac{153}{64} \frac{1}{\gamma_0 \eta_0} - \frac{15}{128} \left(\frac{1}{\gamma_0^2} + \frac{1}{\eta_0^2} \right) \quad (3.7)$$

$$d_{13} = \frac{1}{\gamma_0 + \eta_0} \left[-\frac{149}{512} \frac{1}{\gamma_0 \eta_0} + \frac{765}{1024} \left(\frac{1}{\gamma_0^2} + \frac{1}{\eta_0^2} \right) - \frac{105}{1024} \left(\frac{\eta_0}{\gamma_0^3} + \frac{\gamma_0}{\eta_0^3} \right) \right]$$

$$d_{21} = -\frac{3}{8} \frac{1}{\gamma_0} - \frac{19}{8} \frac{1}{\eta_0} - 2 \frac{\gamma_0}{\eta_0^2}, \quad d_{22} = -\frac{15}{128} \frac{1}{\gamma_0^2} + \frac{1457}{512} \frac{1}{\eta_0^2} + \frac{57}{64} \frac{1}{\gamma_0 \eta_0} + \frac{3}{4} \frac{\gamma_0}{\eta_0^3}$$

$$d_{23} = -\frac{105}{1024} \frac{1}{\gamma_0^3} - \frac{4761}{1024} \frac{1}{\eta_0^3} + \frac{285}{1024} \frac{1}{\gamma_0^2 \eta_0} - \frac{4611}{1024} \frac{1}{\gamma_0 \eta_0^2} + \frac{15}{64} \frac{\gamma_0}{\eta_0^4}$$

Подставляя разложения (3.6) в (2.2), и в этом случае придем к формуле (2.4), где следует положить

$$\chi^L(s) = \frac{\varepsilon}{r_1} \sum_{j=r_1}^3 \frac{\alpha_j}{r_1^j s^{j+1}}, \quad \alpha_1 = d_{k1} - c_{k1}, \quad \alpha_2 = d_{k2} - c_{k2} - c_{k1} \alpha_1 \quad (3.8)$$

$$\alpha_3 = d_{k3} - c_{k3} - c_{k1} \alpha_2 - c_{k2} \alpha_1$$

Здесь индекс $k = 1$ соответствует *абсолютно жесткому сцеплению* заполнителя и оболочки ($k_0 = \infty$), а $k = 2$ — *свободному проскальзыванию* ($k_0 = 0$). Коэффициент же ε для этих двух случаев контакта имеет вид

$$\varepsilon = \frac{1}{r_1} \left(\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\eta_0} \right) \quad (k_0 = \infty), \quad \varepsilon = \frac{1}{\gamma_0 r_1} \quad (k_0 = 0) \quad (3.9)$$

Из сравнения последних формул с (2.6) и (2.7) видно, что отличие от варианта ударника в виде сферической оболочки имеет место при жестком сцеплении, что можно объяснить различным влиянием сдвиговых напряжений в плоской и пространственной задачах.

Выполняя аналогично (2.8) предельный переход при $\eta_0 \rightarrow \infty$, найдем, что для акустического заполнителя по-прежнему остается справедливой формула (3.8), в которой необходимо положить

$$\begin{aligned} c_{11} = c_{21} &= \frac{7}{8\gamma_0}, & c_{12} = c_{22} &= \frac{57}{128\gamma_0^2}, & c_{13} = c_{23} &= \frac{195}{1024\gamma_0^3} \\ d_{11} = d_{21} &= \frac{3}{8\gamma_0}, & d_{12} = d_{22} &= \frac{15}{128\gamma_0^2}, & d_{13} = d_{23} &= \frac{105}{1024\gamma_0^3} \\ \varepsilon &= \frac{1}{\gamma_0 r_1}, & \alpha_1 &= \frac{1}{2\gamma_0}, & \alpha_2 &= -\frac{1}{8\gamma_0^2}, & \alpha_3 &= \frac{5}{8\gamma_0^3} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для оригинала реакции заполнителя остается в силе выражение (2.5), где в соответствии с (3.8) функция $\chi(\tau)$ имеет следующий вид (остаточный член $o(\tau^2)$ ее разложения при $\tau \rightarrow 0$ отброшен):

$$\chi(\tau) = \frac{\varepsilon}{r_1} \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{r_1} \tau + \frac{\alpha_3}{2r_1^2} \tau^2 \right) H(\tau) \quad (3.11)$$

Отметим, что нет принципиальных трудностей для построения формулы (3.11) с учетом любого числа членов разложений. Однако, как показывают расчеты, для рассматриваемых контактных задач вполне достаточно ограничиться этим выражением.

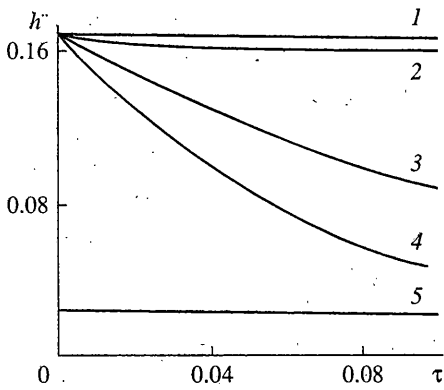
4. Определение кинематических параметров ударника. Подставляя (1.2) и (2.5) в уравнение в (1.1) и учитывая формулы (2.4) (или (3.11)), получим начальную задачу для обыкновенного интегродифференциального относительно глубины погружения $h(\tau)$. Для расчетов удобно понизить порядок этого уравнения с помощью однократного интегрирования и привести его к следующему виду:

$$\dot{h} = -F_1(h) - \frac{m_3}{m} \left[\varepsilon h_1(\tau) + \int_0^\tau h_1(t) \chi(\tau - t) dt \right] + F_0(\tau) + V_0, \quad h(0) = 0 \quad (4.1)$$

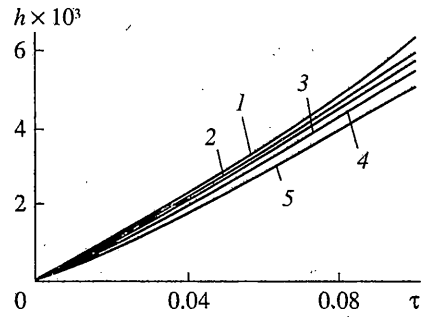
$$F_0(\tau) = \frac{1}{m} \int_0^\tau R_e(t) dt, \quad F_1(h) = \frac{\mu}{m} \int_0^h S(h) dh \quad (4.2)$$

Для решения задачи (4.1) может быть использован какой-либо численный метод интегрирования задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. При этом интегралы в правой части должны вычисляться с помощью той или иной квадратурной формулы (при задании внешней силы $R_e(\tau)$ в явном виде функция $F_0(\tau)$, как правило, находится аналитически).

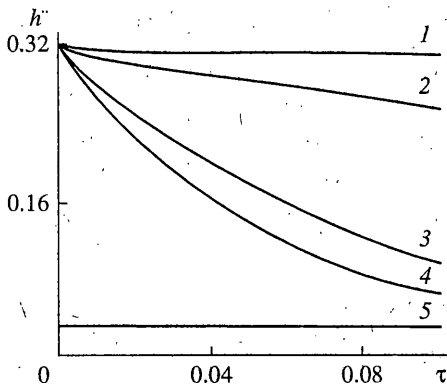
В рассмотренных ниже примерах использовались метод Рунге – Кутты и квадратурная формула трапеций. Полагалось, что материал полупространства – сталь (изотропная среда, $\mu = 1$), контакт внешней поверхности оболочки происходит в условиях свободного проскальзывания, внутренний радиус оболочки $r_1 = 0.95$, начальная скорость $V_0 = 0.05$, внешняя сила $R_e = p_0 H(\tau)$, где $p_0 = 0.1$, а $H(\tau)$ – единичная функций Хевисайда. Результаты расчетов приведены на фиг. 1, 2 (сфера) и 3, 4 (цилиндр). Кривые 1–4 на этих графиках построены при $m = 0.59743$ для сферы и $m = 0.30631$ для цилиндра и демонстрируют влияние заполнителя: 1 – пустая оболочка ($m_3 = 0$); 2 – заполнитель – вода ($\gamma_0 = 4.015$, $\eta_0 = \infty$; $m_3 = 0.45969$ для сферы и $m_3 = 0.36292$ для цилиндра); 3 и 4 – заполнитель – сталь ($\gamma_0 = 1$, $\eta_0 = 1.871$; $m_3 = 3.59136$ для сферы и $m_3 = 2.83528$ для цилиндра), а также способа контакта заполнителя с оболочкой: 1–3 соответствуют свободному проскальзыванию ($k_0 = 0$), а 4 – абсолютно жесткому сцеплению ($k_0 = \infty$). Кривые 5 получены для недеформируемого ударника ($R_0 = 0$) с сум-



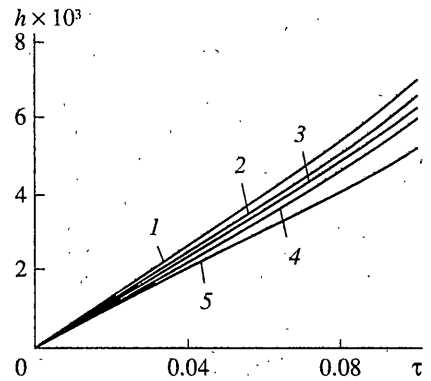
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

марной массой, соответствующей вариантам 3, 4 ($m = 4.18879$ для сферы и $m = 3.14159$ для цилиндра).

Отметим, что, как видно из графиков, учет влияния подвижности заполнителя существенно сказывается на характеристиках ударника. Причем это влияние качественно имеет одинаковый характер как в осесимметричной, так и в плоской задачах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-01083).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. М.: Наука, 1990. 264 с.
2. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука, 1995. 352 с.
3. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Результирующие реакции в нестационарной контактной для упругого анизотропного полупространства // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 799–809.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. С. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.