МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1998

УДК 539.3:534.1

© 1998 г. **В. А. ПОСТНОВ**

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЧАСТИЧНОЙ ПРОБЛЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В МЕХАНИКЕ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕОРЕМЫ РАУСА

Рассмотрены методы определения собственных значений в задачах механики, основанные на использовании теоремы Рауса о влиянии изменений жесткостных параметров системы на ее спектр собственных значений. Обсуждаются вопросы их применения к решению задач устойчивости и колебаний механических систем, к решению частичной проблемы собственных значений в гидромеханике и гидроупругости. Рассмотрены дискретные и континуальные упругие системы. Изложенные методы позволяют выделить из спектра любое интересующее нас собственное число и найти его значение с точностью до погрешности вычислений.

1. Введение. С позиций чисто алгебраических методы определения собственных значений (чисел) и соответствующих им собственных функций в задачах механики можно условно разбить на две основные группы. К первой из них относятся методы, так или иначе преобразующие матрицу исходного характеристического определителя к виду, который упрощает его развертывание в степенной многочлен для последующего определения его корней; либо с целью преобразования матрицы к треугольному виду, где искомые собственные числа располагаются на главной диагонали.

Методы этой группы позволяют сразу определить весь спектр собственных значений. К сожалению, они достаточно устойчивы лишь для матриц невысокого порядка и практически не пригодны для расчета достаточно сложных механических систем. Подробный анализ слабых и сильных их сторон можно найти в монографиях [1–6].

На практике часто требуется знать лишь минимальное или максимальное по модулю собственное число, либо определить собственные числа, расположенные в заданном интервале. Наконец, при приближенном динамическом анализе поведения сложной механической системы, как правило, оказывается достаточным располагать лишь начальным участком спектра собственных значений. Использование для этих задач методов первой группы приводит к получению заведомо избыточной информации, а, главное, к неоправданно большому объему вычислений. Поэтому для решения этой частичной проблемы собственных значений используется ряд специальных методов. В частности, очень эффективными оказываются алгоритмы, позволяющие найти местоположение в спектре собственных чисел априорно заданного числа λ_0. Общая для всех таких алгоритмов идея восходит к свойствам последовательности Штурма (1829 г.) о чередовании знаков главных миноров матрицы характеристического определителя. В дальнейшем результаты Штурма неоднократно дополнялись и обобщались. Наиболее законченный вид эта теория приобрела в работах Ф.Р. Гантмахера и М.Г. Крейна, где были изложены математические предпосылки современных методов отделения корней характеристических определителей [7].

По существу эти методы решения частичной проблемы собственных значений тесно связаны с теоремой Рауса о влиянии изменения жесткостных параметров системы на спектр ее собственных чисел [8]. Одной из первых в этом направлении явилась работа Я.Л. Нудельмана, базирующаяся на алгоритме последовательного освобождения имеющихся у стержневой системы связей [9]. Алгоритм Я.Л. Нудельмана по определению местоположения заданного числа λ_0 в спектре собственных значений может быть ориентирован не только на использование при расчете стержневой системы метода сил [1], но и на смешенный метод путем комбинирования последовательных наложений и снятия имеющихся у системы связей. Эти идеи были затем развиты в монографиях Р.В. Матевосяна [10] и Л.С. Ляховича [11].

С теоремой Рауса также тесно связан метод определения собственных чисел в задачах устойчивости и колебаний, предложенный в [12–14].

В [15–17] для определения местоположения выбранного вещественного числа λ_0 в спектре собственных значений использовалась последовательность Штурма. Следует однако заметить, что это возможно, если в качестве основных неизвестных принимались обобщенные перемещения. В общем же случае, когда в число неизвестных входят как перемещения, так и усилия, необходимо использование зависимостей теоремы Рауса о влиянии на спектр системы изменений ее жесткостных параметров.

Согласно теоремы Рауса наложение на рассматриваемую консервативную систему дополнительной кинематической связи приводит к следующей зависимости:

$$\lambda_i \le \mu_i \le \lambda_{i+1} \tag{1.1}$$

где λ_i – собственное значение исходной консервативной системы, μ_i – то же для модифицированной системы.

Если же у системы удаляется одна из имеющихся кинематических связей, то вместо зависимости (1.1) получим

$$\lambda_i \le \mu_{i+1} \le \lambda_{i+1} \tag{1.2}$$

Именно зависимости (1.1) и (1.2) и явились базой для построения алгоритмов определения местоположения числа s_0 в спектре собственных значений самых разнообразных механических систем [9–14, 18, 19].

Следует также подчеркнуть, что излагаемые ниже методы решения частичной проблемы собственных значений, в силу отсутствия в них операций обращения матриц, имеют дополнительное преимущество перед прямыми методами при работе со слабо обусловленными матрицами.

Наконец, излагаемые методы позволяют выделить вещественные собственные значения во всем диапазоне вещественных числе $[-\infty < \lambda < +\infty]$.

2. Консервативная система с *n* степенями свободы. Приведем те результаты работы [12], которые понадобятся в дальнейшем.

2.1. Уравнение свободных колебаний системы S_n с n степенями свободы имеет вид

$$M\ddot{q}(t) + K_E q(t) = 0 \tag{2.1}$$

где $M = M^T > 0$ – положительно определенная матрица масс, $K = K_E^T$ – матрица упругой жесткости системы, $q(t)$ – вектор обобщенных координат.

Решение уравнения (2.1) ищем в виде

$$q(t) = qe^{i\lambda t} \tag{2.2}$$

Тогда частотное уравнение для системы S_n примет вид

$$\Delta_n(\lambda) = |K_E - \lambda^2 M| = 0 \tag{2.3}$$

Аналогичную форму будет иметь характеристическое уравнение статической устойчивости упругой системы с n степенями свободы:

$$\Delta_n(\lambda) = |K_E - \hat{\lambda} K_G| = 0 \tag{2.4}$$

где K_G – геометрическая матрица жесткости, а $\hat{\lambda}$ – параметр внешней нагрузки.

Структуру подобную уравнению (2.3) имеет и характеристическое уравнение свободных колебаний системы при наличии начального напряженного состояния

$$\Delta_n(\lambda) = \left|K_E - \hat{\lambda}K_G - \lambda^2 M\right| = 0 \qquad (2.5)$$

Параметр $\hat{\lambda}$ в (2.5) полагается заданным.

Таким образом, характеристические уравнения для определения собственных частот свободных колебаний и определения критического значения параметра внешней нагрузки в задачах устойчивости идентичны и могут быть представлены в виде

$$\Delta_n(s) = |D| = |B - sA| = 0 \qquad (2.6)$$

Здесь s – собственное значение, подлежащее определению. В силу симметричности матриц A и B все собственные числа уравнения (2.6) и соответствующие им векторы будут вещественными величинами.

Полагая в (2.6) параметр s равным некоторому действительному числу s_0, получим числовой определитель $\Delta_n(s_0)$, который после преобразования с помощью метода Гаусса к треугольному виду (для определенности – правому виду) примет вид

$$\Delta_n(s_0) = \begin{vmatrix} d_{11}^* & d_{12}^* & \cdot & d_{1n}^* \\ 0 & d_{22}^* & \cdot & d_{2n}^* \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn}^* \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{i=n} d_{ii}^*(s_0) \qquad (2.7)$$

Введем в рассмотрение главные миноры определителя (2.7):

$$\Delta_p(s_0) = \prod_{i=1}^{i=p} d_{ii}^*(s_0) \quad (p = \overline{1, n})$$

Тогда $d_{pp}^* = \Delta_p(s_0)/\Delta_{p-1}(s_0)$. Откуда следует, что случайная близость s_0 к одному из корней матриц миноров $\Delta_{p-1}(s)$ и $\Delta_p(s)$ может привести к неустойчивой процедуре счета. В этом случае можно рекомендовать сделать перестановку данной строки матрицы определителя с последующей, а после окончания преобразования к треугольному виду произвести обратную перестановку тех же строк. Теперь, если l – число перемен знака в последовательности чисел $\Delta_p(s_0)$ $(p = 0, 1, \ldots, n)$ при $\Delta_0(s_0) = 1$, или, что тоже самое, число отрицательных элементов в ряду $d_{jj}^*(s_0)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то местоположение числа s_0 в спектре собственных чисел s_i^n $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы S_n определится зависимостью

$$s_l^n < s_0 < s_{l+1}^n \qquad (2.8)$$

Зависимость (2.8), как и все последующие аналогичные зависимости, будут справедливы при обеспечении условия $\Delta_p(s = -\infty)$ $(p = \overline{1, n})$. Этого всегда можно достигнуть путем умножения соответствующих строк матрицы определителя (2.6) на (-1).

2.2. Для системы с бесконечным числом степеней свободы s_0 сдвигается в спектре, и вместо зависимости (2.8) получим

$$s_{l+k}^n < s_0 < s_{l+k+1}^n \qquad (2.9)$$

где k – число собственных частот, по величине меньших s_0, модифицированной системы, получаемой из исходной наложением на ее обобщенные перемещения n жестких связей $q_i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Поясним использование формулы (2.9) на примере расчета свободных колебаний весомой балки, лежащей на независимых упругих опорах. Пусть за основные обобщенные неизвестные выбраны линейные и угловые перемещения узловых сечений балки. Для их определения составляются уравнения равновесия узловых точек. Элементы получаемой при этом матрицы характеристического определителя будут трансцендентными функциями s. Местоположение s_0 в спектре собственных частот определится зависимостью (2.9), где i, как и прежде, равно числу отрицательных элементов в ряду $d_{ii}^*(s_0)$ $(i = \overline{1, n})$, а k есть число собственных чисел, по величине меньших s_0, модифицированной системы, получаемой из исходной, если положить $q_i = 0$ $(i = \overline{1, n})$. В результате получаем систему, состоящую из нескольких (по числу пролетов неразрезной балки) независимых жестко заделанных по торцевым сечениям балок. Для каждой из этих балок подсчитывается число собственных значений, меньших s_0, и их суммарное количество будет равно искомому числу k.

2.3. Обратимся теперь к случаю, когда при решении задач о свободных колебаниях или устойчивости упругих систем используется смешанный метод, т.е. в числе основных неизвестных присутствуют как перемещения, так и усилия. Пусть в число неизвестных входят r обобщенных перемещений $(q_1, q_2, \ldots, q_r)$ и $p = n - r$ обобщенных усилий $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_l)$. Для неразрезной балки на независимых упругих опорах это могут быть соответственно узловые поперечные перемещения и узловые внутренние моменты. Для их определения составляются r уравнений равновесия и p уравнений совместности деформаций. Характеристическое уравнение, преобразованное с помощью метода Гаусса к треугольному виду, может быть записано в виде

$$\Delta_n(s_0) = \begin{vmatrix} d_{ij}^* \neq 0 \\ 0 \quad e_{ij}^* \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

Пусть для определенности первые r $(0 < r < n)$ строк (d_{ij}^*) детерминанта (2.10) соответствуют уравнениям равновесия остальные (e_{ij}^*) – уравнениям совместности деформаций. Тогда для определения местоположения произвольного числа s_0 в спектре собственных значений рассматриваемой системы следует воспользоваться следующим неравенством [12]:

$$s_{l+k-t}^n < s_0 < s_{l+k-t+1} \tag{2.11}$$

где l подсчитывается по диагональным элементам d_{ii}^*, t – по элементам e_{ii}^*, k – число собственных чисел, меньших s_0, модифицированной системы, получаемой из исходной путем наложения r жестких связей на перемещения $(q_i = 0$, $i = \overline{1, r})$, и удаления p силовых связей $(Q_i = 0$, $(i = \overline{r+1, n}))$.

Меняя значение s_0, образуем "вилку", внутри которой находится искомое собственное число с заданным номером. В результате можно получить двухстороннюю оценку любого собственного числа с требуемой погрешностью (в пределах погрешности вычислений).

3. Метод отделения собственных чисел при расчете инженерных сооружений методом суперэлементов. В соответствии с методом суперэлементов [20] расчетная схема для сложных конструкций строится не сразу, а в несколько этапов – уровней. Описание базисных конечных элементов производится на самом нижнем – первом уровне. Все сооружение представляет собой совокупность иерархически соподчиненных подконструкций (подструктур) различных уровней. Основная идея расчета конструкции по этому методу заключается в определении вектора узловых неизвестных в виде суммы двух составляющих: вектора узловых неизвестных подструктуры, вызванного нагрузками, которые приложены ко внутренним узлам при нулевых значениях неизвестных граничных узлов и вектора узловых неизвестных подструктуры, вызванного перемещениями и усилиями во внешних узлах при нулевых нагрузках на внутренние узлы.

Такое разложение искомого вектора позволяет независимо рассматривать два состояния: первое из которых характеризует внутренние свойства изолированной подструктуры, а второе учитывает ее взаимодействие с остальными подструктурами.

Так как основные этапы реализации метода суперэлементов (МСЭ) – разбиение исходной конструкции на составные подконструкции с последующей их сборкой – можно трактовать как совокупность операций снятия и наложения дополнительных связей, то становится понятной возможность эффективного обобщения изложенного выше метода отделения собственных значений при расчете свободных колебаний и устойчивости сложных инженерных сооружений методом суперэлеметов [14]. Ниже дано обобщение этой работы на случай использования смешанного метода.

Пусть s – число уровней разбиения расчетной модели конструкции (используется терминология [13]). Для подструктур, имеющих одинаковый номер уровня $\alpha\,(\alpha_i\big|_{i=1}^{i=S})$ вводится дополнительная нумерация внутри уровня $(\beta_j\big|_{j=1}^{j=m_\alpha})$. Таким образом, мультиндекс (α, β), $\alpha = \overline{1, S}$; $\beta = \overline{1, \beta_\alpha}$ определяет конкретную подструктуру. Введем далее ряд дополнительных обозначений: $N^{(\alpha,\beta)}$ – множество внутренних узлов подструктуры (α, β), являющихся внешними для тех подструктур $(\alpha - 1)$-го уровня, которые образуют исходную подструктуру (α, β); $M^{(\alpha,\beta)}$ – множество внешних узлов подструктуры; $q_N^{(\alpha,\beta)}$, $q_M^{(\alpha,\beta)}$ – соответствующие этим узлам неизвестные узловые перемещения и $Q_N^{(\alpha,\beta)}$, $Q_M^{(\alpha,\beta)}$ – неизвестные усилия в тех же узлах; $s_i^{(\alpha,\beta)}(r, l)$ – i-ое собственное число подструктуры (α, β) при наложении на нее r дополнительных связей и удалении l имеющихся у подконструкции связей; s_i – i-ое собственное число заданной конструкции.

Рассмотрим исходную конструкцию – подструктуру верхнего уровня S. Составим определитель $\Delta_n(s)$ системы разрешающих уравнений для определения неизвестных в узловых точках $N^{(S)}$ и $M^{(S)}$. Внося сюда $s = s_0$ и преобразуя полученную числовую матрицу к правому треугольному виду, получим матрицу вида (2.10). Тогда согласно зависимости (2.11) получим

$$S_{l^{(s)}+k^{(s)}-t^{(s)}} < S_0 < S_{l^{(s)}+k^{(s)}-t^{(s)}+1} \tag{3.1}$$

где $l^{(S)}$ – число отрицательных чисел среди элементов $d_{ii}^{*(S)}$; $t^{(S)}$ – то же среди $e_{ii}^{*(S)}$; а $k^{(s)}$ – число собственных значений, меньших s_0, модифицированной системы, получаемой из исходной путем наложения $r^{(s)}$ жестких связей на перемещения в узлах $N^{(s)}$ и $M^{(s)}$ ($q_N^{(s)} = q_M^{(s)} = 0$) и освобождения в тех же узловых точках $l^{(s)}$ связей ($Q_N^{(s)} = Q_M^{(s)} = 0$). Очевидно, что $k^{(s)}$ есть сумма собственных чисел, меньших s_0, по всем подструктурам $(s - 1)$-го уровня, вычисленных в предположении, что $q_N^{(s)} = q_M^{(s)} = 0$ и $Q_N^{(s)} = Q_M^{(s)} = 0$. Отсюда следует, что для определения $k^{(s)}$ необходимо предварительно определить местоположение s_0 в спектре собственных чисел каждой из подструктур $(s - 1)$-го уровня при нулевых значениях всех неизвестных во внешних узлах соответствующей подструктуры.

В качестве примера рассмотрим подструктуру $(s-1, \beta_j)$. Для определения неизвестных во внутренних узловых точках подструктуры составляются требуемые уравнения равновесия и уравнения неразрывности деформаций. Далее при $s = s_0$ производится триангуляция матрицы характеристического определителя. На главной диагонали треугольной матрицы получим два ряда чисел: $d_{ii}^{*(s-1,\beta_j)}(s_0)$ и $e_{ii}^{*(s-1,\beta_j)}(s_0)$. По аналогии с формулой (2.11) можем записать

$$s_p^{(s-1,\beta_j)} < s_0 < s_{p+1}^{(s-1,\beta_j)} \tag{3.2}$$

$$p = i^{(s-1,\beta_j)} - t^{(s-1,\beta_j)} + k^{(s-1,\beta_j)} \tag{3.3}$$

где $i^{(s-1,\beta_j)}$ – число отрицательных чисел среди $d_{ii}^{*(s-1,\beta_j)}$, $t^{(s-1,\beta_j)}$ – то же в ряду чисел $e_{ii}^{*(s-1,\beta_j)}$, $k^{(s-1,\beta_j)}$ – число собственных чисел, меньших s_0, модифицированной подструктуры, получаемой из подструктуры $(s-1, \beta_j)$ в предположении, что все неизвестные в узлах $N^{(s-1,\beta_j)}$ и $M^{(s-1,\beta_j)}$ равны нулю. В результате для определения $k^{(s)}$ получаем следующую формулу:

$$k^{(s)} = \sum_{\beta_j=1}^{b_{s-1}} \left(k^{(s-1,\beta_j)} + i^{(s-1,\beta_j)} - t^{(s-1,\beta_j)}\right) \tag{3.4}$$

Итак, от исходной конструкции был сделан переход к рассмотрению подконструкций $(s-1)$-го уровня. От них аналогично переходим к подконструкциям $(s-2)$-го уровня и т.д. вниз по иерархической лестнице. Числа $i^{(\alpha,\beta)}$ и $t^{(\alpha,\beta)}$ подсчитываются непосредственно на каждом шаге, а $k^{(\alpha)}$ определяется по рекуррентной формуле типа (3.3). Изложенная процедура завершается на уровне базисных конечных элементов.

Реализуя описанный алгоритм в обратном порядке, получаем значения $i^{(s)}$, $t^{(s)}$ и $k^{(s)}$. После чего по формуле (3.1) определяется положение задаваемого числа s_0 в спектре собственных значений исходной конструкции. При этом следует обеспечить такой выбор размеров базисных конечных элементов, чтобы при нулевых значениях всех узловых неизвестных их собственные числа оказались бы больше s_0.

4. К вопросу выбора s_0 при использовании шаговой процедуры определения конкретного собственного числа. Пусть на определенном шаге определяемое собственное число s_i заключено в вилку $a < s_0 < b$. Обычно на следующем шаге приближения к s_j принимают

$$s_0 = (b-a)/2 \tag{4.1}$$

С целью ускорения процесса шагового приближения s_0 к выделяемой собственной частоте s_j в [16–17] процедура метода бисекций (4.1) дополнялась методом обратных итераций с последующим использованием формулы Рэлея [1].

Можно несколько уточнить положение s_0 относительно s_j, если предположить наличие линейного закона изменения $\Delta_n(s)$ в интервале $a < s < b$. Тогда на очередном шаге значение s_0 определится по формуле

$$s_0 = a + (b-a)\left|\frac{\Delta_n(a)}{\Delta_n(b) - \Delta_n(a)}\right| \tag{4.2}$$

И все же рекомендация (4.2) часто оказывается достаточно грубой и не приводит к значительному снижению числа шагов при определении искомого собственного числа с необходимой точностью.

Ниже изложен способ, позволяющий уточнить местоположение s_0 внутри интервала $[s_j, s_{j+1}]$ и тем самым уменьшить общую трудоемкость работ по определению искомого собственного значения.

Итак, в соответствии с теоремой Рауса справедливо соотношение

$$s_j^{(n)} \le s_j^{(n-1)} \le s_{j+1}^{(n)} \le s_{j+1}^{(n-1)} \le s_{sj+2}^{(n)} \le \ldots \tag{4.3}$$

где $s_j^{(n-1)}$ – собственные числа системы S^{n-1}, получаемой из исходной системы путем наложения одной устойчивой жесткой связи.

Числа $s_j^{(n)}$ $(j = \overline{1, n})$ разбивают положительную вещественную полуось на $n + 1$ интервал. Общее же число точек $s_j^{(p)}$ равно $n(n + 1)/2$ и они разбивают полуось $]0, \infty[$ на не более чем $(n(n + 1)/2) + 1$ подинтервала. Пронумеруем их.

Вычислим в соответствии с общей процедурой, указанной в предыдущих пунктах, члены последовательности $\Delta_0(s_0) = 1$, $\Delta_1(s_0)$, ..., $\Delta_n(s_0)$ и составим новую последовательность $\{a_i\}$ $(i = \overline{1, n})$, образованную следующим образом:

$$a_1 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \operatorname{sign}\Delta_1(s_0) = \operatorname{sign}\Delta_0(s_0) \\ 1, & \text{если} \quad \operatorname{sign}\Delta_1(s_0) = -\operatorname{sign}\Delta_0(s_0) \end{cases}$$

$$a_{i+1} = \begin{cases} a_i, & \text{если} \quad \operatorname{sign}\Delta_{i+1}(s_0) = \operatorname{sign}\Delta_i(s_0) \\ a_i + 1, & \text{если} \quad \operatorname{sign}\Delta_{i+1}(s_0) = -\operatorname{sign}\Delta_i(s_0) \end{cases} \quad (i = \overline{1, n-1}) \tag{4.4}$$

При этом оставляются в стороне вопросы устойчивости численного процесса при приближении s_0 к одному из чисел $s_j^{(p)}$. В [12] указанную трудность рекомендуется обходить путем небольшого изменения значения s_0.

Справедливо следующее утверждение: номер N подинтервала $s_j < s < s_{j+1}$, в котором находится число s_0, определяется по формуле [21]:

$$N(s_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i + 1 \tag{4.5}$$

Зависимость (4.5) позволяет произвести дальнейшее уточнение положения s_0 по отношению к собственным числам. Пусть было найдено собственное число s_j. При этом на последнем шаге оно располагалось в вилке $a < s_j < b$. Требуется определить очередное собственное значение s_{j+1}. С помощью зависимостей (4.4) и (4.5) находим число $N(b)$, которым определяется положение $s_0 = b$ в интервале $s_j < s < s_{j+1}$. Если далее учесть, что общее число подинтервалов на участке $s_j < s < s_{j+1}$ равно $n(n + 1)/2$, то положение искомого числа s_{j+1} с достаточно высокой точностью определится по формуле

$$s_{j+1} = (b - s_j)\frac{n(n+1)}{2N(b)}$$

Некоторые дополнительные рекомендации по выбору значения s_0 для систем с бесконечным числом степеней свободы содержатся в [22].

5. Иная форма записи уравнения свободных колебаний гироскопических систем. Уравнение движения такой системы запишется в виде

$$M\ddot{q}(t) + G\dot{q}(t) + Kq(t) = 0 \tag{5.1}$$

или, если учесть (2.2)

$$(K-\lambda^2 M+i\lambda G)q = 0 \tag{5.2}$$

где $G = -G^T$ – гидроскопическая матрица. Умножая (5.1) слева на q^T, получаем $\lambda^2 q^T M q - q^T K q = 0$. Отсюда

$$\lambda^2 = q^T K q/(q^T M q) \tag{5.3}$$

Непосредственно из (5.3) видим, что все корни λ_i^2 $(i = \overline{1, n})$ гироскопической системы будут вещественными числами. Отсюда также следует, что частотное уравнение гироскопической системы

$$\Delta_n(\lambda) = |K-\lambda^2 M+i\lambda G| = 0 \tag{5.4}$$

после его развертывания в ряд по степеням λ, будет содержать только четные степени λ.

Выделению собственных частот уравнения (5.4) посвящены работы [15–17]. Триангуляция эрмитовой матрицы частотного определителя производилась с помощью специального метода исключения по Гауссу, предложенного автором этих работ. И все же триангуляция эрмитовых матриц ведет к определенным вычислительным трудностям. Их можно обойти, если ввести в рассмотрение $2n$-мерный вектор основных неизвестных: $z^T(t) = [\dot q(t), q(t)]^T$. Тогда уравнение (5.1) преобразуется к виду

$$E\dot z(t) + Fz(t) = 0$$

$$E = \begin{Vmatrix} M & 0 \\ 0 & K \end{Vmatrix}, \quad F = \begin{Vmatrix} G & K \\ -K & 0 \end{Vmatrix} \tag{5.5}$$

Здесь E, F – соответственно симметричная и кососимметричная матрица порядка $2n$.

Решение уравнения (5.5) ищем в виде $z(t) = Ze^{ist}$, где вектор Z есть нетривиальное решение этого уравнения. Для определения Z получим уравнение

$$(-s^2 E+F)Z = 0 \tag{5.6}$$

Комплексное решение этого уравнения может быть записано в виде $Z = X + iY$. Разделяя в (5.6) вещественную и мнимую части, получим два следующих уравнения $-sEY + FX = 0$, $sEX + FY = 0$, из совместного рассмотрения которых найдем уравнения для определения действительной и мнимой частей вектора Z:

$$(H-s^2 E)X = 0, \quad (H-s^2 E)Y = 0 \tag{5.7}$$

Здесь $H = F^T E^{-1} F$. Матрицы H и E в (5.7) являются действительными и симметричными порядка $2n$. В силу чего частотное уравнение

$$\Delta_{2n}(s) = |H-s^2 E| = 0 \tag{5.8}$$

будет иметь n пар повторяющихся действительных собственных чисел s_j^2 $(j = 1, 2, \ldots, n)$, а из решения уравнений (5.7) получим n пар действительных собственных векторов X_j и Y_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Отсюда следует, что проблема собственных значений для гироскопической системы эквивалентна таковой для потенциальной системы, движение которой описывается уравнениями (5.7). Использование уравнений (5.7) вместо (5.2) может привести к значительному сокращению объема вычислительных операций, поскольку при этом все операции производятся над действительными симметричными матрицами.

Полезно отметить, что векторы X_j и Y_j удовлетворяют следующим условиям ортогональности $X_i^T EX_j = 0$, $Y_i^T EY_j = 0$, $X_i^T EY_j = 0$ $(i \neq j)$.

Поскольку уравнения (5.7) описывают движение потенциальной системы, то зависимость (2.8) может быть использована для определения местоположения заданного числа s_0 в спектре собственных чисел уравнения (5.8). При этом следует иметь в виду, что каждому из корней уравнения (5.8), в силу их парности, будет соответствовать наличие двух отрицательных диагональных элементов матрицы $\Delta_{2n}(s_0)$, приведенной к треугольному виду. Дополнительным подтверждением возможности такого подхода является тот факт, что теорема Рауса справедлива для гироскопических систем [23–26].

6. Проблема собственных значений для задач гидроупругости. Будем предполагать, что при описании движения тела применима линейная теория упругости, а для жидкости – модель акустической среды. Демпфирующие силы в системе "тело–жидкость", как и эффект излучения энергии, не учитываются, т.е. система предполагается потенциальной. Собственные значения, как и соответствующие им собственные векторы, будут действительными величинами.

6.1. Если для решения уравнений, описывающих свободные колебания системы "тело–жидкость" был использован метод конечных элементов в перемещениях, то частотное уравнение будет иметь вид (2.6). Матрица масс A и матрица жесткости рассматриваемой системы B будут действительными и симметричными. Для определения собственных частот применим подход, изложенный в п. 2. При этом местоположение заданного числа s_0 в спектре собственных частот системы определится зависимостью (2.9).

При большом числе базисных элементов определение числа k в (2.9) практически невозможно. Поэтому необходимо выбрать достаточно малые базисные элементы, собственные частоты которых при нулевых узловых неизвестных были бы больше s_0. При этом число k будет равно нулю. Такой подход использовался для определения собственных частот судового корпуса в гидроупругой постановке [27].

6.2. Пусть для описания движения упругого тела используется метод конечных элементов в перемещениях, а для жидкой области – прямой вариант метода граничных элементов. Для тела вновь в качестве основных неизвестных вводятся узловые перемещения, а для жидкой области – частично давления p, а частично производные давления по нормали к границе жидкости $\partial p/\partial \nu$ в узловых точках. При таком наборе неизвестных для определения местоположения задаваемого числа s_0 необходимо воспользоваться зависимостью (2.11), поскольку, полагая равными нулю узловые перемещения в упругом теле и производные по нормали в узловых точках на границе жидкости на систему накладываются дополнительные связи, а полагая равными нулю давления в узловых точках, наоборот, устраняется ряд имеющихся у системы связей. Таким образом, определение чисел l и t в формуле (2.11) особых трудностей не вызывает. Основная трудность связана с определением в этой формуле числа k. Если $k \neq 0$ (а без предварительного расчета трудно утверждать обратное), то излагаемый метод в такой постановке может оказаться практически не пригодным.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 90-01-00382).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* М.: Высш. шк., 1994. 544 с.
2. *Воеводин В.В.* Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1966. 248 с.
3. *Икрамов Х.Д.* Численные методы для симметричных линейных систем. М.: Наука, 1988. 158 с.
4. *Уилкинсон Дж.Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1950. 564 с.
5. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963. 734 с.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

7. *Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.: Гостехиздат, 1950. 360 с.
8. *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. М.: Наука, 1983. В 2-х томах. 464 с. (Т. 1), 544 с. (Т. 2).
9. *Нудельман Я.Л.* Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. М.: Гостехиздат, 1949. 176 с.
10. *Матевосян Р.Р.* Устойчивость сложных стержневых систем. М.: Госстройиздат, 1961. 252 с.
11. *Ляхович Л.С.* Метод отделения критических сил и собственных частот упругих систем. Томск, изд-во Томск. ун-та, 1970. 161 с.
12. *Курдюмов А.А., Постнов В.А.* Применение алгоритма Гаусса для определения и разделения корней частотного уравнения консервативных систем // Тр. НТО Судпрома, 1961. № 40. С. 4–14.
13. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 342 с.
14. *Постнов В.А., Москалев А.Н.* О применении метода подструктур для определения и разделения корней частотного уравнения консервативных систем // Прикл. механика. 1979. Т. 15. № 3. С. 94–96.
15. *Gupta K.K.* Solution of eigenvalue problems by Sturm sequence method // Jnt. J. Numer. Meth. Eng, 1972. Vol. 4. P. 379–404.
16. *Gupta K.K.* On a combined Sturm sequence and inverse iteration technique for eigenproblem solution of spinning structures // Inter. J. Num. Meth. Eng, 1973. Vol. 7. P. 509–518.
17. *Gupta K.K.* Formulation of numerical procedures for dynamic analysis of spinning structures // Int. J. Numer. Meth. Eng, 1986. Vol. 23. P. 2347–2357.
18. *Нудельман Я.Л.* Об одном способе решения уравнений частот и критических сил, составленных методом сил // Тр. Одесского гидротехн. ин-та. 1954. Вып. 6. С. 88–99.
19. *Постнов В.А.* Численные методы расчета судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1977. 248 с.
20. *Постнов В.А., Дмитриев С.А., Елтышев Б.К., Родионов А.А.* Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений. Л.: Судостроение, 1979. 288 с.
21. *Москалев А.Н., Постнов В.А.* О модификации одного алгоритма определения собственных чисел в задачах устойчивости и колебаний консервативных систем // Прикладные проблемы прочности и пластичности / Всес. межвуз. сб. Изд-е Горьковского ун-та, 1987. Вып. 36. С. 35–39.
22. *Москалев А.Н., Постнов В.А.* О выборе последовательности приближения в модифицированном алгоритме определения собственных частот консервативных систем // Прикл. проблемы прочности и пластичности. Методы решения / Всес. межвуз. сб. Изд-е Горьковского ун-та, 1989. С. 48–51.
23. *Журавлев В.Ф.* Обобщение теоремы Рэлея на гироскопические системы // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 606–610.
24. *Метелицин И.И.* Влияние изменения параметров линейных гироскопических систем на частоты колебаний и коэффициенты затухания // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153. № 3. С. 540–542.
25. *Yang B.* Eigenvalue inclusion principles for discrete giroscopic systems // Trans. of the ASME. 1992. Vol. 5 P. 278–283.
26. *Сейранян А.П.* О теоремах Метелицина // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 3. С. 39–43.
27. *Постнов В.А., Тарануха Н.А.* Метод модуль-элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1990. 318 с.

С.-Петербург — Поступила в редакцию 26.III.1998