

УДК 539.3

© 1998 г. Ю. М. ДАЛЬ, Ю. Г. ПРОНИНА

СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ СИЛЫ И МОМЕНТЫ У ГРАНИЦЫ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассматривается плоская задача теории упругости для полуплоскости, нагруженной сосредоточенными силами, моментами или периодическими системами сил и моментов. Выведены аналитические зависимости для комплексных потенциалов Г.В. Колосова.

В качестве примера исследовано точное решение задачи о полуплоскости, нагруженной сосредоточенным моментом. Приведены формулы для компонент упругих напряжений и перемещений.

В заключение дано обобщение результатов, полученных для полуплоскости со свободной границей, на случаи защемленной кромки и заданных ее перемещений.

1. Введение. В плоской теории упругости места приложения сосредоточенных сил и моментов принято рассматривать как изолированные особые точки. Аналитические выражения для этих особенностей найдены путем определенного предельного перехода в случаях неограниченного тела и полуплоскости, нагруженной силами и моментами на границе или около нее (последняя при этом предполагается свободной) [1–10]. Заметим, что за исключением [3, 6, 10] в цитированных работах решения получены либо в терминах функции напряжений, либо в виде несобственных интегралов; как то, так и другое представление мало удобно для приложений. В прикладных исследованиях нередко возникает необходимость определения полей напряжений и перемещений вблизи сосредоточенных сил, моментов или их периодических систем, действующих у произвольно нагруженной (закрепленной) кромки полуплоскости. Поскольку в научной литературе подобная задача не изучалась, излагаемое ниже решение следует рассматривать как точный ответ на данный вопрос.

Как известно [11], в плоской теории упругости с помощью двух аналитических функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ вычисляются компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(z) + \sigma_{yy}(z) &= 4\operatorname{Re} \Phi(z) \\ \sigma_{yy}(z) - \sigma_{xx}(z) + 2i\sigma_{xy}(z) &= 2[\bar{z}\Phi(z)/dz + \Psi(z)]\end{aligned}\quad (1.1)$$

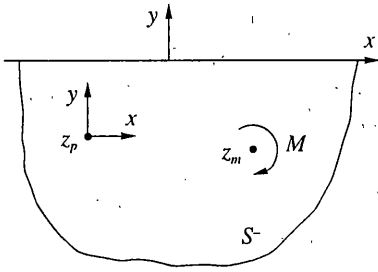
а через их первообразные

$$\varphi(z) = \int \Phi(z) dz, \quad \psi(z) = \int \Psi(z) dz$$

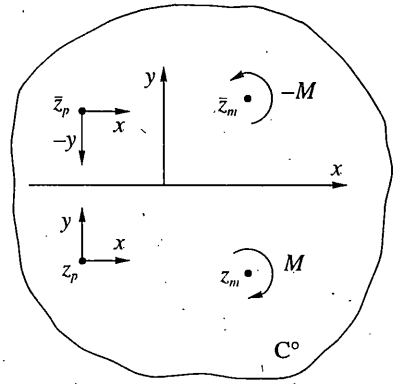
определяются составляющие вектора перемещения

$$2\mu(u(z) + iv(z)) = \kappa\varphi(z) - \overline{z d\varphi(z)/dz} - \overline{\psi(z)}\quad (1.2)$$

Здесь $z = x + iy$; $\bar{z} = x - iy$, $\kappa = 3 - 4\nu$ – в случае плоской деформации и $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ – при обобщенном плоском напряженном состоянии; μ – модуль сдвига; ν – ко-



Фиг. 1



Фиг. 2

эффицент Пуассона. Черта сверху над $\phi(z)$ и $\psi(z)$ в (1.2) означает комплексное сопряжение.

2. Постановка основной задачи и метод ее решения. Пусть в двух произвольных точках z_p и z_m упругой полуплоскости S^- ($y \leq 0$) действуют сосредоточенная сила $P(z_p) = X + iY$ и момент $H(z_m) = M$. Кромка $y = 0$ предполагается свободной от внешних усилий (фиг. 1). Требуется определить напряжения и перемещения в S^- , обусловленные данными силовыми факторами.

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу плоской теории упругости для неограниченного тела C^0 , загруженного в точках z_p и \bar{z}_p сосредоточенными силами $P(z_p) = X + iY$, $P(\bar{z}_p) = X - iY$, а в точках z_m и \bar{z}_m моментами $H(z_m) = M$ и $H(\bar{z}_m) = -M$ (фиг. 2).

Согласно [6] имеем

$$\Phi^0(z) = \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{X+iY}{z-z_p} + \frac{X-iY}{z-\bar{z}_p} \right] \quad (2.1)$$

$$\Psi^0(z) = \frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{\kappa}{z-\bar{z}_p} - \frac{\bar{z}_p}{(z-\bar{z}_p)^2} \right] + \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{\kappa}{z-z_p} - \frac{z_p}{(z-z_p)^2} \right] - \frac{iM}{2\pi} \left[\frac{1}{(z-z_m)^2} - \frac{1}{(z-\bar{z}_m)^2} \right] \quad (2.2)$$

Внося (2.1) и (2.2) в (1.1), устанавливаем, что в теле C^0 на оси $y = 0$ касательное напряжение $\sigma_{xy}^0(x) \equiv 0$, а нормальное напряжение $\sigma_{yy}^0(x)$ определяется выражением

$$\sigma_{yy}^0(x) = \frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{\kappa}{x-\bar{z}_p} - \frac{2}{x-z_p} + \frac{x}{(x-z_p)^2} - \frac{\bar{z}_p}{(x-z_p)^2} \right] + \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{\kappa}{x-z_p} - \frac{2}{x-\bar{z}_p} + \frac{x}{(x-\bar{z}_p)^2} - \frac{z_p}{(x-\bar{z}_p)^2} \right] - \frac{iM}{2\pi} \left[\frac{1}{(x-z_m)^2} - \frac{1}{(x-\bar{z}_m)^2} \right] \quad (2.3)$$

Как видим, соответствующие порядковые слагаемые в первой и второй строке этой формулы суть комплексно сопряженные переменные. Поэтому как их попарная, так и общая сумма представляет собой вещественную функцию. В квадратных скобках третьей строки записана разность двух комплексно сопряженных переменных. Будучи умноженной на чисто мнимое число $(-iM/2\pi)$, она дает также веществен-

ную функцию. Целесообразность такого представления выяснится при вычислении интегралов типа Коши в формуле (2.8).

Мысленно представим теперь тело C^0 в виде суммы двух полуплоскостей: нижней C^1 и верхней C^2 . Очевидно, что граница $y = 0$ полуплоскости C^1 будет тогда загружена нормальными напряжениями вида (2.3). Если, однако, приложить на ней дополнительную систему напряжений

$$\sigma_{yy}^1(x) = -\sigma_{yy}^0(x) \quad (2.4)$$

то указанная граница окажется свободной от внешней нагрузки. Следовательно, решение задачи, схематически изображенной на фиг. 1, имеет вид

$$\Phi(z) = \Phi^0(z) + \Phi^1(z), \quad \Psi(z) = \Psi^0(z) + \Psi^1(z) \quad (2.5)$$

где $\Phi^1(z)$ и $\Psi^1(z)$ – функции Г.В. Колосова для полуплоскости C^1 , нагруженной на кромке $y = 0$ напряжениями $\sigma_{yy}^1(x)$, определяемыми формулами (2.4) и (2.3).

Следуя [6], можем записать

$$\Phi^1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_{yy}^0(x)}{(x-z)} dx \quad (2.6)$$

$$\Psi^1(z) = -z \frac{d\Phi^1(z)}{dz} \quad (2.7)$$

В результате подстановки (2.3) в (2.6) получаем

$$\begin{aligned} \Phi^1(z) = & \frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\kappa}{x-\bar{z}_p} - \frac{2}{x-z_p} + \frac{x}{(x-z_p)^2} - \frac{\bar{z}_p}{(x-z_p)^2} \right] \frac{dx}{x-z} + \\ & + \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\kappa}{x-z_p} - \frac{2}{x-\bar{z}_p} + \frac{x}{(x-\bar{z}_p)^2} - \frac{z_p}{(x-\bar{z}_p)^2} \right] \frac{dx}{x-z} - \\ & - \frac{iM}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{(x-z_m)^2} - \frac{1}{(x-\bar{z}_m)^2} \right] \frac{dx}{x-z} \end{aligned} \quad (2.8)$$

где выражения

$$\frac{\kappa}{x-\bar{z}_p}, \quad \frac{2}{x-\bar{z}_p}, \quad \frac{x}{(x-\bar{z}_p)^2}, \quad \frac{z_p}{(x-\bar{z}_p)^2}, \quad \frac{1}{(x-\bar{z}_m)^2}$$

суть граничные значения функций

$$\frac{\kappa}{z-\bar{z}_p}, \quad \frac{2}{z-\bar{z}_p}, \quad \frac{z}{(z-\bar{z}_p)^2}, \quad \frac{z_p}{(z-\bar{z}_p)^2}, \quad \frac{1}{(z-\bar{z}_m)^2}$$

голоморфных в C^1 и обращающихся в нуль на бесконечности; разумеется здесь речь идет о граничных значениях при $z \rightarrow x$ из C^1 . Остальные подинтегральные слагаемые в (2.8) являются предельными значениями функций, голоморфных в C^2 и исчезающих на бесконечности; для них, конечно, предельные значения находятся когда $z \rightarrow x$ из C^2 .

Учитывая эти обстоятельства, находим

$$\Phi^1(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \frac{\kappa}{z-\bar{z}_p} + \frac{x-iY}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{1}{z-\bar{z}_p} - \frac{\bar{z}_p-z_p}{(z-\bar{z}_p)^2} \right] - \frac{iM}{2\pi(z-\bar{z}_m)^2} \quad (2.9)$$

Откуда на основании (2.7) следует

$$\Psi^1(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{\kappa}{z-\bar{z}_p} + \frac{\kappa\bar{z}_p}{(z-\bar{z}_p)^2} \right] + \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{1}{z-\bar{z}_p} + \frac{2z_p-\bar{z}_p}{(z-\bar{z}_p)^2} - \frac{2\bar{z}_p(\bar{z}_p-z_p)}{(z-\bar{z}_p)^3} \right] - \frac{iM}{2\pi} \left[\frac{2}{(z-\bar{z}_m)^2} + \frac{2\bar{z}_m}{(z-\bar{z}_m)^3} \right] \quad (2.10)$$

Подставив выражения (2.1), (2.2), (2.9), (2.10) в равенство (2.5), приходим к окончательным формулам

$$\Phi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{1}{z-z_p} + \frac{\kappa}{z-\bar{z}_p} \right] - \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \frac{\bar{z}_p-z_p}{(z-\bar{z}_p)^2} - \frac{iM}{2\pi(z-\bar{z}_m)^2} \quad (2.11)$$

$$\Psi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{\bar{z}_p}{(z-z_p)^2} + \frac{\kappa\bar{z}_p}{(z-\bar{z}_p)^2} \right] + \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{\kappa}{z-z_p} + \frac{1}{z-\bar{z}_p} - \frac{\bar{z}_p-z_p}{(z-\bar{z}_p)^2} - \frac{2\bar{z}_p(\bar{z}_p-z_p)}{(z-\bar{z}_p)^3} \right] - \frac{iM}{2\pi} \left[\frac{1}{(z-z_m)^2} + \frac{1}{(z-\bar{z}_m)^2} + \frac{2\bar{z}_m}{(z-\bar{z}_m)^3} \right] \quad (2.12)$$

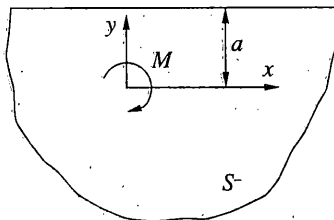
Отсюда после интегрирования получаем

$$\varphi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} [\ln(z-z_p) + \kappa \ln(z-\bar{z}_p)] + \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \frac{\bar{z}_p-z_p}{z-\bar{z}_p} + \frac{iM}{2\pi(z-\bar{z}_m)} \quad (2.13)$$

$$\Psi(z) = \frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{\bar{z}_p}{z-z_p} + \frac{\kappa\bar{z}_p}{z-\bar{z}_p} \right] + \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \left[\kappa \ln(z-z_p) + \ln(z-\bar{z}_p) + \frac{\bar{z}_p-z_p}{z-\bar{z}_p} + \frac{\bar{z}_p(\bar{z}_p-z_p)}{(z-\bar{z}_p)^3} \right] + \frac{iM}{2\pi} \left[\frac{1}{z-z_m} + \frac{1}{z-\bar{z}_m} + \frac{\bar{z}_m}{(z-\bar{z}_m)^2} \right] \quad (2.14)$$

Пример. Рассмотрим ситуацию, когда сосредоточенная сила $P = X + iY$ отсутствует ($X = Y = 0$), а момент M приложен в точке $z_m = -ia$. Перенесем систему координат (x, y) в точку z_m (фиг. 3). Тогда, в соответствие с ([6], стр. 130–131), формулы (2.11)–(2.14) в новой координатной системе примут вид

$$\Phi(z) = \frac{iM}{2\pi(z-2ia)^2}, \quad \Psi(z) = \frac{iM}{2\pi} \left[\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z-2ia)^2} \right]$$



Фиг. 3

$$\varphi(z) = \frac{iM}{2\pi(z-2ia)}, \quad \Psi(z) = \frac{iM}{2\pi} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{(z-2ia)} \right]$$

Подставив $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в (1.1), а $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в (1.2), после соответствующих преобразований устанавливаем, что на границе полуплоскости $y = +ia$:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xx} = \frac{4Mxa}{\pi(x^2 + a^2)^2}$$

$$u = \frac{(1+\nu)(1+\kappa)a}{2\pi E(x^2 + a^2)} M, \quad v = \frac{(1+\nu)(1+\kappa)x}{2\pi E(x^2 + a^2)} M$$

где E – модуль Юнга материала полуплоскости.

Перейдем теперь к полярным координатам r и θ , имеющим свое начало в точке z_m . Компоненты напряжения в этой системе координат связаны с функциями $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ зависимостями вида

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\operatorname{Re} \Phi(z)$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta}(z) = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]e^{2i\theta}$$

Внося в данные соотношения выражения для $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, после выполнения необходимых математических выкладок получаем

$$\sigma_{rr} = \frac{M}{2\pi} \left[\frac{4r\cos\theta + (4a^2 - 2r^2)\sin 2\theta}{(r^2 - 4rasin\theta + 4a^2)^2} - \frac{2(r^4 \sin 2\theta - 6r^3 a \cos\theta + 8ra^3 \cos\theta)}{(r^2 - 4rasin\theta + 4a^2)^3} \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{M}{2\pi} \left[\frac{12r\cos\theta - (4a^2 - 2r^2)\sin 2\theta}{(r^2 - 4rasin\theta + 4a^2)^2} + \frac{2(r^4 \sin 2\theta - 6r^3 a \cos\theta + 8ra^3 \cos\theta)}{(r^2 - 4rasin\theta + 4a^2)^3} \right]$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{M}{2\pi} \left[-\frac{r^2 - 4rasin\theta - 4a^2 \cos 2\theta}{(r^2 - 4rasin\theta + 4a^2)^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2(r^4 \cos 2\theta + 6r^3 a \sin\theta - 12r^2 a^2 + 8ra^3 \sin\theta)}{(r^2 - 4rasin\theta + 4a^2)^3} \right]$$

На фиг. 4 представлен график функции $K = \sigma_{r\theta}/\sigma_{r\theta}^*$, где $\sigma_{r\theta}^*$ – касательное напряжение в окрестности сосредоточенного момента, действующего в бесконечной плоскости. Кривые 1, 2, 3 рисунка отвечают значениям r/a соответственно равным 0.50; 0.75; 1.00. Как видим, начиная с $r/a \geq 0.75$, свободная граница оказывает существенное влияние на характер распределения касательных напряжений.

3. Периодические сосредоточенные силы и моменты. Рассмотрим упругую полуплоскость S^- , в приграничной области которой на расстоянии $H_p = \text{const}$ от ее свободной кромки $y = 0$ действует система сосредоточенных сил $P(z_k) = P(z_p) = X + iY$, с периодом l , а на расстоянии $H_m = \text{const}$ от границы – система сосредоточенных моментов $M(z_n) = M(z_m) = M$ с периодом t , где

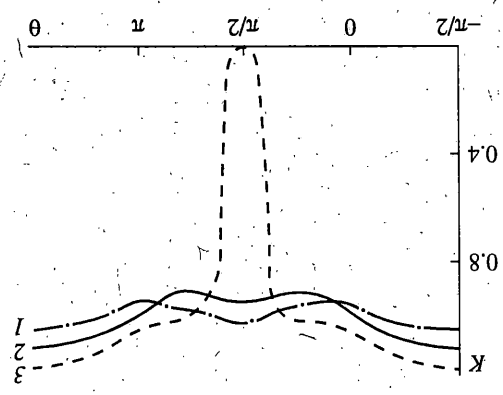
$$\begin{aligned} z_k &= z_p + kl, & \bar{z}_k &= \bar{z}_p + kl, & k &= \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ z_n &= z_m + nt, & \bar{z}_n &= \bar{z}_m + nt, & n &= \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Согласно формулам (2.11), (2.12), функция $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в этом случае определяются соотношениями

$$\Phi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{z-z_k} + \frac{\kappa}{z-\bar{z}_p} \right] - \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{z}_k - z_k}{(z-\bar{z}_k)^2} - \frac{iM}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-\bar{z}_n)^2} =$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{2l^2}{\pi M} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(\pi(z-z_m)/l+n\pi)^2}{z} + \frac{2H_p l}{\pi} \frac{(\pi(z-z^p)/l+k\pi)^2}{z} - \frac{4H_p l z}{\pi^2} \right] \\
 & + \left[\frac{X-lY}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi(1+k)/l+k\pi}{\pi(z-z^p)/l+k\pi} + \frac{2\pi(1+k)/l+k\pi}{\pi} \right] \\
 & \times \left[\frac{2H_p l}{\pi} \frac{(\pi(z-z^p)/l+k\pi)^2}{z} + \frac{2\pi(1+k)/l+k\pi}{\pi} \right] \\
 & - \frac{2\pi M}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(\pi(z-z_n)/l+n\pi)^2}{z} + \frac{2\pi(1+k)/l+k\pi}{\pi} \\
 & + \left[\frac{X-lY}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi(1+k)/l+k\pi}{\pi(z-z^p)/l+k\pi} + \frac{2\pi(1+k)/l+k\pi}{\pi} \right] \\
 & - \left[\frac{X+lY}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi(1+k)/l+k\pi}{\pi(z-z^p)/l+k\pi} + \frac{2\pi(1+k)/l+k\pi}{\pi} \right] \\
 & = \Psi(z) = \frac{X+lY}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi(1+k)/l+k\pi}{z} + \frac{2\pi(1+k)/l+k\pi}{\pi} \\
 & - \frac{X-lY}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi(1+k)/l+k\pi}{z} - \frac{2\pi(1+k)/l+k\pi}{\pi} \\
 & + \frac{2H_p l}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(\pi(z-z^p)/l+k\pi)^2}{z} - \frac{2\pi M}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(\pi(z-z_m)/l+n\pi)^2}{z} \\
 & = \frac{X+lY}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi(1+k)/l+k\pi}{1} + \frac{2\pi(1+k)/l+k\pi}{\pi} - \left[\frac{X-lY}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi(1+k)/l+k\pi}{1} + \frac{2\pi(1+k)/l+k\pi}{\pi} \right]
 \end{aligned}$$

Фиг. 4



Принимая во внимание разложения ([12], стр. 475–476)

$$\operatorname{ctg} x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x+k\pi}, \quad \frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+k\pi)^2}$$

$$\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+k\pi)^3}$$
(3.2)

окончательно находим

$$\Phi(z) = \frac{X+iY}{2l(1+\kappa)} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(z-z_p)}{l} + \kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(z-\bar{z}_p)}{l} \right] -$$

$$\frac{\pi(X-iY)}{2l^2(1+\kappa)\sin^2[\pi(z-\bar{z}_p)/l]} - \frac{2H_p i}{2t^2 \sin^2[\pi(z-\bar{z}_m)/t]} - \frac{i\pi M}{2t^2 \sin^2[\pi(z-\bar{z}_m)/t]} \frac{1}{1}$$
(3.3)

$$\Psi(z) = \frac{X+iY}{2l(1+\kappa)} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(z-z_p)}{l} + \kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(z-\bar{z}_p)}{l} - \frac{\pi \left(\frac{2H_p i + z}{\sin^2[\pi(z-z_p)/l]} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\kappa z}{\sin^2[\pi(z-\bar{z}_p)/l]} \right) \right] + \frac{X-iY}{2l(1+\kappa)} \left[\kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(z-z_p)}{l} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(z-\bar{z}_p)}{l} + \frac{2\pi H_p i}{l} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{\sin^2[\pi(z-\bar{z}_p)/l]} - \frac{2\pi z \operatorname{ctg}[\pi(z-\bar{z}_p)/l]}{l \sin^2[\pi(z-\bar{z}_p)/l]} \right) \right] -$$
(3.4)

$$- \frac{i\pi M}{2t^2} \left[\frac{1}{\sin^2[\pi(z-z_m)/t]} - \frac{1}{\sin^2[\pi(z-z_m)/t]} + \frac{2\pi z \operatorname{ctg}[\pi(z-\bar{z}_m)/l]}{t \sin^2[\pi(z-\bar{z}_m)/t]} \right]$$

4. Закрепленная кромка полуплоскости. Искомое решение представим в виде суммы решений двух задач: первой – для полуплоскости, нагруженной усилиями $P(z_p) = X + iY$, $H(z_m) = M$, с кромкой $y = 0$, свободной от внешней нагрузки (фиг. 1); и второй – для полуплоскости без нагрузки, граница которой испытывает перемещение

$$p_2(x) + iq_2(x) = -[u_1(x) + iv_1(x)] \quad (4.1)$$

где $u_1(x) + iv_1(x)$ – смещение кромки $y = 0$ в первой задаче (ее решение приведено выше).

При этом естественно считать, что функции $p_2(x)$ и $q_2(x)$ имеют производные $p_2'(x)$ и $q_2'(x)$, удовлетворяющие условию Гельдера, включая бесконечно удаленную точку, и исчезающие на бесконечности при $x = \infty$.

В дальнейшем условимся все функции, относящиеся к первой или второй задаче, снабжать соответственно нижними индексами 1 или 2.

Согласно общим зависимостям (1.1), (1.2) имеем

$$\sigma_{yy}(x) - i\sigma_{xy}(x) = \Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x\overline{\Phi'(x)} + \overline{\Psi(x)} \quad (4.2)$$

$$-2\mu[u'(x) + iv'(x)] = -(1+\kappa)\Phi(x) + \Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x\overline{\Phi'(x)} + \overline{\Psi(x)} \quad (4.3)$$

Равенство (4.3) получается из формулы (1.2) после ее дифференцирования по x ; $u'(x) = \partial u / \partial x$, $v'(x) = \partial v / \partial x$.

Сопоставляя между собой правые части выписанных соотношений, получаем

$$-2\mu[u'(x) + iv'(x)] = \sigma_{yy}(x) - i\sigma_{xy}(x) - (1+\kappa)\Phi(x) \quad (4.4)$$

Отсюда с учетом (4.1) и того, что на кромке $y = 0$ $\sigma_{xy}(x) = 0$ и $\sigma_{yy}(x) = 0$, находим

$$2\mu[p_2'(x) + iq_2'(x)] = -(1 + \kappa)\Phi_1(x) \quad (4.5)$$

В свою очередь из (4.3) следует

$$-2\mu[p_2'(x) + iq_2'(x)] = -\kappa\Phi_2(x) + \overline{\Phi_2(x)} + x\overline{\Phi_2'(x)} + \overline{\Psi_2(x)} \quad (4.6)$$

Очевидно, что функции $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ при $|z| \gg 1$ могут быть представлены так:

$$\Phi_2(z) = \frac{\gamma}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \quad \Psi_2(z) = \frac{\gamma'}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\Phi_2'(z) = -\frac{\gamma}{z^2} + o\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (\gamma = \text{const}, \quad \gamma' = \text{const})$$

Для того чтобы функция $\Psi_2(x)$, определяемая этим равенством, была граничным значением функции $\Psi_2(z)$, голоморфной в нижней полуплоскости, необходимо и достаточно условие

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\Psi_2(x)}}{x-z} dx = 0$$

Подставляя сюда вместо $\overline{\Psi_2(x)}$ выражение, вытекающее из (4.6), приходим к уравнению

$$-\frac{\mu}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_2'(x) + iq_2'(x)}{x-z} dx + \frac{\kappa}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_2(x)}{x-z} dx - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\Psi_2(x)}}{x-z} dx - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\overline{\Phi_2'(x)}}{x-z} dx = 0$$

Откуда, принимая во внимание (4.5), выводим

$$\kappa\Phi_2(z) = \frac{1 + \kappa}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_1(x)}{x-z} dx \quad (4.7)$$

Функция $\Psi_2(z)$ вычисляется из граничного условия (4.6) по формуле

$$\Psi_2(z) = \frac{\mu}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_2'(x) - iq_2'(x)}{x-z} dx - \frac{\kappa}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\Phi_2(x)}}{x-z} dx + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_2(x)}{x-z} dx + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\overline{\Phi_2'(x)}}{x-z} dx$$

которая с учетом равенства, сопряженного с (4.5), дает

$$\Psi_2(z) = -\frac{1 + \kappa}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\Phi_1(x)}}{x-z} dx - \Phi_2(z) - z\Phi_2'(z) \quad (4.8)$$

Внеся в правую часть (4.7) вместо функции $\Phi_1(x)$ выражение (2.11), после соответствующих вычислений находим

$$\Phi_2(z) = \frac{X + iY}{2\pi(z - \bar{z}_p)} + \frac{X - iY}{2\pi\kappa} \frac{\bar{z}_p - z_p}{(z - \bar{z}_p)^2} + \frac{iM(1 + \kappa)}{2\pi\kappa(z - \bar{z}_m)^2} \quad (4.9)$$

Аналогичным образом из (4.8) получаем

$$\Psi_2(z) = \frac{(X+iY)\bar{z}_p}{2\pi(z-\bar{z}_p)^2} - \frac{X-iY}{2\pi(z-\bar{z}_p)} + \frac{X-iY}{2\pi\kappa} \frac{\bar{z}_p-z_p}{(z-\bar{z}_p)^2} + \frac{X-iY}{2\pi\kappa} \frac{2\bar{z}_p(\bar{z}_p-z_p)}{(z-\bar{z}_p)} + \frac{iM(1+\kappa)}{2\pi\kappa(z-\bar{z}_m)^2} + \frac{2iM\bar{z}_m(1+\kappa)}{2\pi\kappa(z-z_m)^3} \quad (4.10)$$

Суммируя функции $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ соответственно с функциями $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$, определяемыми формулами (2.11) и (2.12), приходим к окончательным результатам

$$\Phi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{1}{z-z_p} - \frac{1}{z-\bar{z}_p} \right] + \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)\kappa} \frac{\bar{z}_p-z_p}{(z-\bar{z}_p)^2} + \frac{iM}{2\pi\kappa(z-\bar{z}_m)^2} \quad (4.11)$$

$$\Psi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{\bar{z}_p}{(z-z_p)^2} - \frac{\bar{z}_p}{(z-\bar{z}_p)^2} \right] + \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{\kappa}{z-z_p} - \frac{\kappa}{z-\bar{z}_p} + \frac{\bar{z}_p-z_p}{\kappa(z-\bar{z}_p)^2} + \frac{2\bar{z}_p(\bar{z}_p-z_p)}{\kappa(z-\bar{z}_p)^3} \right] - \frac{iM}{2\pi} \left[\frac{1}{(z-z_m)^2} - \frac{1}{\kappa(z-\bar{z}_m)^2} - \frac{2\bar{z}_m}{\kappa(z-\bar{z}_m)^3} \right] \quad (4.12)$$

Интегрируя выписанные соотношения имеем

$$\varphi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} [\ln(z-z_p) - \ln(z-\bar{z}_p)] - \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \frac{\bar{z}_p-z_p}{z-\bar{z}_p} - \frac{iM}{2\pi\kappa(z-\bar{z}_m)} \quad (4.13)$$

$$\psi(z) = \frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \left[\frac{\bar{z}_p}{z-z_p} - \frac{\bar{z}_p}{z-\bar{z}_p} \right] + \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \left[\kappa \ln(z-z_p) - \kappa \ln(z-\bar{z}_p) - \frac{\bar{z}_p-z_p}{\kappa(z-\bar{z}_p)} - \frac{\bar{z}_p(\bar{z}_p-z_p)}{\kappa(z-\bar{z}_p)^2} \right] + \frac{iM}{2\pi} \left[\frac{1}{z-z_m} - \frac{1}{\kappa(z-\bar{z}_m)} - \frac{\bar{z}_m}{\kappa(z-\bar{z}_m)^2} \right] \quad (4.14)$$

Нетрудно убедиться, что зависимости (4.13), (4.14), будучи подставленными в формулу (1.2), дают на оси абсцисс $u(x) \equiv v(x) \equiv 0$. Компоненты напряжения на закрепленной кромке $y=0$ вычисляются по формуле $\sigma_{yy}(x) - i\sigma_{xy}(x) = (1+\kappa)\Phi(x)$, следующей из (4.4) в предположении $u(x) = v(x) = 0$.

Внося сюда вместо $\Phi(x)$ выражение (4.11), находим

$$\sigma_{yy}(x) - i\sigma_{xy}(x) = \frac{X+iY}{2\pi} \frac{\bar{z}_p-z_p}{(x-z_p)(x-\bar{z}_p)} + \frac{X-iY}{2\pi\kappa} \frac{\bar{z}_p-z_p}{(x-\bar{z}_p)^2} + \frac{iM(1+\kappa)}{2\pi\kappa(x-\bar{z}_m)^2}$$

Для периодических сил и моментов в полуплоскости с закрепленной кромкой функции Г.В. Колосова имеют вид

$$\Phi^P(z) = -\frac{X+iY}{2l(1+\kappa)} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(z-z_p)}{l} - \operatorname{ctg} \frac{\pi(z-\bar{z}_p)}{l} \right] + \frac{\pi(X-iY)}{2l^2(1+\kappa)\kappa \sin^2[\pi(z-\bar{z}_p)/l]} + \frac{i\pi M}{2l^2\kappa \sin^2[\pi(z-\bar{z}_m)/l]} \quad (4.15)$$

$$\Psi^P(z) = -\frac{X+iY}{2l(1+\kappa)} \left[-\operatorname{ctg} \frac{\pi(z-z_p)}{l} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(z-\bar{z}_p)}{l} \right] + \frac{\pi}{l} \frac{2H_p i + z}{\sin^2[\pi(z-z_p)/l]} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\pi}{l} \frac{z}{\sin^2[\pi(z - \bar{z}_p)/l]} \Big] + \frac{X - iY}{2l(1 + \kappa)} \left[\kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - z_p)}{l} - \kappa \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - \bar{z}_p)}{l} - \frac{\pi}{l\kappa} \frac{2H_p i}{\sin^2[\pi(z - \bar{z}_p)/l]} + \right. \\
& + \left. \frac{4\pi^2 H_p i z \operatorname{ctg}[\pi(z - \bar{z}_p)/l]}{\kappa l^2 \sin^2[\pi(z - \bar{z}_p)/l]} \right] - \frac{i\pi M}{2t^2} \left[\frac{1}{\sin^2[\pi(z - z_m)/t]} + \frac{1}{\kappa \sin^2[\pi(z - \bar{z}_m)/t]} - \right. \\
& \left. - \frac{2\pi z \operatorname{ctg}[\pi(z - \bar{z}_m)/t]}{\kappa t \sin^2[\pi(z - \bar{z}_m)/t]} \right]
\end{aligned}$$

Если, наконец, граница полуплоскости испытывает перемещения $u^* + iv_* = p_*(x) + iq_*(x)$, то к выражениям (4.11) и (4.12) нужно добавить соответственно следующие

$$\Phi_*(z) = -\frac{\mu}{\kappa\pi i} \int_{y=0} \frac{p'_*(x) + iq'_*(x)}{x-z} dx$$

$$\Psi_*(z) = -2\operatorname{Re} \Phi_*(z) - z\Phi'_*(z)$$

Работа написана при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 095-01-00335а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Melan E.* Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im innern beanspruchten Halbscheibe // ZAMM. 1932. Bd. 12. H. 6. S. 343–346.
2. *Stevenson A.C.* Complex Potentials in two-dimensional Elasticity // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1945. V. 184. № 99. P. 129–179.
3. *Green A.E., Zerna W.* Theoretical elasticity. Oxford: Clarendon Press, 1954. 442 p.
4. *Dundurs J.* Force in smoothly joined elastic half-plane // J. Eng. Mech. Divis. 1962. V. 88. № EM5. Pt.1. P. 25–40.
5. *Новожилов В.В.* Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
6. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
7. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
8. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
9. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
10. *Даль Ю.М.* О сосредоточенной силе у границы упругой полуплоскости // Докл. АН. 1994. Т. 338. № 1. С. 49–50.
11. *Колосов Г.В.* Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости. Л.; М.: ОНТИ, 1935. 224 с.
12. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962. 800 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию 3.IV.1996