

УДК 539.3

© 1998 г. Д. А. ПОЖАРСКИЙ, М. И. ЧЕБАКОВ

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О КЛИНОВИДНОМ ШТАМПЕ НА УПРУГОМ КОНУСЕ

Исследуется показатель особенности контактных напряжений в новой особой точке, являющейся пересечением вершины клиновидного штампа с вершиной упругого конуса. Трение в области контакта предполагается отсутствующим. В случае малых углов раствора штампа применяется асимптотический метод [1, 2], а для не слишком малых углов – численный метод выделения особенностей [3]. Показана возможность возникновения особенности, связанной с двукратностью корня характеристического уравнения, что для малых углов штампа может приводить к выходу действительных корней в комплексную область. Изучена зависимость частоты осцилляции контактных напряжений под штампом малого угла раствора в зависимости от угла упругого конуса.

Точное решение интегрального уравнения о давлении клиновидного штампа на упругое полупространство (частный случай конуса) получено в [4]. Однако из него затруднительно выделить особенности контактных давлений в вершине штампа.

1. Рассмотрим уравнения равновесия Ламе в сферической системе координат и применим метод разложения векторных функций по полной системе векторных гармоник на поверхности конуса при помощи интегрального преобразования Меллина и ряда Фурье [5]. В результате интегральное уравнение пространственной контактной задачи о вдавливании без трения клиновидного штампа угла раствора 2β ($\beta < \pi$) в упругий конус угла 2α (вершины штампа и конуса совпадают) получим в виде ($\theta = G/(1 - \nu)$, G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона):

$$\frac{\theta^{-1}}{4\pi^2} \int_{-\beta}^{\beta} d\psi \int_0^{\infty} q(x, \psi) dx \int_{\Gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_k(s, \alpha) e^{ik(\varphi - \psi)} \left(\frac{x}{r}\right)^{s + \frac{1}{2}} ds = f(r, \varphi) \quad (1.1)$$

$(0 \leq r < \infty, \quad \varphi \in (-\beta, \beta))$

где $q(x, \psi)$ – неизвестные нормальные контактные напряжения под штампами; $f(r, \varphi)$ – функция, определяемая формой основания штампов; Γ – прямая, параллельная мнимой оси в плоскости комплексного переменного s и лежащая в полосе $|\operatorname{Re} s| < 0.5$; символ ядра $L_k(s, \alpha)$ определяется формулами (контур Γ совпадает с мнимой осью):

$$L_k(s, \alpha) = \frac{f_0 + f_1 p + f_2 p^2 + f_3 p^3}{g_0 + g_1 p + g_2 p^2 + g_3 p^3}, \quad p = \frac{P_{s-0.5}^k(\cos \alpha)}{P_{s-0.5}^{k-1}(\cos \alpha)} \quad (1.2)$$

$$f_m = f_m(s, \alpha), \quad g_m = g_m(s, \alpha) \quad (m = 0, 1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned}
f_0 &= \cos^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha (s^2 - (k - 0.5)^2)^2 \\
f_1 &= -(s^2 - (k - 0.5)^2) \left[\cos^2 \alpha \left(\frac{s^2 - 0.25}{2} - 1 - 3k \operatorname{ctg}^2 \alpha \right) + \frac{k^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4(1 - \nu)} \right] \\
f_2 &= 0.5 \sin 2\alpha [-(s^2 - 0.25)(1.5 + k \operatorname{ctg}^2 \alpha) + 3k^2 - 2k] + \\
&+ (2k - 2.5k^2) \operatorname{ctg} \alpha + 2k^2 \operatorname{ctg}^3 \alpha - \frac{k^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4(1 - \nu)} (1 + 2k \operatorname{ctg}^2 \alpha) \\
f_3 &= \frac{\sin^2 \alpha}{2} (s^2 - 0.25) - \frac{k^2}{2} (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - k \left(\frac{1}{2} + \cos^2 \alpha \right) - \frac{k^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{4(1 - \nu)} \quad (1.3) \\
g_0 &= \operatorname{ctg}^2 \alpha (s^2 - (k - 0.5)^2)^2 [2(1 - \nu)(k^2 - 1) + (s^2 - 0.25) \sin^2 \alpha] \\
g_1 &= -(s^2 - (k - 0.5)^2) \{ 0.25 \sin 2\alpha (s^2 - 0.25)^2 + \\
&+ (s^2 - 0.25) [0.5(3k - 1) \sin 2\alpha - (1 - \nu + k^2 + 3k) \operatorname{ctg} \alpha] + \\
&+ 0.5k^2(k^2 - 1) \operatorname{ctg} \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha) - 6(1 - \nu)k(k^2 - 1) \operatorname{ctg}^3 \alpha \} \\
g_2 &= -0.5(s^2 - 0.25)^2 [1 + (2k - 3) \cos^2 \alpha] - (s^2 - 0.25) [(3k - 2)k \cos^2 \alpha - \\
&- k^2 - 2(k^2 + k)(k + 1 - \nu) \operatorname{ctg}^2 \alpha] - k^2(k^2 - 1) [0.5 + \\
&+ (k + 0.5 + 2(1 - \nu)) \operatorname{ctg}^2 \alpha + (k - 4(1 - \nu)) \operatorname{ctg}^4 \alpha] \\
g_3 &= -0.25 \sin 2\alpha [(s^2 - 0.25)^2 - 2(s^2 - 0.25)(k^2 + (k + k^2) \operatorname{ctg}^2 \alpha)] + \\
&+ 2k^2(1 + k)(1 - \nu) \operatorname{ctg}^3 \alpha - 0.5k^2(k^2 - 1) \operatorname{ctg} \alpha (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)
\end{aligned}$$

Здесь $P_s^k(\cos \alpha)$ — присоединенные функции Лежандра [6]. Самым эффективным способом убедиться в правильности вывода формул (1.2), (1.3) является проверка тождеств $L_{-k}(s, \alpha) \equiv L_k(s, \alpha)$ ($k = 1, 2, \dots$). При $k = 0$ из формул (1.2), (1.3) получаем известный символ ядра интегрального уравнения осесимметричной контактной задачи для конуса [7]:

$$\begin{aligned}
L_0(s, \alpha) &= \frac{-s_1(P)^2 - \operatorname{ctg} \alpha P P^1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha (P^1)^2}{s_1^2 \operatorname{ctg} \alpha (P)^2 - s_1 P P^1 + \operatorname{ctg} \alpha (s_1 - 2(1 - \nu) \sin^2 \alpha) (P^1)^2} \quad (1.4) \\
s_1 &= s^2 - 0.25, \quad P = P_{s-0.5}(\cos \alpha), \quad P^1 = P_{s-0.5}^1(\cos \alpha)
\end{aligned}$$

При $\alpha = \pi/2$, когда конус разворачивается в полупространство, из (1.2), (1.3) с учетом соотношения между $P_s^k(0)$ и Γ -функцией [6] вытекает известная формула [3]:

$$L_k\left(s, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\Gamma(s/2 + |k|/2 + 0.25) \Gamma(-s/2 + |k|/2 + 0.25)}{2\Gamma(s/2 + |k|/2 + 0.75) \Gamma(-s/2 + |k|/2 + 0.75)} \quad (1.5)$$

Важно выяснить асимптотику функции $L_k(s, \alpha)$ при $k \rightarrow \infty$ ($k \in \mathbb{Z}$). Для этого воспользуемся асимптотическим разложением при $k \rightarrow \infty$ ($k \in \mathbb{Z}$) для функции Лежандра [8, с. 158] вида

$$P_s^k(\cos \alpha) = \frac{\Gamma(s+k+1)\Gamma(k-s)}{\pi\Gamma(k+1)} \sin(\pi s) \operatorname{tg} \frac{k\alpha}{2} F\left(-s, s+1; 1+k; \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right),$$

где F – гипергеометрическая функция. Отсюда получим, что при $k \rightarrow \infty$ ($k \in \mathbb{Z}$):

$$P_{s-0.5}^k / P_{s-0.5}^{k-1} = p = (k-1) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha + O(1/k) \quad (1.6)$$

Внося (1.6) в (1.2), (1.3), после всех преобразований окончательно найдем, что

$$L_k(s, \alpha) = \sin \alpha / k + O(1/k^2), \quad k \rightarrow \infty \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (1.7)$$

Как доказано в [3, с. 123], показатель особенности функции контактных давлений $q(x, \psi)$ при $x \rightarrow 0$ связан с точками спектра интегрального оператора, возникающего в левой части уравнения (1.1) после применения к этому уравнению интегрального преобразования Меллина по r . При этом точки спектра не зависят от ϕ .

2. Используя прямое и обратное преобразование Меллина

$$\begin{aligned} \int_0^\infty q(x, \psi) x^{s-\frac{1}{2}} dx &= q_s^*(\psi), \quad q(x, \psi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} q_s^*(\psi) x^{-s-\frac{3}{2}} ds \\ \int_0^\infty f(r, \phi) r^{s-\frac{1}{2}} dr &= f_s^*(\phi), \quad f(r, \phi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f_s^*(\phi) r^{-s-\frac{1}{2}} ds \end{aligned} \quad (2.1)$$

а также четность функций $L_k(s, \alpha)$ по индексу, сведем двумерное уравнение (1.1) к одномерному уравнению, которое в новых обозначениях

$$q_s(\xi) = \frac{q_s^*(\psi)}{\theta}, \quad f_s(x) = \frac{f_s^*(\phi)}{\beta}, \quad x = \frac{\psi}{\beta}, \quad \xi = \frac{\phi}{\beta}, \quad \lambda = \frac{1}{\beta} \quad (2.2)$$

примет вид

$$\int_{-1}^1 q_s(\xi) K_s\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f_s(x), \quad |x| \leq 1 \quad (2.3)$$

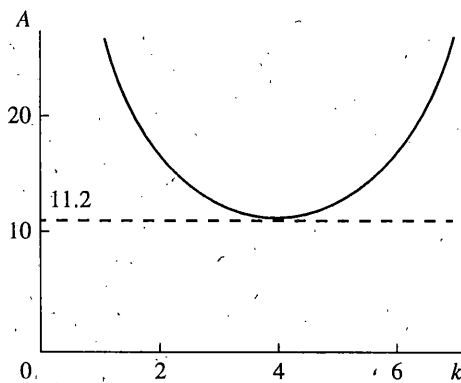
$$K_s(t) = \frac{1}{2} L_0(s, \alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} L_k(s, \alpha) \cos kt$$

Следуя работам [1, 2], можно построить асимптотическое решение уравнения (2.3) при $\lambda \rightarrow \infty$ (малые углы штампа). Учитывая асимптотику функции $L_k(s, \alpha)$ вида (1.7), ядро интегрального уравнения (2.3) можно представить в форме

$$\begin{aligned} K_s(t) &= \ln|t| l_1(t) + |t| l_2(t) + l_3(t) \\ l_n(t) &= \sum_{m=0}^M d_{nm} t^{2m} + O(t^{2M+2}), \quad d_{10} = -\sin \alpha \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если радиус сходимости этих рядов равен $\rho(\alpha)$, то при $\lambda > 2\rho^{-1}(\alpha)$ для решения уравнения (2.3), (2.4) применим асимптотический метод “больших λ ”. Пусть $f(r, \phi) = f t^\mu e^{-\epsilon r}$, ($\mu \geq \delta - 1$, $\delta > 0$, $\mu > 0$); при $\mu = 0$, $\epsilon \rightarrow 0$ такой штамп вырождается в плоский.

Тогда $f_s^*(\phi) = f \epsilon^{-\left(s+\frac{1}{2}+\mu\right)} \Gamma(s+0.5+\mu)$, $\operatorname{Re} s > -0.5 - \mu$. Пусть теперь β настолько мало,



Фиг. 1

что можно пренебречь членами порядка λ^{-1} и выше. Тогда решение задачи будет (ср. с [1, 2]):

$$q(x, \psi) = \frac{r\epsilon^{-\mu+1}}{2\pi i \sqrt{\beta^2 - \psi^2}} \int_{\Gamma} \frac{(x\epsilon)^{-s-\frac{3}{2}} \Gamma(s+0.5+\mu)}{g(s)} ds \quad (2.5)$$

$$g(s) = \sin \alpha [\ln(4\lambda) - C - 0.5\psi(0.5+s) - 0.5\psi(0.5-s)] + \frac{1}{2} \left[L_0(s, \alpha) - \sin \alpha L_0\left(s, \frac{\pi}{2}\right) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[L_k(s, \alpha) - \sin \alpha L_k\left(s, \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (2.6)$$

где C — постоянная Эйлера, $\psi(x)$ — пси-функция.

Характер распределения нулей функции $g(s)$ вида (2.6) при $\lambda \rightarrow \infty$ в полосе $|\operatorname{Re} s| \leq 3/2$ такой же, как и у соответствующих ей функций из [1, 2]. Именно,

$$\lim_{s \rightarrow 1/2} \left(s - \frac{1}{2}\right) g(s) = \lim_{s \rightarrow 1/2} \left(s - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} L_0(s, \alpha) = V(\alpha) = \frac{-\sin \alpha \cos^2(\alpha/2)}{1 + 2\nu \cos \alpha + \cos^2 \alpha} \quad (2.7)$$

При выводе соотношений (2.7) использовано, что [6]: $\lim P_s^1(\cos \alpha)/s = -\operatorname{tg}(\alpha/2)$ ($s \rightarrow 0$). Очевидно, что функция $V(\alpha) < 0$ при $0 < \nu \leq 1/2$, $0 < \alpha < \pi$, следовательно, $g(0.5 \pm 0) = \mp \infty$. Можно убедиться, что $g(i\infty) = -\infty$. Кроме того, при достаточно больших $\lambda g(0) > 0$ и $g(1.5 - 0) > 0$. Таким образом, при фиксированном угле α и $\lambda \rightarrow \infty$ функция $g(s)$ имеет в полосе $|\operatorname{Re} s| \leq 3/2$ по два однократных нуля на мнимой и действительной осях вида $s_{1,2} = \pm iA$, $A = A(\alpha, \lambda) = O(\lambda)$ ($\lambda \rightarrow \infty$), $s_{3,4} = \pm(0.5 + B)$, $B = B(\alpha, \lambda) \in (0; 1)$. При помощи теоремы Руше можно показать, что такая картина распределения нулей не изменится, если в методе "больших λ " удерживать большее число слагаемых в разложении искомых контактных давлений. Итак, независимо от формы основания штампа в разложении функции $q(x, \psi)$ при $x \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$ будут

присутствовать члены порядка $x^{-iA-\frac{3}{2}}$ (осцилляции) и x^{B-1} .

Исследуем влияние степени конусности упругого тела на найденные выше показатели A и B при фиксированном достаточно малом β . На фиг. приведена зависимость частоты осцилляции штампа A в зависимости от угла $\alpha = \pi k/8$ ($\beta = 0.2$, $\nu = 0.3$); штриховая линия соответствует такой же задаче для пространственного упругого клина угла раствора α [2]. Если частота осцилляций клиновидного штампа на упругом кли-

не мало зависит от угла раствора последнего, то для упругого конуса частота имеет минимум при $\alpha = \pi/2$ (полупространство), причем при $\alpha = \pi k/8$ и $\alpha = \pi - \pi k/8$, $k = 1, 2, 3$ различные соответствующих значений A не превышает 3%.

Расчеты показывают, что при фиксированном малом угле β и уменьшении угла α в полосу $|\operatorname{Re} s| \leq 3/2$ извне проникают два действительных корня уравнения $g(s) = 0$, которые затем соединяются с корнями $\pm(0.5 + B)$ и уходят с действительной оси в комплексную плоскость, т.е. при малых углах раствора конуса возникают дополнительные осцилляции (действительных корней при этом вообще нет). При этом двукратному действительному корню отвечает особенность порядка $x^{\beta-1}(c_1 + c_2 \ln x)$ [3]. Ниже описанный процесс иллюстрируется численными значениями корней $s = \pm 0.5 \pm 0.01n$ при $\beta = \lambda^{-1} = 0.05$, $\nu = 0.3$ в зависимости от угла $\alpha = \pi t/8$:

t	6	4	2	1.75	1.712	1.71	1
n	7	12	36	66 и 98	82 и 86	—	—

Заметим, что при вычислении значений присоединенных функций Лежандра $P_s^k(\cos \alpha)$ нельзя использовать рекуррентные формулы по верхнему индексу k [6], так как они дают значительное накопление погрешности при $k \rightarrow \infty$, особенно, при острых углах α . Здесь для вычисления значений $P_s^k(\cos \alpha)$ использовались формулы [6]:

$$P_{s-0.5}^k(x) = (-1)^k \frac{\Gamma(s+0.5+k)(1-x^2)^{k/2}}{\Gamma(s+0.5-k)2^k k!} F\left(k + \frac{1}{2} - s, k + \frac{1}{2} + s; k+1; \frac{1-x}{2}\right)$$

$$\frac{\Gamma(s+0.5+k)}{\Gamma(s+0.5-k)} = \left[s^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \left[s^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \dots \left[s^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2\right]$$

3. При не слишком малых углах 2β раствора штампа для анализа асимптотики функции контактных давлений в вершине клина эффективен метод, развитый в [3]. Можно доказать (см. формулу (13.7) при $\varepsilon = 0$ из [3]), что, если при $s = s_*$ детерминант $d(s)$ бесконечномерной матрицы с элементами $(m, n = 0, 1, \dots)$

$$a_{mn}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k(s, \alpha) J_m(\beta k) J_n(\beta k) \cos \pi \frac{m-n}{2} \quad (3.1)$$

обращается в нуль, то $q(x, \psi) \sim x^{-\gamma}$, $\gamma = 1.5 + s_*$ при $x \rightarrow 0$. Здесь $J_n(x)$ — функция Бесселя; штрих у знака суммы означает, что первый член ($k = 0$) ряда в (3.1) берется с коэффициентом 0.5. При $\beta > 0.1\pi$ достаточно урезать матрицу с элементами (3.1) до размерности 6, чтобы обеспечить три верные значащие цифры для нулей ее детерминанта [3]. Заметим, что поскольку четное число перестановок строк (столбцов) матрицы не меняет величину ее определителя, а нулевые элементы матрицы (3.1) расположены в шахечном порядке, детерминант $d(s)$ разлагается в произведение $d(s) = d^+(s)d^-(s)$, где $d^{\pm}(s)$ — детерминанты матриц с элементами $(m, n = 0, 1, \dots)$:

$$a_{mn}^+(s) = a_{2m, 2n}(s), \quad a_{mn}^-(s) = a_{2m+1, 2n+1}(s) \quad (3.2)$$

В таблице даны значения наибольшего показателя особенности γ , соответствующего вещественным нулям $d(s)$, $s \in (-1.5; -0.5)$ в зависимости от углов $\alpha = \pi m/8$ и $\beta = \pi n/8$ при $\nu = 0.3$. Везде в таблице главными, т.е. ближайшими к точке $s = -0.5$ являются корни уравнения $d^+(s) = 0$. При $m = 4$ (полупространство) табличные значения хорошо соответствуют кривой при $\varepsilon = 0$, изображенной на рис. 4.2 в [3]. По теореме о неявных функциях зависимость $s_*(\alpha, \beta)$ — корней уравнения $d(s) = 0$ от α и β аналитическая. Следовательно, при непрерывном изменении α и β эти корни вычерчивают в плоскости s непрерывные кривые. При $s = -0.5$ функция $d(s)$ имеет многократный полюс, т.к. он однократен для каждого элемента (3.1). Этот полюс может поглощать

m	$n = 1$	2	3	4	5	6	7
1	0.999	0.989	0.938	0.798	0.551	0.266	0.065
2	0.999	0.991	0.951	0.848	0.665	0.463	0.375
3	0.999	0.999	0.996	0.989	0.980	0.971	0.965
4	0.788	0.703	0.611	0.500	0.357	0.184	0.043
5	0.999	0.998	0.994	0.983	0.966	0.945	0.930
6	0.999	0.998	0.992	0.976	0.944	0.899	0.860
7	0.999	0.999	0.997	0.989	0.973	0.950	0.936

и выпускать нули функции $d(s)$ при непрерывном изменении углов α и β . При небольшом отклонении угла конуса 2α от π (от полупространства) в ту или другую сторону и фиксированном β из полюса $s = -0.5$ появляется новый нуль функции $d(s)$, дающий более сильную особенность функции $q(x, \psi)$ при $x \rightarrow 0$, чем тот корень уравнения $d(s) = 0$ в интервале $s \in (-1.5; -0.5)$, который был единственным при $2\alpha = \pi$. При дальнейшем плавном изменении α этот нуль меняется непрерывно, давая значения показателя особенности γ , приведенные в таблице.

Для углов β , близких к π , и значений $\alpha = \pi m/8$, $m = 2, 3, 5, 6$ появляется двукратный корень уравнения $d(s) = 0$ за счет одновременного обращения в нуль функций $d^+(s)$ и $d^-(s)$, например, при $\beta \approx 7.3\pi/8$, $\alpha = 3\pi/8$, $v = 0.3$ показатель $\gamma = 0.963$. Возникающая при этом особенность вида $x^{-\gamma}(c_1 + c_2 \ln x)$ может приводить к смене знака функции контактных давлений при $x \rightarrow 0$, т.е. к отрыву кончика штампа.

Расчеты показывают, что при $s \in (-0.5; 0]$, а также при чисто мнимых $sd(s) \neq 0$, т.е. при данном численном методе решения задачи не удастся найти корня, приводящего

к особенности порядка $x^{-iA - \frac{3}{2}}$, $A \in \mathbf{R}$. По-видимому, это связано с отказом в методе [3] от интегральных условий типа (1.2) из [1] или (1.4) [2], налагаемых на функции $q(x, \psi)$, $f(r, \phi)$, т.е. соответствующий комплексный корень существует в аналитическом решении при малых β только в предположении, что форма клиновидного штампа при $r \rightarrow \infty$ сходит на нуль, обеспечивая конечность интеграла от функции $q(x, \psi)$ по области контакта.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-00361).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.М., Бабешко В.А. О давлении на упругое полупространство штампа клиновидной формы в плане // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 88–93.
2. Александров В.М., Пожарский Д.А. О контактных напряжениях в вершине клиновидного штампа, выходящей на ребро упругого пространственного клина // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 135–141.
3. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
4. Васильев В.Б. Интегральное уравнение одной задачи о вдавлении клиновидного штампа // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 2. С. 272–279.
5. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наук. думка, 1985. 280 с.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
7. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.