

УДК 539.3

© 1998 г. И. Р. НАЗЫРОВ. А. Б. ФРЕЙДИН

ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ОБ УПРУГОМ ШАРЕ

Рассматривается задача о когерентном фазовом переходе в упругом шаре при всестороннем растяжении-сжатии. Предполагается, что фазы изотропны, деформации малы, а область новой фазы возникает либо внутри шара в виде шарового зародыша, либо развивается с поверхности шара в виде шарового слоя. Определяются области существования и исследуется энергетическая предпочтительность двухфазных конфигураций в зависимости от давления и параметров материала. Строятся диаграммы деформирования шара, претерпевающего фазовое превращение. Рассматривается роль учета поверхностной энергии в термодинамическом условии равновесия фаз и определяется размер критического зародыша.

Фазовые превращения (ФП) в процессе деформирования твердых тел могут рассматриваться с позиций нелинейной теории упругости, когда с ФП связывается возникновение в гиперупругом теле областей, ограниченных поверхностями разрыва деформаций [1–6]. При этом на равновесной границе фаз как поверхности разрыва деформаций кроме кинематического (сохранение сплошности) и силового (непрерывность усилия) условий дополнительно ставится термодинамическое условие равновесия – аналог равенства химических потенциалов при равновесии фаз в теории Гиббса [7].

Для такого взгляда имеются как интуитивные, так и формальные основания. Вследствие “собственных” деформаций и изменения модулей упругости, сопровождающих ФП, область новой фазы может рассматриваться как неоднородность, поле деформаций на границе которой, вообще говоря, разрывно. С другой стороны, подобно тому, как в классической теории ФП расслоение на фазы может быть связано с существованием в пространстве параметров состояния недостижимых областей неустойчивости материала, возникновение в упругом теле равновесного разрывного поля деформаций в случае достаточно гладкой зависимости плотности энергии от деформаций требует существования в пространстве деформаций области потери эллиптичности материала (нарушается неравенство Адамара) [8]. Это ограничение на определяющие соотношения приводит в свою очередь к диаграммам деформирования, аналогичным кривым Ван-дер-Ваальса при ФП “газ – жидкость” (см., например, [9, 10]).

Простейшей среди граничных задач описания ФП при деформировании твердых тел является одномерная задача о двухфазных состояниях изотропного упругого шара. Она позволяет апробировать различные подходы к рассмотрению ФП и продемонстрировать физические следствия развиваемых моделей [6, 11–13]. В данной работе фазовые превращения в упругом шаре в изотермических условиях при всестороннем растяжении-сжатии рассматриваются для случая малых деформаций на основе соотношений [14–16], сводящих задачу о равновесной двухфазной конфигурации к решению уравнений линейной теории упругости для неоднородных сред с дополнительным условием термодинамического равновесия, являющимся ограничением на геометрические параметры поверхности раздела фаз. Отметим, что из-за необходимости удовлетворить термодинамическому условию описание двухфаз-

ной конфигурации (ДК) является задачей с неизвестной границей. Предполагается, что граница фаз – сферическая. Тогда в результате простых вычислений определяются радиусы равновесной границы фаз в двухфазных конфигурациях двух типов: новая фаза распространяется из центра шара (ДК1) или с его поверхности (ДК2); в пространстве внешних параметров строятся области существования ДК. Эта часть задачи иным образом рассматривалась также в [6]. Далее анализируются энергетические изменения при развитии ДК. Показывается энергетическая предпочтительность возникновения ДК одного типа по сравнению с другим или сохранением однофазного состояния.

Строятся диаграммы деформирования и описывается эффект деформационного разупрочнения – падения давления с ростом средней объемной деформации, связанный с отрицательностью эффективного модуля объемного сжатия двухфазового тела на траектории ФП. Отмечается принципиальное различие задач с граничными условиями по перемещению или усилиям: квазистатический переход шара из одного фазового состояния в другое возможен при монотонном деформировании, но не нагружении (подобно тому, как это происходит при переходах газ – жидкость). Это также согласуется с проделанным анализом устойчивости на рассмотренном классе ДК. Демонстрируется блокирующая роль внутренних напряжений, возникающих в твердом теле вследствие ФП: каждой паре температура–давление соответствует вполне определенная часть шара, претерпевшая фазовое превращение, в отличие, например, от случая плавления, но аналогично зависимости концентрации новой фазы от температуры при мартенситных превращениях [17].

Обсуждается роль поверхностной энергии межфазной границы. Показывается существование критических зародышей, возникновение которых приводит к появлению “зубьев” на диаграмме деформирования. Учет энергии свободной поверхности шара вызывает дополнительную конкуренцию между развитием области новой фазы с поверхности или от центра шара.

1. Равновесная двухфазная конфигурация в случае малых деформаций. Задача о равновесных двухфазных конфигурациях упругого тела при бездиффузионных ФП с когерентной границей фаз в отсутствии объемных сил в случае малых деформаций может быть приведена к задаче определения поверхности раздела фаз Γ и соответствующего поля перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, достаточно гладкого при $\mathbf{x} \notin \Gamma$, непрерывного на Γ :

$$[\mathbf{u}] = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (1.1)$$

(\mathbf{x} – точка тела) и удовлетворяющего граничным условиям и условиям равновесия [14–16]:

$$\mathbf{x} \notin \Gamma: \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \theta = \text{const} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma: \mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\sigma}] = 0 \quad (1.3)$$

$$[f] - \boldsymbol{\sigma}^t : [\boldsymbol{\epsilon}] = 0 \quad (1.4)$$

$$f(\boldsymbol{\epsilon}, \theta) = \min_{-+} \{f^-(\boldsymbol{\epsilon}, \theta), f^+(\boldsymbol{\epsilon}, \theta)\} \quad (1.5)$$

$$f^\pm(\boldsymbol{\epsilon}, \theta) = f_0^\pm(\theta) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_\pm^f) : \mathbf{C}_\pm : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_\pm^f) \quad (1.6)$$

Здесь $\boldsymbol{\epsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2$ – тензор деформаций; θ – температура; $f(\boldsymbol{\epsilon}, \theta)$ – объемная плотность свободной энергии; $\boldsymbol{\sigma} = df/d\boldsymbol{\epsilon}$ – тензор напряжений; \mathbf{n} – единичный вектор нормали к границе фаз Γ ; T – символ транспонирования; индексами (–) и (+) обозначен материал в различных фазовых состояниях; в равенствах подразумевается соответствие верхних и нижних знаков (+), (–); квадратными скобками обозначено изменение величины при переходе от фазы (–) к фазе (+). \mathbf{C}_\pm – положительно-определенные тензоры модулей упругости фаз; параметры f_0^\pm и $\boldsymbol{\epsilon}_\pm^f$ имеют смысл плотностей свободной энергии и тензоров деформации фаз в ненапряженном состоянии (далее по-

лагаем $\epsilon_-^f = 0$, тогда $[\epsilon^f] = \epsilon^f$ – тензор деформации при гипотетическом фазовом переходе из одного однородного ненапряженного состояния в другое – “собственная” деформация превращения). Термоупругие напряжения, массовые силы и поверхностная энергия не учитываются (роль поверхностной энергии обсуждается ниже). Если C_{\pm} и ϵ_{\pm}^f не зависят от температуры, то параметр $\gamma(\theta) = [f_0]$ играет роль температуры.

Отметим, что в силу (1.1), (1.3) на границе фаз

$$\sigma_+ : [\epsilon] = \sigma_- : [\epsilon] \quad (1.7)$$

Условие (1.1) означает когерентность границы фаз. Условия (1.2), (1.3) – обычные для среды с включением. Дополнительное условие термодинамического равновесия (1.4) следует в случае малых деформаций из условий [1–4] на равновесной границе фаз нелинейно-упругого материала и, как можно показать, означает для равновесной когерентной границы фаз непрерывность μ_n – “химического потенциала на площадке с нормалью \mathbf{n} ”:

$$[\mu_n] = 0, \quad \mu_n = f - (1 + \vartheta)\sigma_{nn} - 2\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{n}$$

где последнее слагаемое отражает роль касательной составляющей вектора усилия.

Выбор зависимости свободной энергии в виде (1.5), (1.6) обусловлен следующими соображениями. В традиционном приближении малых деформаций плотность свободной энергии является квадратичной функцией $\boldsymbol{\epsilon}$, причем представление $f(\boldsymbol{\epsilon})$ полиномом выше второй степени по $\boldsymbol{\epsilon}$ некорректно [18]. При этом в случае знакоопределенного тензора модулей упругости невозможно существование разрывных по деформациям решений, удовлетворяющих условию (1.7).

Предположим, что $f(\boldsymbol{\epsilon})$ представима не одной, а по меньшей мере двумя квадратичными зависимостями общего вида $f^{\pm}(\boldsymbol{\epsilon}) = f_0^{\pm} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^f) : C_{\pm} : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^f)$, где f_0^{\pm} , $\boldsymbol{\epsilon}_{\pm}^f$ и положительно-определенные тензоры C_{\pm} – параметры, причем состояние материала на границе фаз при деформациях $\boldsymbol{\epsilon}_{\pm}$ определяется зависимостями $f^{\pm}(\boldsymbol{\epsilon})$ соответственно. Тогда на траектории деформационного процесса

$$\boldsymbol{\epsilon}(\eta) = \boldsymbol{\epsilon}_- + \eta[\boldsymbol{\epsilon}], \quad \eta \in [0, 1] \quad (1.8)$$

соединяющего сосуществующие деформации $\boldsymbol{\epsilon}_{\pm}$:

$$\varphi(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} f^+(\eta) - f^-(\eta) = [f] - \sigma_{\pm} : [\boldsymbol{\epsilon}] + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\epsilon}] : ((1 - \eta)^2 C_+ - \eta^2 C_-) : [\boldsymbol{\epsilon}] \quad (1.9)$$

$$\varphi'(\eta) = -[\boldsymbol{\epsilon}] : ((1 - \eta)C_+ + \eta C_-) : [\boldsymbol{\epsilon}] < 0, \quad \eta \in [0, 1], \quad [\boldsymbol{\epsilon}] \neq 0$$

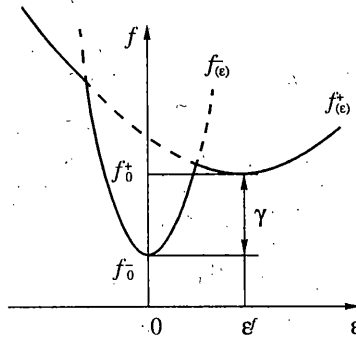
где $\psi(\eta) = \psi(\boldsymbol{\epsilon}(\eta))$, учтено равенство (1.7), штрих означает производную по η .

В силу (1.4) в случае равновесной границы фаз

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= [\boldsymbol{\epsilon}] : ((1 - \eta)^2 C_+ - \eta^2 C_-) : [\boldsymbol{\epsilon}] / 2 \\ \varphi(0) &= [\boldsymbol{\epsilon}] : C_+ : [\boldsymbol{\epsilon}] / 2 > 0, \quad \varphi(1) = -[\boldsymbol{\epsilon}] : C_- : [\boldsymbol{\epsilon}] / 2 < 0, \quad [\boldsymbol{\epsilon}] \neq 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Согласно (1.9), (1.10) на траектории (1.8) $\exists \eta_* \in (0, 1) : \varphi(\eta_*) = 0$ – необходимым условием выполнимости (1.3), (1.4) является пересечение парабол $f^+(\eta)$ и $f^-(\eta)$, причем

$$\varphi(\eta) > 0 \quad \text{при} \quad \eta < \eta_*, \quad \varphi(\eta) < 0 \quad \text{при} \quad \eta > \eta_*, \quad \eta \in [0, 1], \quad [\boldsymbol{\epsilon}] \neq 0 \quad (1.11)$$



Фиг. 1

Имея в виду, что состояниям в точках $\eta = 0$, $\eta = 1$ соответствуют параболы $f^-(\eta)$, $f^+(\eta)$, полагаем $f(\eta) = f^-(\eta)$ при $\eta < \eta_*$, $f(\eta) = f^+(\eta)$ при $\eta > \eta_*$, откуда с учетом (1.11) следует

$$f(\epsilon) = \min_{\pm} \{f^-(\epsilon), f^+(\epsilon)\}, \quad \epsilon = \epsilon(\eta), \quad \eta \in [0, 1] \quad (1.12)$$

Условия (1.11) и (1.12) следуют также из геометрических соображений. Так как согласно (1.7) и (1.4): $f^+(1) - f^-(0) = f^-(0) = f^+(1)$ (соотношения Максвелла), то параболы $f^-(\eta)$, $f^+(\eta)$ должны иметь общую касательную в точках $\eta = 0$, $\eta = 1$.

Распространив (1.12) на все пространство деформаций или его подобласть, получим (1.5), (1.6).

Подчеркнем, что рассматриваются не два материала с различными зависимостям свободной энергии (1.6), а один материал с энергией (1.5), (1.6), причем правило (1.5) выбора ветвей $f^\pm(\epsilon)$ является следствием положительной определенности тензора модулей упругости и условий равновесия на границе фаз.

Отметим, что функция $f(\epsilon)$, допускающая возникновение равновесных разрывных полей деформаций, может конструироваться из большего числа квадратичных и линейных зависимостей. Одномерный аналог зависимости свободной энергии, рассматриваемой в данной работе, изображен на фиг. 1.

Запишем условие (1.4) в виде зависимости между нормалью к границе и деформацией по одному из сторон границы. Зависимостям (1.6) соответствуют определяющие соотношения линейной теории упругости неоднородной среды

$$\sigma_{\pm}(\epsilon) = C_{\pm} : (\epsilon - \epsilon_{\pm}^f) \quad (1.13)$$

Аналогично тому, как это было сделано для границы раздела линейно-упругих материалов с различными модулями упругости [19, 20], можно показать, что если на границе фаз с определяющими соотношениями (1.13) выполнены условия (1.1), (1.3), то

$$[\epsilon] = K_{\mp}(\mathbf{n}) : \mathbf{q}_{\mp}, \quad [\sigma] = S_{\mp}(\mathbf{n}) : \mathbf{m}_{\pm} \quad (1.14)$$

$$\mathbf{m}_{\pm} = \mathbf{B}_1 : \sigma_{\pm} + [\epsilon^f], \quad \mathbf{q}_{\pm} = C_{\mp} : \mathbf{m}_{\pm} = -C_1 : \epsilon_{\pm} + [C : \epsilon^f] \quad (1.15)$$

$$C_1 = C_+ - C_-, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-, \quad \mathbf{B} = C^{-1}$$

$$K_{\pm}(\mathbf{n}) = \{\mathbf{n} \otimes (\mathbf{n} \cdot C_{\pm} \cdot \mathbf{n})^{-1} \otimes \mathbf{n}\}^s, \quad S_{\pm}(\mathbf{n}) = C_{\pm} : K_{\pm}(\mathbf{n}) : C_{\pm} - C_{\pm}$$

где s означает симметризацию четырехвалентного тензора по перестановке индексов внутри пар.

В силу (1.6), (1.14) условие термодинамического равновесия (1.4) может быть записано в следующих видах:

$$2\gamma + [\boldsymbol{\epsilon}^f : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^f] + \boldsymbol{\epsilon}_\pm : \mathbf{C}_1 : \boldsymbol{\epsilon}_\pm - 2\boldsymbol{\epsilon}_\pm : [\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^f] \pm \mathbf{q}_\pm : \mathbf{K}_\mp : \mathbf{q}_\pm = 0 \quad (1.16)$$

$$\gamma_* + \frac{1}{2} \mathbf{q}_\pm : (\mathbf{C}_1^{-1} \pm \mathbf{K}_\mp(\mathbf{n})) : \mathbf{q}_\pm = 0 \quad \left(\gamma_* = \gamma + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\epsilon}^f] : \mathbf{B}_1^{-1} : [\boldsymbol{\epsilon}^f] \right) \quad (1.17)$$

Отметим, что так как в силу тождества $\mathbf{C}_1 : (\mathbf{C}_1^{-1} - \mathbf{K}_+) : \mathbf{C}_1 = (\mathbf{C}_1^{-1} + \mathbf{K}_+)^{-1}$ и неотрицательной определенности тензоров \mathbf{K}_\mp тензоры $\mathbf{C}_1^{-1} \pm \mathbf{K}_\mp$ и \mathbf{C}_1 имеют одинаковую знакоопределенность, то для выполнимости условия (1.17) тензор $\gamma_* \mathbf{C}_1$ должен быть отрицательно-определенным, если тензор \mathbf{C}_1 — знакоопределен. Это ограничение на параметры материала (1.5) эквивалентно условию существования в пространстве деформаций поверхности разрыва производных (поверхности точек “излома”) $f(\boldsymbol{\epsilon})$, которая определяется уравнением $f^+(\boldsymbol{\epsilon}) = f^-(\boldsymbol{\epsilon})$, представимым, согласно (1.6), в видах

$$2\gamma + [\boldsymbol{\epsilon}^f : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^f] + \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C}_1 : \boldsymbol{\epsilon} - 2\boldsymbol{\epsilon} : [\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^f] = 0 \quad (1.18)$$

$$\gamma_* + \frac{1}{2} \mathbf{q} : \mathbf{C}_1^{-1} : \mathbf{q} = 0 \quad (\mathbf{q} = -\mathbf{C}_1 : \boldsymbol{\epsilon} + [\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^f]) \quad (1.19)$$

Эта поверхность заменяет в пространстве деформаций область потери эллиптичности материала, существование которой необходимо для возможности ФП в нелинейно-упругих материалах, имеющих достаточно гладкую зависимость плотности свободной энергии от деформаций [8] (см. также [9, 10]). Отметим, что за исключением специальных случаев расслоение на фазы происходит раньше, чем достигаются точки “излома” $f(\boldsymbol{\epsilon})$.

2. Радиус равновесной границы фаз и область существования двухфазных конфигураций в задаче о шаре. Пусть шар V радиуса R состоит из материала (1.5). На поверхности шара заданы постоянные радиальные перемещения

$$u|_R = u_0 \quad (2.1)$$

Рассмотрим двухфазные конфигурации с одной сферической поверхностью раздела фаз Γ неизвестного радиуса r_0 . Обозначим индексами (i) и (e) величины, относящиеся к областям $V_i : r \leq r_0$ и $V_e = V \setminus V_i$. Исследуем возможность возникновения равновесной области новой фазы от центра шара ($V_+ = V_i$ — ДК1) или с поверхности шара ($V_+ = V_e$ — ДК2).

Полагаем фазы изотропными

$$\mathbf{C}_\pm = \lambda_\pm \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + 2\mu_\pm \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_+^f = \boldsymbol{\epsilon}^f = (\vartheta^f/3)\mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_-^f = 0 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{K}^\pm(\mathbf{n}) = \xi^\pm (\mathbf{n} \otimes \mathbf{E} \otimes \mathbf{n})^s - \zeta^\pm \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$$

где \mathbf{I} — единичный четырехвалентный тензор, λ, μ — коэффициенты Ляме, ν — коэффициент Пуассона, $\xi = \mu^{-1}$, $\zeta = 1/(2\mu(1-\nu))$.

Тогда

$$\boldsymbol{\sigma}^{i,e} = (\lambda\vartheta - K\vartheta^f)_{i,e} \mathbf{E} + 2\mu_{i,e} \boldsymbol{\epsilon}^{i,e} \quad (2.3)$$

где $\vartheta^{i,e} = \text{tr} \boldsymbol{\epsilon}^{i,e}$, $K_{i,e}$ — модули объемного сжатия, $\vartheta_i^f = \vartheta^f$, $\vartheta_e^f = 0$ в случае ДК1, $\vartheta_i = 0$, $\vartheta_e^f = \vartheta^f$ в случае ДК2.

Радиальные перемещения в областях V_i и V_e имеют вид

$$u_{i,e} = A_{i,e}r + D_{i,e}/r^2 \quad (2.4)$$

где $A_{i,e}$, $D_{i,e}$ определяются условиями (2.1) и $[u]_{r_0} = 0$, $[\sigma_r]_{r_0} = 0$, $u|_{r=0}$ – конечное.

Поскольку в силу (2.3), (2.4):

$$\varepsilon_r^e = A_e - 2D_e/r^3, \quad \varepsilon_\theta^e = \varepsilon_\varphi^e = A_e + D_e/r^3, \quad \vartheta^e = 3A_e \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_r^i = \varepsilon_\theta^i = \varepsilon_\varphi^i = A_i, \quad \vartheta^i = 3A_i$$

$$\sigma_r^e = K_e(3A_e - \vartheta_e^f) - 4\mu_e D_e/r^3$$

$$\sigma_\theta^e = \sigma_\varphi^e = K_e(3A_e - \vartheta_e^f) + 2\mu_e D_e/r^3 \quad (2.6)$$

$$\sigma_r^i = \sigma_\theta^i = \sigma_\varphi^i = K_i(3A_i - \vartheta_i^f)$$

то нетрудно убедиться в том, что

$$A_e = (d_i \vartheta_0 - t \rho^3)/S(\rho^3), \quad D_e = R^3 \rho^3 (t - (K_i - K_e) \vartheta_0)/S(\rho^3) \quad (2.7)$$

$$A_i = (d_e \vartheta_0 + t(1 - \rho^3))/S(\rho^3), \quad D_i = 0$$

где $\vartheta_0 = 3u_0/R = V^{-1} \int \vartheta dV$ – средняя объемная деформация (задается граничными условиями), $\rho = r_0/R$, $d_{i,e} = K_{i,e} + 4/3\mu_e$, $S(\rho^3) = 3(d_i - (K_i - K_e)\rho^3)$, $t = K_i \vartheta_i^f - K_e \vartheta_e^f$.

Так как в силу (1.15), (2.2), (2.5) тензор $\mathbf{q}^i = -\mathbf{C}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}^i + \mathbf{C}_+ : \boldsymbol{\varepsilon}^f$ является шаровым

$$\mathbf{q}^i = q\mathbf{E} \quad (2.8)$$

$$q = (K_+ \vartheta^f - 3K_1 A_i) \quad (K_1 = K_+ - K_-) \quad (2.9)$$

то условие термодинамического равновесия (1.16) (или (1.17)) удобно использовать в виде:

$$2\gamma + \boldsymbol{\varepsilon}^f : \mathbf{C}_+ : \boldsymbol{\varepsilon}^f + \boldsymbol{\varepsilon}^i : \mathbf{C}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}^i - 2\boldsymbol{\varepsilon}^i : \mathbf{C}_+ : \boldsymbol{\varepsilon}^f \pm \mathbf{q}^i : \mathbf{K}^e : \mathbf{q}^i = 0 \quad (2.10)$$

или

$$\gamma_* + \frac{1}{2} \mathbf{q}^i : (\mathbf{C}_1^{-1} \pm \mathbf{K}^e(\mathbf{n})) : \mathbf{q}^i = 0 \quad (2.11)$$

Здесь и далее, если это специально не оговаривается, верхний и нижний из знаков (\pm) соответствуют ДК1 и ДК2.

Предположим, что $K_1 \neq 0$. Подставив (2.8) в (2.11) и учитывая равенства $\mathbf{E} : \mathbf{K}^e : \mathbf{E} = d_e^{-1}$, $\mathbf{E} : \mathbf{C}_1^{-1} : \mathbf{E} = K_1^{-1}$, $K_1^{-1} \pm d_e^{-1} = d_i/(d_e K_1)$, получим, что в случае равновесных ДК:

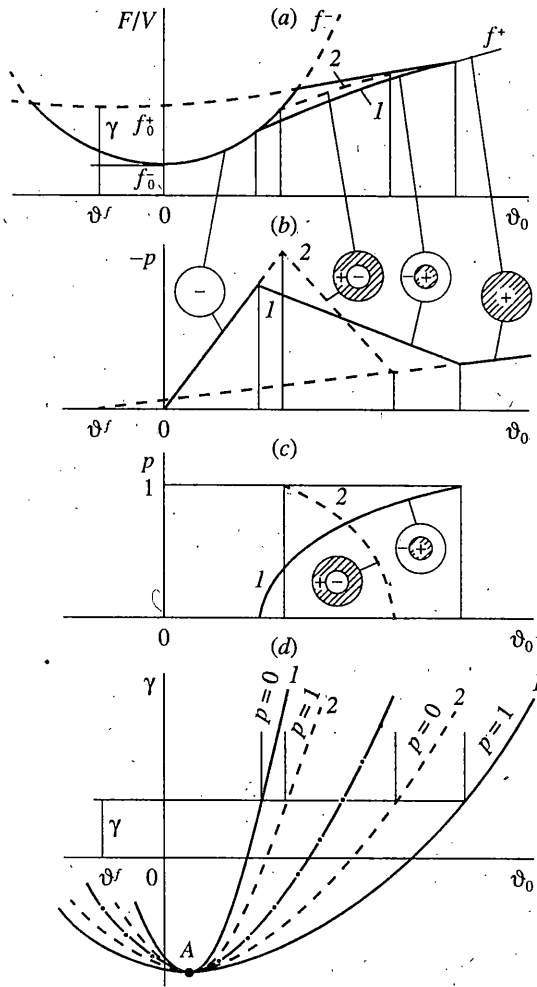
$$q^2 = -2(d_e/d_i) K_1 \gamma_* \quad (\gamma_* = \gamma - K_+ K_- (\vartheta^f)^2 / (2K_1)) \quad (2.12)$$

параметр q должен зависеть только от параметров материала (и типа ДК). Решение существует, если $K_1 \gamma_* < 0$.

Согласно (2.7), (2.9):

$$\rho^3 = \frac{3d_i A_i - d_e \vartheta_0 - t}{3(K_i - K_e) A_i - t} = \frac{d_i}{(K_i - K_e)} \pm \frac{d_e}{q} (\vartheta_0 - \vartheta_*) \quad (2.13)$$

$$\vartheta_* = t/(K_i - K_e) = K_+ \vartheta^f / K_1$$



Фиг. 2

Подставив в (2.13) равновесное значение q из (2.12), получим

$$\rho^3 = \frac{d_i}{(K_i - K_e)} \pm \frac{d_e}{(\pm q_*)} (\vartheta_0 - \vartheta_*) \quad (q_* = \sqrt{2(d_e/d_i)|K_1\gamma_*|}) \quad (2.14)$$

Выбор знака при q_* в (2.14) определяется условием $\rho \in [0, 1]$ и зависит от знака $(\vartheta_0 - \vartheta_*)$ — от того, в какой области пространства деформаций происходит ФП. Так как $d_i/(K_i - K_e) > 1$ при $K_i > K_e$ и $d_i/(K_i - K_e) < 0$ при $K_i < K_e$, то необходимо, чтобы

$$\text{sign } q = \mp \text{sign}(K_i - K_e) \text{sign}(\vartheta_0 - \vartheta_*) \quad (2.15)$$

откуда следует зависимость радиуса равновесной поверхности раздела фаз от внешних параметров ϑ_0, γ (фиг. 2, с):

$$\rho^3 = \frac{d_i}{(K_i - K_e)} - \text{sign}(K_i - K_e) \frac{d_e}{q_*} |\vartheta_0 - \vartheta_*| = \pm \left\{ \frac{d_i}{K_1} - \text{sign } K_1 |\vartheta_0 - \vartheta_*| \sqrt{\frac{d_i d_e}{2|K_1 \gamma_*|}} \right\} \quad (2.16)$$

Отметим, что на траектории превращения шара $\vartheta_0 < \vartheta_*$ или $\vartheta_0 > \vartheta_*$.

Из (2.9), (2.12), (2.15) следует, что при $\gamma = \text{const}$ коэффициент $A_i = (K_+ \vartheta^f - q)/(3K_1)$ остается постоянным в процессе ФП шара. Согласно (2.5)–(2.7), это означает, что при изменении ϑ_0 относительный радиус ρ равновесной границы фаз меняется так, что деформации и напряжения внутри области V_i остаются неизменными

$$\epsilon^i = (\vartheta^f/3)E, \quad \vartheta^i = (K_+ \vartheta^f - q)/K_1 \quad (2.17)$$

$$\sigma^i = -p_i E, \quad -p_i = K_i(\vartheta^i - \vartheta_i^f) = K_i(K_+ \vartheta^f - q)/K_1 \quad (2.18)$$

(q задано формулами (2.12), (2.15)). При этом, согласно (1.14), на равновесной границе фаз $[\epsilon] = q/d_e \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$, $\vartheta_\Gamma^e = \vartheta^i \mp q/d_e$ и, следовательно, в области V_e остаются неизменными

$$\vartheta^e = \vartheta_\Gamma^e = (K_+ \vartheta^f - q d_i/d_e)/K_1 \quad (2.19)$$

$$-p_e = K_e(\vartheta^e - \vartheta_e^f) = K_e(K_+ \vartheta^f - q d_i/d_e)/K_1 \quad (2.20)$$

В то же время из (2.13) следует, что началу (окончанию) и окончанию (началу) превращения шара в случае ДК1 (ДК2) соответствуют средние объемные деформации

$$\vartheta_0 = \begin{cases} (K_+ \vartheta^f - q d_i/d_e)/K_1, & \rho = 0 \\ (K_+ \vartheta^f - q)/K_1, & \rho = 1 \end{cases} \quad (2.21)$$

Из сравнения (2.17)–(2.20) и (2.21) следует, что объемные деформации и давления на равновесной границе фаз поддерживаются постоянными на всей траектории превращения шара и равны деформациям и давлениям в моменты начала и окончания превращения шара.

Области существования ДК на плоскости ϑ_0, γ определяются неравенствами

$$0 \leq \pm \left\{ \frac{d_i}{K_1} - \text{sign} K_1 |\vartheta_0 - \vartheta_*| \sqrt{\frac{d_i d_e}{2|K_1 \gamma_*|}} \right\} \leq 1 \quad (2.22)$$

и ограничены ветвями парабол

$$\gamma = -d_e K_1 (\vartheta_0 - \vartheta_*)^2 / (2d_i) + K_+ K_- (\vartheta^f)^2 / (2K_1) \quad (\rho = 0) \quad (2.23)$$

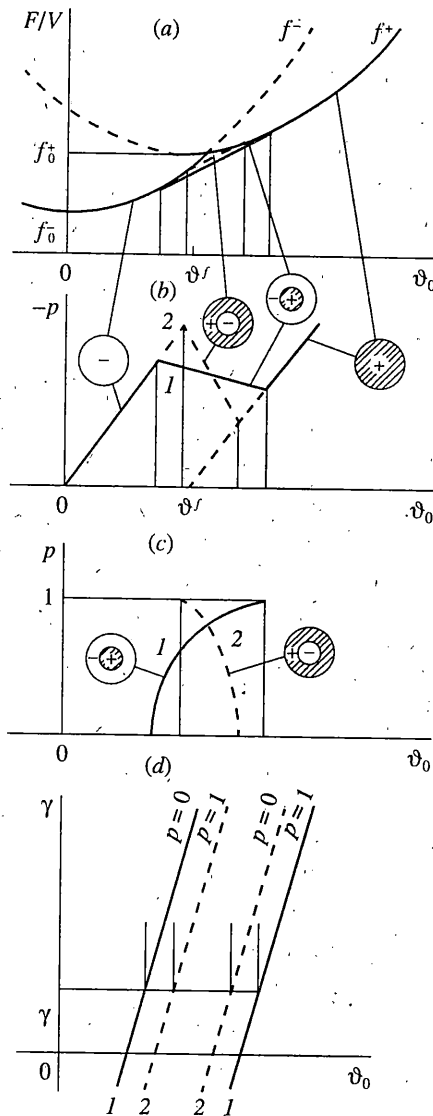
$$\gamma = -d_i K_1 (\vartheta_0 - \vartheta_*)^2 / (2d_e) + K_+ K_- (\vartheta^f)^2 / (2K_1) \quad (\rho = 1) \quad (2.24)$$

имеющими общую вершину в точке A ($\vartheta_*, K_+ K_- (\vartheta^f)^2 / (2K_1)$) (фиг. 2, d).

Отметим, что при $\epsilon = (\vartheta_0/3)E$ уравнение (1.19) имеет вид

$$\gamma_* + K_1 (\vartheta_0 - \vartheta_*)^2 / 2 = 0 \quad (2.25)$$

Парабола (2.25), делящая плоскость (ϑ_0, γ) на области определения плотностей свободной энергии $f^\pm(\vartheta_0)$ фаз (\pm), проходит между параболой (2.23), (2.24) (штрихпунктир на фиг. 2, d). Точки внутри параболы (2.25) соответствуют, согласно (1.5), однофазным состояниям с большим модулем объемного сжатия. В вершине парабол (2.23)–(2.25) $\gamma_* = 0$. Отметим, что соотношения (2.16)–(2.25) могут быть представлены в виде зависимостей безразмерных величин $\rho, p/(K_- \vartheta^f), \gamma/(K_- \vartheta^f)$ от ϑ_0/ϑ^f .



Фиг. 3

Так как $d_{i,e} = K_{+,-} + \frac{4}{3} \mu_{\pm}$ в случае ДК1 и $d_{i,e} = K_{-,+} + \frac{4}{3} \mu_{\pm}$ в случае ДК2, то различие областей существования ДК1 и ДК2 определяется только разностью модулей сдвига фаз $\mu_1 = \mu_+ - \mu_-$.

При $\mu_1 > 0$ область существования ДК с новой фазой, развивающейся с поверхности шара, лежит внутри области существования ДК с зародышем, развивающимся изнутри; при $\mu_1 < 0$ — обратное вложение областей (фиг. 2, d). Аналогичные закономерности при ином рассмотрении ФП были получены в [6].

В случае $K_1 = 0$ (фиг. 3) условие фазового равновесия используем в виде (2.10). Так как при этом, согласно (2.9), $q^i = K \vartheta^i E$, то в силу (2.10):

$$\gamma + K(\vartheta^f)^2/2 - 3K\vartheta^f A_i \pm K^2(\vartheta^f)^2/(2d) = 0 \quad (2.26)$$

откуда с учетом (2.7) следует, что

$$\rho^3 = \frac{1}{2} \pm \frac{d}{K\vartheta^f} \left(\vartheta_0 - \frac{\vartheta^f}{2} - \frac{\gamma}{K\vartheta^f} \right) \quad (2.27)$$

$$d = K + \frac{4}{3}\mu_e, \quad d/K = 3(1 - \nu_e)/(1 + \nu_e)$$

Отметим, что $q_* \rightarrow K\vartheta^f$ при $K_1 \rightarrow 0$, так как

$$K_1\gamma_* \rightarrow -(K\vartheta^f)^2/2 \quad \text{при} \quad K_1 \rightarrow 0 \quad (2.28)$$

Область существования ДК $\rho \in [0, 1]$ на плоскости ϑ_0, γ :

$$\left| \vartheta_0 - \frac{\vartheta^f}{2} - \frac{\gamma}{K\vartheta^f} \right| \leq \frac{K|\vartheta^f|}{2d}$$

ограничена для каждого типа ДК двумя параллельными прямыми $\gamma = K\vartheta^f(\vartheta_0 - \frac{1}{2}\vartheta^f(1 \mp \mp K/d))$, где знаки (-) и (+) в случае ДК1 соответствуют $\rho = 0$ и 1, в случае ДК2 - $\rho = 1$ и 0. Как и в случае $K_1 \neq 0$, при $\mu_1 > 0$ область существования ДК2 лежит внутри области существования ДК1; при $\mu_1 < 0$ вложение будет обратным (фиг. 3, d).

3. Энергетические изменения при развитии ДК. Из предыдущего рассмотрения следует, что условия равновесия (1.2) (1.3) для материала (1.5) в некотором диапазоне значений ϑ_0 могут быть одновременно удовлетворены для ДК1 и ДК2. Кроме того, всегда возможна одна из однофазных конфигураций (+) или (-). Полагая далее, что из рассмотренных конфигураций при заданном ϑ_0 реализуется та, свободная энергия которой меньше, определим $\min\{F_{\pm}, F_1^f, F_2^f\}$, где F_{\pm} и $F_{1,2}^f$ - свободные энергии однофазных конфигураций (\pm) и равновесных ДК1, ДК2:

$$F_{\pm} = \int_V f_{\pm}(\epsilon_0) dV, \quad F_{1,2}^f = \int_{V_i} f_{+,-}(\epsilon) dV + \int_{V_e} f_{-,+}(\epsilon) dV$$

где ϵ_0 - поле деформаций в шаре, если бы он при тех же граничных условиях (2.1) находился в однофазном состоянии.

Для сравнения энергий, не конкретизируя ДК, определим разности $F - F_e$ и $F - F_i$ свободных энергий тела V , ограниченного поверхностью Ω в произвольном, необязательно равновесном в смысле условия (1.4) двухфазном состоянии $V = V_i \cup V_e$ и однофазных состояний i, e при одном и том же граничном условии $u|_{\Omega} = u_0$. Так как

$$F_{i,e} = \int_V f_{i,e}(\epsilon_0) dV, \quad F = \int_{V_e} f_e(\epsilon^e) dV + \int_{V_i} f_i(\epsilon^i) dV$$

то

$$F - F_e = \int_{V_e} (f_e(\epsilon^e) - f_e(\epsilon_0)) dV + \int_{V_i} (f_i(\epsilon^i) - f_e(\epsilon_0)) dV$$

Из (1.6), (1.13) следует

$$f_e(\epsilon^e) - f_e(\epsilon_0) = \frac{1}{2}(\sigma^e + \sigma_0^e) : (\epsilon^e - \epsilon_0)$$

$$f_i(\boldsymbol{\epsilon}^i) - f_e(\boldsymbol{\epsilon}_0) = \pm \left(\gamma + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\epsilon}^f : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^f] - \frac{1}{2} (\mathbf{q}^i : \boldsymbol{\epsilon}_0 + \boldsymbol{\epsilon}^i : [\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^f]) \right) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}^i + \boldsymbol{\sigma}_0^e) : (\boldsymbol{\epsilon}^i - \boldsymbol{\epsilon}_0)$$

где $\boldsymbol{\sigma}_0^e = \mathbf{C}_e : (\boldsymbol{\epsilon}_0 - \boldsymbol{\epsilon}_e^f)$, верхний и нижний из знаков (\pm) соответствуют случаям $V_i = V_+$ и $V_i = V_-$.

Тогда, учитывая (1.2), (1.3) и формулу Остроградского – Гаусса, получим

$$\begin{aligned} F - F_e &= \pm \int_{V_i} \left(\gamma + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\epsilon}^f : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^f] - \frac{1}{2} (\mathbf{q}_0 : \boldsymbol{\epsilon}^i + \boldsymbol{\epsilon}_0 : [\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^f]) \right) dV = \\ &= \pm \int_{V_i} \left(\gamma_* + \frac{1}{2} \mathbf{q}^i : \mathbf{C}_1^{-1} : \mathbf{q}_0 \right) dV, \quad \mathbf{q}_0 = -\mathbf{C}_1 : \boldsymbol{\epsilon}_0 + [\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^f] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Далее рассмотрим равновесные ДК, в которых $\boldsymbol{\epsilon}^i(\mathbf{x}) = \text{const}$, $\boldsymbol{\epsilon}_0(\mathbf{x}) = \text{const}$ при $\mathbf{x} \in V_i$. В силу (2.10), (2.11) и (1.14) в виде $\mathbf{K}^e : \mathbf{q}^i = \pm (\boldsymbol{\epsilon}^i - \boldsymbol{\epsilon}_e^f)$ из (3.1) следует

$$\frac{1}{V} (F^f - F_e) = \pm \frac{c_i}{2} \mathbf{q}^i : (\boldsymbol{\epsilon}_\Gamma^e - \boldsymbol{\epsilon}_0) \quad (3.2)$$

где F^f – энергия равновесной ДК, $c_i = V_i/V$, $\boldsymbol{\epsilon}_\Gamma^e$ – тензор $\boldsymbol{\epsilon}^e$ на границе Γ . Так как

$$F^f - F_i = F^f - F_e + (F_e - F_i) = \pm \frac{c_i}{2} V \mathbf{q}^i : (\boldsymbol{\epsilon}_\Gamma^e - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \int_V (f_e(\boldsymbol{\epsilon}_0) - f_i(\boldsymbol{\epsilon}_0)) dV$$

$$\begin{aligned} f_e(\boldsymbol{\epsilon}_0) - f_i(\boldsymbol{\epsilon}_0) &= \mp \left(\gamma + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\epsilon}^f : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^f] - \frac{1}{2} (\mathbf{q}_0 : \boldsymbol{\epsilon}_0 + \boldsymbol{\epsilon}_0 : [\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^f]) \right) = \\ &= \mp \left(\gamma_* + \frac{1}{2} \mathbf{q}_0 : \mathbf{C}_1^{-1} : \mathbf{q}_0 \right) \end{aligned}$$

то, учитывая (1.14), (2.10), (2.11), получим при $\boldsymbol{\epsilon}_0(\mathbf{x}) = \text{const}$ ($\mathbf{x} \in V$):

$$(F^f - F_i)/V = \mp \frac{1}{2} ((1 - c_i) \mathbf{q}^i : (\boldsymbol{\epsilon}_\Gamma^e - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \mathbf{q}_0 : (\boldsymbol{\epsilon}^i - \boldsymbol{\epsilon}_0)) \quad (3.3)$$

В случае рассматриваемого двухфазного шара, подставляя (2.8), (2.17), (2.19) в (3.2), (3.3) и используя (2.13), получим

$$\frac{1}{V} (F_{1,2}^f - F_e) = -\frac{q_*^2}{2d_e} (\rho_{1,2}^3)^2 < 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{V} (F_{1,2}^f - F_i) = -\frac{q_*^2 d_i}{2d_e^2} (1 - \rho_{1,2}^3)^2 < 0 \quad (3.5)$$

где ρ_1 и ρ_2 – радиусы равновесных границ фаз в ДК1 и ДК2.

Осталось рассмотреть $F_2^f - F_1^f$. Согласно (2.12), (3.4), (3.5):

$$F_2^f - F_1^f = (F_2^f - F_-) - (F_1^f - F_-) = V(K_1 \gamma_*) \left(\frac{(1 - \rho_2^3)^2}{g_+} - \frac{\rho_1^6}{b_+} \right) \quad (3.6)$$

$$b_{\pm} = K_{\pm} + \frac{4}{3}\mu_{\pm}, \quad g_{\pm} = K_{\pm} + \frac{4}{3}\mu_{\pm}, \quad K_1 \neq 0$$

Подставив (2.16) в (3.6), получим

$$\frac{1}{V}(F_2^f - F_1^f) = -\frac{4}{3}\mu_1 \left| \frac{\gamma_*}{K_1} \right| (1 - 2yM + y^2) \quad (3.7)$$

$$y = |\vartheta_0 - \vartheta_*| \sqrt{|K_1 / (2\gamma_*)|}$$

$$M = 3(\sqrt{g_+ g_-} - \sqrt{b_+ b_-}) / (4\mu_1) \quad (3.8)$$

Покажем, что в области существования ДК1 и ДК2:

$$1 - 2yM + y^2 < 0 \quad (3.9)$$

то есть

$$y \in (M - \sqrt{M^2 - 1}, M + \sqrt{M^2 - 1}) \quad (3.10)$$

Отметим, что согласно (3.8):

$$M = \frac{3(K_+ + K_-) + 4(\mu_+ + \mu_-)}{3(\sqrt{b_+ b_-} + \sqrt{g_+ g_-})} = \frac{b_+ + b_- + g_+ + g_-}{2(\sqrt{b_+ b_-} + \sqrt{g_+ g_-})} > 1$$

Согласно (2.22):

$$\text{sign}(K_i - K_e) \sqrt{d_e / d_i} \leq \text{sign}(K_i - K_e) y \leq \text{sign}(K_i - K_e) \sqrt{d_i / d_e}$$

Так как при этом в области одновременного существования ДК1 и ДК2 $g_{\mp} / \sqrt{g_+ g_-} \leq y \leq g_{\pm} / \sqrt{g_+ g_-}$, если $\mu_1 > 0$, $b_{\pm} / \sqrt{b_+ b_-} \leq y \leq b_{\mp} / \sqrt{b_+ b_-}$, если $\mu_1 < 0$, то (3.10) заведомо выполнено в случае $\mu_1 > 0$, если

$$M - \sqrt{M^2 - 1} \leq g_{\mp} / \sqrt{g_+ g_-}, \quad g_{\pm} / \sqrt{g_+ g_-} < M + \sqrt{M^2 - 1} \quad (3.11)$$

а в случае $\mu_1 < 0$, если

$$M - \sqrt{M^2 - 1} < b_{\pm} / \sqrt{b_+ b_-}, \quad b_{\mp} / \sqrt{b_+ b_-} < M + \sqrt{M^2 - 1}$$

Здесь верхние и нижние из знаков (\pm) соответствуют случаям $K_e > K_i$ и $K_e < K_i$.

Рассмотрим правое из неравенств (3.11) в случае $K_e > K_i$:

$$M + \sqrt{M^2 - 1} > g_+ / \sqrt{g_+ g_-} \quad (3.12)$$

Подставив M из (3.8) в (3.12) и возведя обе части неравенства в квадрат, получим очевидное неравенство

$$(g_+ b_- + g_- b_+) / 2 > \sqrt{b_+ b_- g_+ g_-}$$

Остальные неравенства доказываются аналогично.

Таким образом, согласно (3.7), (3.9), знак разности $F_2^f - F_1^f$ определяется знаком μ_1 : $F_2^f > F_1^f$, если $\mu_1 > 0$; $F_2^f < F_1^f$, если $\mu_1 < 0$. Такие же соотношения выполняются и в случае $K_1 = 0$.

Для исследования устойчивости определим знак второй производной $\partial^2 F / \partial z^2 = \partial^2 (F - F_e) / \partial z^2$, где $F = F(\vartheta_0, z)$, $z = \rho^3$, причем, согласно (3.1), в случае двухфазного шара при $K_1 \neq 0$

$$(F - F_e) / V = \pm z \left(\gamma_* + \frac{1}{2} \mathbf{q}^i : \mathbf{C}_1^{-1} : \mathbf{q}_0 \right) \quad (3.13)$$

Дифференцируя (3.13) по z , учитывая соотношения (2.8), (2.9) и (2.7), получим

$$\frac{1}{V} \frac{\partial F}{\partial z} = \pm \left(\gamma_* + \frac{d_i d_e K_1 (\vartheta_0 - \vartheta_*)^2}{2(d_i - (K_i - K_e) \rho^3)^2} \right) \quad (3.14)$$

В случае $K_1 = 0$:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{(K \vartheta^f)^2}{d} \left(\rho^3 - \frac{1}{2} \mp \frac{d}{K \vartheta^f} \left(\vartheta_0 - \frac{\vartheta^f}{2} - \frac{\gamma}{K \vartheta^f} \right) \right) \quad (3.15)$$

Тогда

$$\frac{1}{V} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{d_i d_e (K_+ \vartheta^f - K_1 \vartheta_0)^2}{(d_i - (K_i - K_e) \rho^3)^3} \geq 0 \quad (3.16)$$

так как $d_i - (K_i - K_e) \rho^3 > 0$ при $\rho \in [0, 1]$, причем, если $K_1 \neq 0$, $d_i d_e \neq 0$, то вторая производная свободной энергии обращается в ноль только при $\vartheta_0 = \vartheta_*$.

Конечно же для равновесной ДК:

$$\partial F(\vartheta_0, z) / \partial z = 0 \quad (3.17)$$

(из (3.14), (3.15) и (3.17) следует (2.16), (2.27)).

Так как в вершине парабол (2.23), (2.24) $\partial F / \partial z = \partial^2 F / \partial z^2 = 0$, то эта точка может быть отождествлена с критической.

Если на части границы тела Ω' заданы усилия $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{\Omega'} = \mathbf{t}$, то устойчивость и энергетическая предпочтительность состояний тела определяются энергией Гиббса $G = F - \int_{\Omega} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} d\Omega$. Аналогично (3.1) можно показать [14], что изменение энергии Гиббса при возникновении в теле произвольной области новой фазы при фиксированных \mathbf{t} :

$$G - G_e = \pm \int_{V_i} \left(\gamma_* - \frac{1}{2} \mathbf{m}^i : \mathbf{B}_1^{-1} : \mathbf{m}_0 \right) dV \quad (3.18)$$

где G и G_e – энергии Гиббса тела в двухфазном состоянии и однофазном состоянии e при одних и тех же граничных условиях, $\mathbf{m}^i = \mathbf{B}_1 : \boldsymbol{\sigma}^i + [\boldsymbol{\varepsilon}^i]$, $\mathbf{m}_0 = \mathbf{B}_1 : \boldsymbol{\sigma}_0 + [\boldsymbol{\varepsilon}^i]$, $\boldsymbol{\sigma}_0$ – поле напряжений в теле V , если бы оно было однофазным, верхний и нижний из знаков (\pm) соответствуют случаям $V_i = V_+$ и $V_i = V_-$.

В случае $\boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{x}) = \text{const}$, $\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x}) = \text{const}$ ($\mathbf{x} \in V_i$), аналогично (3.2), (3.3):

$$\frac{1}{V} (G - G_e) = \pm \frac{c_i}{2} \mathbf{m}^i : (\boldsymbol{\sigma}_i^e - \boldsymbol{\sigma}_0)$$

$$\frac{1}{V}(G - G_i) = \mp \frac{1}{2}((1 - c_i)m^i : (\sigma_r^e - \sigma_0) + m_0 : (\sigma^i - \sigma_0))$$

где G_i – энергия Гиббса тела в однофазном состоянии (i). Тогда в случае рассматриваемого шара, определив $A_{i,e}$, $D_{i,e}$ при условии $\sigma_r|_R = -p$ и учитывая, что $m^i = mE$, $m = (\vartheta^f/3 - K_1 a_i/K_e)$, $a_i = A_i - \vartheta_i^f/3$, получим в противоположность (3.4), (3.5) и (3.16):

$$\frac{1}{V}(G_{1,2}^f - G_e) = \frac{6K_e \mu_e}{d_e} m_*^2 (\rho_{1,2}^3)^2 \geq 0, \quad m_* = \left(\frac{2d_e K_1 \gamma_*}{9d_i K_e^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{V}(G_{1,2}^f - G_i) = \frac{6K_e^2 \mu_e d_i}{K_i d_e^2} m_*^2 (1 - \rho_{1,2}^3)^2 \geq 0 \quad (3.19)$$

$$\left. \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \right|_p = \frac{36\mu_e d_i d_e (K_1 p - K_+ K_+ \vartheta^f)^2}{(3K_e d_i + 4\mu_e (K_i - K_e) \rho^3)^3} \leq 0, \quad \rho \in [0, 1]$$

где $G_{1,2}^f$ – энергия Гиббса равновесного двухфазного шара в случаях ДК1 и ДК2.

Таким образом, из соотношений (3.4), (3.5), (3.7), (3.16), (3.19) следует, что:

1. Если при заданных параметрах ϑ_0 , γ существует равновесная ДК, то ее свободная энергия меньше энергии однофазных конфигураций. Независимо от параметров K_1 и ϑ^f в случае $\mu_1 > 0$ энергетически предпочтительным является развитие новой фазы из центра шара, при $\mu_1 < 0$ – с поверхности шара (что согласуется с вложением областей существования ДК1 и ДК2).

2. Если внешними параметрами являются давление p и γ , то энергия Гиббса равновесных ДК больше энергии Гиббса соответствующих однофазных конфигураций.

3. Равновесные ДК устойчивы на рассматриваемом классе ДК, если на поверхности шара заданы перемещения и неустойчивы, если задано давление.

4. Построение диаграмм деформирования. Согласно (2.6), (2.7), внешнее давление

$$-p = \sigma_r^e|_{r=R} = K_e(\vartheta_0 - \vartheta_e^f) + 3d_e \rho^3 (\vartheta_0(K_i - K_e) - t)/S(\rho^3) \quad (4.1)$$

Подставив в (4.1) равновесное значение ρ^3 из (2.16), получим зависимость внешнего давления p от средней объемной деформации ϑ_0 на траектории перехода шара из одного фазового состояния в другое

$$-p = k^f(\vartheta_0 - \vartheta_*) + p^f \quad (4.2)$$

где $k^f = -\frac{4}{3}\mu_e < 0$ – эффективный модуль объемного сжатия шара

$$p^f = K_+ K_+ \vartheta^f / K_1 + \text{sign}(\vartheta_0 - \vartheta_*) \sqrt{2d_i d_e |\gamma_* / K_1|} \quad (4.3)$$

В случае $K_1 = 0$ вместо (4.2), (4.3) имеем, соответственно

$$-p = k^f(\vartheta_0 - \vartheta^f/2 - \gamma/(K\vartheta^f)) + p^f, \quad k^f = -\frac{4}{3}\mu_e \quad (4.4)$$

$$p^f = \gamma/\vartheta^f \quad (4.5)$$

Отметим, что зависимости (4.2), (4.4) могут быть также легко получены дифференцированием свободной энергии

$$-p = \frac{1}{V} \frac{dF^f}{d\vartheta_0} = \frac{1}{V} \frac{d}{d\vartheta_0} (F^f - F_e) + \frac{1}{V} \frac{dF_e}{d\vartheta_0}$$

где $(F - F_e)/V$ определяется равенством (3.4), $\rho = \rho(\vartheta_0)$ – равенствами (2.16), (2.27).

Кривые деформирования, соответствующие ДК1, ДК2, приведены на фиг. 2, *b* (для случая $\vartheta_0 > \vartheta_*$) и фиг. 3, *b*. Шар ведет себя как кусочно-линейное упругое тело. Предпочтительность ДК1 и ДК2 в зависимости от знака μ_1 согласуется с выводами, сделанными в п. 3. Так как $k^f < 0$ при $\mu_e > 0$, то траектория ФП характеризуется деформационным разупрочнением – падением давления с ростом деформации. В результате этого непрерывный переход шара из одного фазового состояния в другое путем развития области новой фазы от центра или с поверхности возможен при монотонном деформировании и невозможен при монотонном нагружении, что согласуется с проделанным выше анализом локальной устойчивости.

Отметим, что в предельном случае $\mu_- > 0$, $\mu_+ = 0$ (плавление) ФП начинается с поверхности, в случае $\mu_- = 0$, $\mu_+ > 0$ (кристаллизация) – от центра шара. В обоих случаях $k^f = 0$ и, следовательно, $p = p^f$ – давление не меняется на траектории перехода и зависит от “температуры” γ согласно (4.3) или (4.5). Область существования ДК на плоскости p, γ в случае $\mu_e = 0$ вырождается в линию $p = p^f(\gamma)$ (фазовую диаграмму):

$$\gamma_* = -2K_+K_-(p + p_*)^2/K_1 \quad (p_* = K_+K_-\vartheta^f/K_1, K_1 \neq 0)$$

$$\gamma = -p\vartheta^f \quad (K_1 = 0)$$

В отличие от случая твердых фаз ($\mu_{\pm} \neq 0$), когда из-за блокирующей роли внутренних напряжений каждой паре давление–температура, допускающей фазовое равновесие, соответствует вполне определенная часть шара, претерпевшая превращение, в случае $\mu_+ = 0$ или $\mu_- = 0$ при пересечении фазовой диаграммы происходит полное превращение.

5. О роли поверхностной энергии. Учет поверхностной энергии приводит к изменению как силового, так и термодинамического условий на границе фаз [21–23]. Полный анализ, учитывающий влияние поверхностного натяжения на напряженное состояние двухфазного тела, является предметом специального исследования. Тем не менее качественные эффекты могут быть достаточно просто описаны, если учитывать аддитивно вклад поверхностной энергии в свободную энергию, пренебрегая влиянием поверхностного натяжения на напряжения. Тогда свободная энергия однофазных и двухфазного состояний

$$F_{\pm}^{\alpha} = \int_V f_{\pm}(\epsilon_0) dV + \alpha_{\pm} \int_{\Omega} dS$$

$$F^{\alpha} = \int_{V_i} f_i(\epsilon) dV + \int_{V_e} f_e(\epsilon) dV + \alpha_e \int_{\Omega} dS + \sigma \int_{\Gamma} dS$$

где $\alpha_e = \alpha_{\mp}$ и α – плотности поверхностной энергии на свободной поверхности шара и границе фаз.

При таком рассмотрении по сравнению с п. 1 изменится только условие термодинамического равновесия на границе фаз

$$[f] - \sigma : [\epsilon] = \mp 2\alpha/r_0 \quad (5.1)$$

которое приводится к виду

$$\gamma_*^\alpha(\rho) + \frac{1}{2} \mathbf{q}^i : (\mathbf{C}_1^{-1} \pm \mathbf{K}^e) : \mathbf{q}^i = 0, \quad (\gamma_*^\alpha(\rho) = \gamma_* \pm 2\alpha/(R\rho)) \quad (5.2)$$

Подставив (2.8) в (5.2), получим, что в случае равновесной ДК:

$$q^2 = -2(d_e/d_i)K_1\gamma_*^\alpha(\rho) \equiv (q_\alpha)^2 \quad (5.3)$$

Из (2.8), (2.13), (5.3) получаем уравнение для радиуса равновесной поверхности раздела фаз ($K_1 \neq 0$):

$$\rho^3 = \pm \left\{ \frac{d_i}{K_1} - \text{sign} K_1 |\vartheta_0 - \vartheta_*| \sqrt{\frac{d_i d_e}{2|K_1 \gamma_*^\alpha(\rho)|}} \right\} \quad (5.4)$$

В случае $K_1 = 0$ уравнение для равновесного радиуса следует из (2.26) при условии замены γ на $\gamma^\alpha(\rho) = \gamma \pm 2\alpha/(R\rho)$:

$$\rho^3 + \frac{2d\alpha}{(K\vartheta^f)^2 R\rho} = \frac{1}{2} \pm \frac{d}{K\vartheta^f} \left(\vartheta_0 - \frac{\vartheta^f}{2} - \frac{\gamma}{K\vartheta^f} \right) \quad (5.5)$$

Продифференцировав (5.4) по ϑ_0 , получим, что в точке ветвления решения уравнения (5.4) радиус зародыша ρ_* , определяется уравнением

$$3RK_1\gamma_*\rho^4 \pm 5\alpha K_1\rho^3 + \alpha d_i = 0 \quad (5.6)$$

В случае $K_1 = 0$ в критической точке уравнения (5.5):

$$\rho_*^4 = \frac{2\alpha d}{3(K\vartheta^f)^2 R}, \quad \vartheta_0^* = \frac{\gamma}{K\vartheta^f} + \frac{\vartheta^f}{2} \mp \frac{K\vartheta^f}{2d} (1 - 8\rho_*^3) \quad (5.7)$$

Отметим, что (5.7) следует непосредственно из (5.6) в силу (2.28).

Так как

$$\frac{1}{V} \frac{\partial F^\alpha}{\partial z} = \pm \left(\gamma_* + \frac{d_i d_e K_1 (\vartheta_0 - \vartheta_*)^2}{2(d_i - (K_i - K_e)\rho^3)^2} \right) + \frac{2\alpha}{R\rho} \quad (K_1 \neq 0) \quad (5.8)$$

$$\frac{1}{V} \frac{\partial F^\alpha}{\partial z} = \frac{(K\vartheta^f)^2}{d} \left(\rho^3 - \frac{1}{2} \mp \frac{d}{K\vartheta^f} \left(\vartheta_0 - \frac{\vartheta^f}{2} - \frac{\gamma}{K\vartheta^f} \right) \right) + \frac{2\alpha}{R\rho} \quad (K_1 = 0) \quad (5.9)$$

то

$$\frac{1}{V} \frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial z^2} = \frac{d_i d_e (K_1 \vartheta_0 - K_+ \vartheta^f)^2}{(d_i - (K_i - K_e)\rho^3)^3} - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{R\rho^4} \quad (5.10)$$

Нетрудно убедиться в том, что уравнения (5.4), (5.5) соответствуют условию $\partial F^\alpha / \partial z = 0$.

Локальная устойчивость определяется знаком $\partial^2 F^\alpha / \partial z^2$. При $K_1 = 0$ из (5.10), (5.7) немедленно следует, что

$$\frac{1}{V} \frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial z^2} = \frac{(K\vartheta^f)^2}{d} - \frac{2\alpha}{3R\rho^4} \geq 0$$

если $\rho \geq \rho_*$, соответственно.

Можно показать, что аналогичные неравенства справедливы и в случае $K_1 \neq 0$ при $K_1 \gamma_* < 0$. Таким образом локально-устойчивой на рассматриваемом классе ДК является только ветвь $\rho > \rho_*$ решения уравнений (5.4), (5.5). Как и следовало ожидать, учет поверхностной энергии межфазной границы приводит к появлению критического зародыша новой фазы в случае ДК1 и критического "остатка" старой фазы в случае ДК2.

Для анализа глобальной устойчивости на рассматриваемом классе ДК необходимо определить разности

$$\frac{1}{V}(F_f^\alpha - F_e^\alpha) = \frac{\alpha}{R} \rho^2 - \frac{(q_\alpha)^2}{2d_i} \rho^6 \quad (5.11)$$

$$\frac{1}{V}(F_f^\alpha - F_i^\alpha) = \frac{\alpha}{R} \left(\rho^2 + \frac{2}{\rho} \right) \mp \frac{3\beta}{R} - \frac{(q_\alpha)^2 d_i}{2d_e^2} (1 - \rho^3)^2 \quad (5.12)$$

где F_f^α – энергия равновесной ДК, ρ определяется уравнениями (5.4) или (5.5), $\beta = \alpha_+ - \alpha_-$.

Решая уравнения $F_f^\alpha - F_e^\alpha = 0$ и $F_f^\alpha - F_i^\alpha = 0$, можно определить радиусы ρ' и ρ'' , при которых двухфазные состояния, определяемые уравнениями (5.4), (5.5), становятся или перестают быть энергетически предпочтительными по сравнению с однофазными.

Радиус ρ' ($F_f^\alpha - F_e^\alpha \leq 0$ при $\rho \geq \rho'$) соответствует скачкообразному возникновению зародыша фазы (+) в центре шара (начало превращения в случае ДК1) или "схлопыванию" фазы (-) (окончание превращения в случае ДК2). Радиус ρ'' ($F_f^\alpha - F_i^\alpha \leq 0$ при $\rho \leq \rho''$) соответствует скачкообразному выходу фазы (+) на поверхность шара (окончание превращения в случае ДК1) или скачкообразному зарождению фазы (+) с поверхности шара (ДК2).

Отметим, что величины ρ_* , ρ' и ρ'' в случаях ДК1 и ДК2 – разные, причем ρ'' в отличие от ρ' зависит не только от параметра ρ_* , который определяется межфазной поверхностной энергией α , но и от соотношения α и β .

Если $K_1 = 0$, то, согласно (5.11), (5.12):

$$\rho' = \left(\frac{2\alpha d}{(K\vartheta^f)^2 R} \right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3} \rho_* \approx 1, 3 \rho_* \quad (5.13)$$

а радиусы ρ'' определяются уравнением

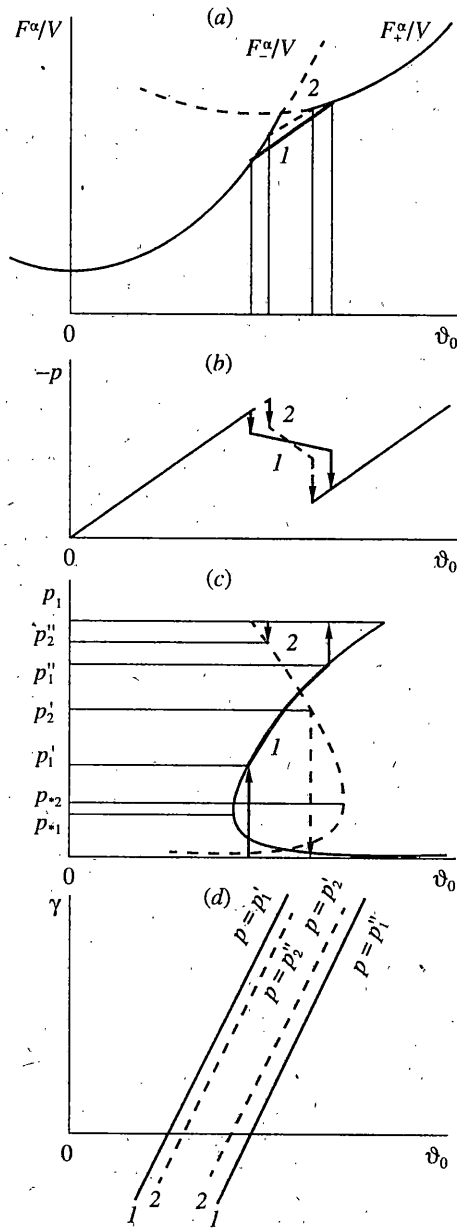
$$(\rho'')^3 - \frac{\rho''}{3\rho_*^4} (1 - (\rho'')^3)^2 \mp (3\kappa\rho'' + 2) = 0, \quad \rho'' \in (\rho_*, 1), \quad \kappa = \frac{\beta}{\alpha} \quad (5.14)$$

Зависимость $p = p(\vartheta_0)$ на траектории ФП получим, подставив равновесные значения ρ^3 из (5.4), (5.5) в (4.1). При $K_1 \neq 0$ изменение давления определяется формулой (4.2), где

$$p^f = K_- K_+ \vartheta^f / K_1 + \text{sign}(\vartheta_0 - \vartheta_*) \sqrt{2d_i d_e} \left| (\gamma_* \pm 2\alpha/R\rho) / K_1 \right| \quad (5.15)$$

а ρ определяется уравнением (5.4).

При $K_1 = 0$ остается справедливым уравнение (4.4), где $p^f = \gamma/\vartheta^f \pm 3K\vartheta^f \rho_*^4/\rho$, ρ определяется уравнением (5.5).



Фиг. 4

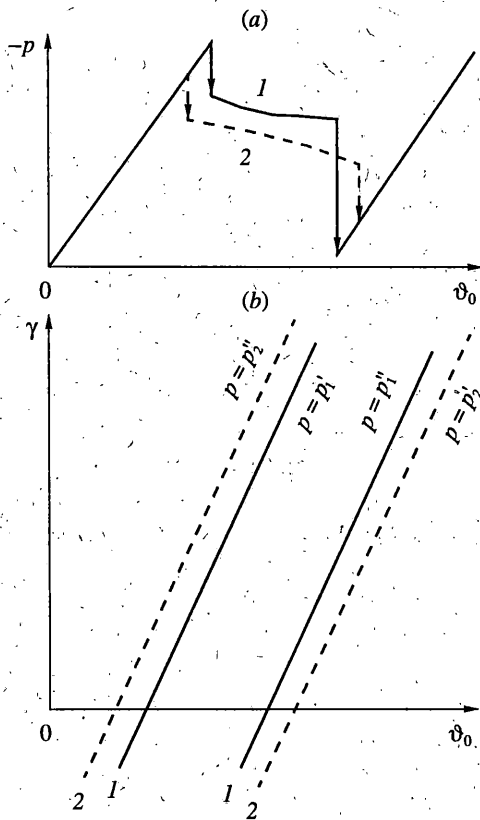
Отметим, что при $K_1 = 0$

$$-p = -p_0 \pm 3K\delta^f \rho_*^4 / \rho \quad (\rho \geq \rho' = \sqrt[4]{3}\rho_*) \quad (5.16)$$

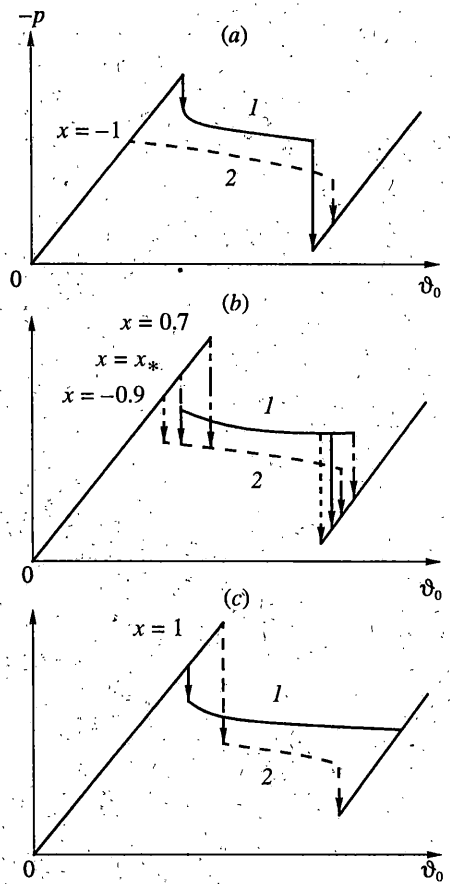
где p_0 – давление, определяемое в случае $\alpha = 0$ при том же δ_0 .

Те же зависимости следуют из равенства $-p = V^{-1} dF_f^\alpha / d\delta_0$.

Следствием существования критических радиусов ρ' , ρ'' является появление “зубьев” на диаграмме деформирования, соответствующих началу и окончанию превра-



Фиг. 5



Фиг. 6

щения (фиг. 4, а, 5, а). Относительное положение кривых $p = p(\vartheta_0)$ в случаях ДК1 и ДК2 зависит от параметра ρ_* . При малых ρ_* кривые $p = p(\vartheta_0)$ пересекаются аналогично случаю $\alpha = 0$ (фиг. 3, b). При увеличении ρ_* кривая $p = p(\vartheta_0)$ для ДК1 поднимается, а для ДК2 опускается относительно соответствующих кривых в случае $\alpha = 0$ (см. (5.16)). Более того, начиная с некоторого значения ρ_* , кривая для ДК2 оказывается ниже кривой для ДК1. Это приводит к возможности инверсии ДК1 и ДК2, когда при $\mu_1 > 0$ предпочтительней оказывается ДК2 (фиг. 5, а). Это обусловлено тем, что при больших радиусах ρ_1' энергетически выгодным оказывается возникновение новой фазы с поверхности шара.

В то же время, начало превращения в случае ДК2, в отличие от ДК1, зависит не только от параметра ρ_* , но и от κ (фиг. 6). Следствием этого является возможность “обратной” инверсии, при $\kappa > \kappa_*$, когда превращение из центра шара может начаться раньше, чем с поверхности – несмотря на то, что кривая ДК2 проходит ниже кривой ДК1 (фиг. 6, b, c). Так например, если $\nu_- = 0.33$; $\mu_+ = 1.25\mu_-$; $K_1 = 0$; $\rho_{*1}^4 = 0.009$, то “обратная” инверсия возможна при $\kappa > \kappa_* = -0.80$.

Таким образом, учет поверхностной энергии меняет вид кривых деформирования на начальной и заключительном этапах превращения, приводит к появлению критических зародышей и возможности инверсий ДК.

Авторы благодарят Н.Ф. Морозова, предложившего провести данное исследование, за критические замечания, высказанные при обсуждении работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 94-01-01393, 96-01-00610).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринфельд М.А. Об условиях термодинамического равновесия фаз нелинейно-упругого материала // Докл. АН СССР: 1980. Т. 251. № 4. С. 824–827.
2. James R.D. Finite deformation by mechanical twinning // Arch. Rat. Mech. Anal. 1981. V. 77. № 2. P. 143–177.
3. Gurtin M.E. Two-phase deformation of elastic solids // Arch. Rat. Mech. Anal. 1983. V. 84. № 1. P. 1–29.
4. Трускиновский Л.М. Равновесные межфазные границы // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 2. С. 306–310.
5. Кондауров В.И., Никитин Л.В. О фазовых переходах первого рода в нелинейно-упругих средах // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1348–1351.
6. Гринфельд М.А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука, 1990. 312 с.
7. Гиббс Дж. Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука, 1982. 584 с.
8. Knowles J.K., Sternberg E. On the failure of ellipticity and the emergence of discontinuous deformation gradients in plane finite elastostatics // J. of Elasticity. 1980. V. 10. № 3. P. 255–293.
9. Фрейдин А.Б., Чискис А.М. Зоны фазовых переходов в нелинейно-упругих изотропных материалах. Ч. 1. Основные соотношения // Изв. АН МТТ. 1994. № 4. С. 91–109.
10. Фрейдин А.Б., Чискис А.М. Зоны фазовых переходов в нелинейно-упругих изотропных материалах. Ч. 2. Несжимаемые материалы с потенциалом, зависящим только от одного из инвариантов тензора деформаций // Изв. АН МТТ. 1994. № 5. С. 49–61.
11. Кондауров В.И., Никитин Л.В. Фазовые переходы первого рода в упруговязкопластической среде // Изв. АН МТТ. 1986. № 4. С. 130–139.
12. Еремеев В.А., Зубов Л.М. Об устойчивости равновесия нелинейно-упругих тел, испытывающих фазовые превращения // Изв. АН МТТ. 1991. № 2. С. 56–65.
13. Морозов Н.Ф., Осмоловский В.Г. Уравнение колебания упругого тела, допускающего двухфазовое состояние // Изв. АН МТТ. 1994. № 1. С. 38–41.
14. Кубланов Л.Б., Фрейдин А.Б. Зародыши твердой фазы в деформируемом материале // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 193–501.
15. Фрейдин А.Б. Трещины серебра и полосы сдвига в стеклообразных полимерах как слои новой фазы // Механика композитных материалов. 1989. № 1. С. 3–10.
16. Морозов Н.Ф., Назыров И.Р., Фрейдин А.Б. Одномерная задача о фазовом превращении упругого шара // Докл. АН. 1996. Т. 346. № 2. С. 188–191.
17. Кристиан Дж. Теория превращений в металлах и сплавах. М.: Мир, 1979. 806 с.
18. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
19. Кунин И.А., Соснина Э.Г. Концентрация напряжений на эллипсоидальной неоднородности в анизотропной упругой среде // Прикл. мат. и мех. 1973. Т. 37. № 2. С. 306–315.
20. Канаун С.К., Левин В.М. Метод эффективного поля в механике композитных материалов. Петрозаводск: Изд-во Петрозаводского ун-та, 1993. 538 с.
21. Gurtin M.E., Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces // Arch. Rational Mech. Anal. 1975. V. 57. № 4. P. 291–323.
22. Leo P.H., Sekerka R.F. The effect of surface stress on crystal-melt and crystal-crystal equilibrium // Acta metall. 1989. V. 37. № 12. P. 3119–3138.
23. Gurtin M.E., Struthers A. Multiphase thermomechanics with interfacial structure. 3. Evolving phase boundaries in presence of bulk deformation // Arch. Rational Mech. Anal. 1990. V. 2. № 2. P. 97–160.