

УДК 534.13

© 1998 г. А. В. СТЕПАНОВ

О МАКСИМИЗАЦИИ СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОЙ ДВУХЗВЕННОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается задача оптимизации параметров плоской системы из двух звеньев, одно из которых присоединено к неподвижной точке, а другое – к первому; одна из связей – чисто упругая с заданным коэффициентом жесткости, другая – упруговязкая. Необходимо в зависимости от геометрических и инерционных характеристик системы и коэффициента жесткости чисто упругой связи найти такие значения коэффициентов жесткости и вязкости другой из связей, чтобы максимизировать степень устойчивости системы. Эта задача может быть сведена к ранее рассмотренной автором аналогичной задаче для одномерной системы с двумя степенями свободы.

Дополнительно уточнено решение задачи максимизации минимальной из вещественных частей корней многочлена 4-й степени специального вида.

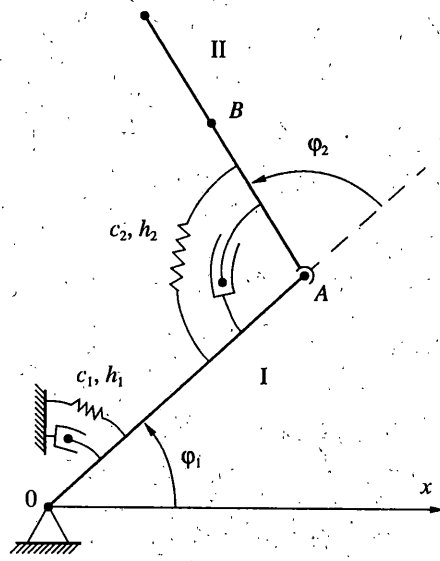
В [1] рассматривается движение плоской системы, состоящей из двух звеньев: одно из них присоединено к неподвижной точке O , другое – к первому в точке A ; оба соединения шарнирные (фиг. 1). Характеристики этой системы: $l_1 = OA$, J_1 – момент инерции I звена относительно точки O , $l_2 = AB$, где B – центр масс II звена, m – масса этого звена, J_2 – его момент инерции относительно точки A , обобщенные координаты: φ_1 – угол между неподвижной осью Ox и вектором OA , φ_2 – угол между векторами OA и AB . Пусть I звено соединено с неподвижной плоскостью, в которой рассматривается движение, линейной упруговязкой связью с коэффициентом жесткости c_1 и коэффициентом вязкого трения h_1 , а со II звеном – такой же связью с параметрами c_2 и h_2 соответственно; φ_0 – значение угла φ_2 в положении равновесия; наконец, предположим, что сила тяжести перпендикулярна плоскости OAB . Тогда характеристическое уравнение малых свободных колебаний рассматриваемой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} J_{11}\lambda^2 + h_1\lambda + c_1 & J_{12}\lambda^2 \\ J_{12}\lambda^2 & J_2\lambda^2 + h_2\lambda + c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

$$J_{11} = J_1 + J_2 + ml_1(l_1 + 2l_2 \cos \varphi_0), \quad J_{12} = J_2 + ml_1 l_2 \cos \varphi_0$$

где λ – характеристический показатель. Если $J_{12} = 0$, то колебания системы как твердого тела относительно точки O и II звена относительно I звена независимы.

В [1] ставится следующая задача оптимизации параметров рассматриваемой системы: в зависимости от J_1 , J_2 , m , l_1 , l_2 , φ_0 , c_1 , c_2 найти такие h_1 и h_2 , чтобы максимизировать степень устойчивости системы – минимальный из декрементов затухания, со-



Фиг. 1

ответствующих всем характеристическим показателям. Введем безразмерный характеристический показатель

$$r = -\lambda\Omega^{-1}, \quad \Omega = \sqrt[4]{c_1 c_2 D^{-1}} \quad (2)$$

где Ω – среднее геометрическое собственных частот системы без вязких элементов, а $D = J_{11}J_{22} - J_{12}^2$. Тогда уравнение (1) может быть приведено к виду

$$r^4 - \alpha r^3 + q r^2 - \beta r + 1 = 0$$

$$\alpha = (J_2 h_{11} + J_{11} h_2) \sqrt[4]{(D^3 c_1 c_2)^{-1}} \quad (3)$$

$$q = (J_2 c_1 + J_{11} c_2 + h_1 h_2) \sqrt{(D c_1 c_2)^{-1}}, \quad \beta = (c_2 h_1 + c_1 h_2) \sqrt[4]{D^{-1} (c_1 c_2)^{-3}}$$

Можно найти как функции q такие α и β , чтобы максимизировать

$$n = \min \operatorname{Re} r_j \quad (4)$$

где r_j ($j = 1, 2, 3, 4$) – корни уравнения (3), а минимум берется по всем этим корням; n – также функция q и может быть положительным, только если $q > 2$ (это условие при $h_1 h_2 = 0$ выполняется). Способом, аналогичным описанному в [2], можно показать, что оптимальные в указанном смысле значения α , β и n следующие: при $q \leq 6$ $\alpha = \beta = 4$,

$$n = 2 \sqrt{q^{-2}} \text{ при } q \leq 6:$$

$$n = \left[\frac{1}{6} (q - \sqrt{q^2 - 36}) \right]^{\frac{1}{2}} \text{ при } q > 6 \quad (5)$$

$$\alpha = 3n + n^{-3}, \quad \beta = n^3 + 3n^{-1}$$

Уравнение (4) в первом случае имеет двойные корни $n \pm i\sqrt{1-n^2}$, во втором – тройной n и простой $n' = n^{-3} > n$; значение n , определяемое формулой (5), больше величины $1/2(\sqrt{q-2} - \sqrt{q-6})$, приводимой в [1].

Однако q зависит от h_1 и h_2 , а параметры α и β не являются независимыми, если $J_2 c_1 = J_{11} c_2$. Точное решение задачи весьма сложно.

Рассмотрим более простую задачу: при $h_1 = 0$ в зависимости от $J_1, J_2, m, l_1, l_2, \Phi_0, c_1$ найти такие h_2 и c_2 , чтобы максимизировать степень устойчивости системы. Ниже будет показано, как эта задача может быть сведена к аналогичной задаче для двухмассовой системы [2], и исследована зависимость степени устойчивости от геометрических характеристик. Введем следующие безразмерные параметры (r определяется по формулам (2)):

$$\begin{aligned}\theta &= J_2 J_1^{-1}, \quad \mu_1 = l_1 R^{-1}, \quad \mu_2 = l_2 R^{-1} \cos \Phi_0 \\ R &= \sqrt{J_2 m^{-1}}, \quad \sigma = c_2 (J_2 \Omega^2)^{-1} \\ z &= h_2 (J_2 \Omega)^{-1}, \quad \Omega = \sqrt{c_1 J_1^{-1}}\end{aligned}\quad (6)$$

где Ω – собственная частота I звена при отсутствии II звена, R – радиус инерции II звена относительно точки A . Так как момент инерции этого звена относительно точки B равен $J_2 - m l_2^2$, то $R \geq l_2$ и $|\mu_2| \leq 1$ (равенства достигаются, если вся масса II звена сосредоточена в точке B , а второе – если, кроме того, $\Phi_0 = 0$ или π). В этих параметрах уравнение (1) имеет вид

$$\gamma_1^{-2} r^4 - \gamma_2^2 z r^3 + (1 + \gamma_2^2 \sigma) r^2 - z r + \sigma = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \sqrt{(1 + v_1 \theta)^{-1}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{1 + v_2 \theta} \\ v_1 &= \mu_1^2 (1 - \mu_2^2), \quad v_2 = 1 + 2\mu_1 \mu_2 + \mu_1^2\end{aligned}\quad (8)$$

Для уравнения (7) надо произвести такую же оптимизацию параметров σ и z , как для α и β в (3), но n (см. (4)), σ и z будут функциями трех параметров – θ, μ_1 и μ_2 .

Если $\mu_1 = 0$, а μ_2 – произвольное, то (7) совпадает с безразмерным характеристическим уравнением двухмассовой системы. Тогда оптимальные значения параметров следующие:

$$\begin{aligned}n &= \frac{1}{2} \sqrt{\theta(1+\theta)^{-1}}, \quad \sigma = (1+\theta)^{-2} \\ z &= 2\sqrt{\theta(1+\theta)^{-3}} \quad \text{при} \quad \theta \leq 4\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}n &= \left[\left[2\sqrt{\theta} \sin\left(\frac{1}{3} \arcsin 2\sqrt{\theta^{-1}}\right) - 1 \right] (1+\theta)^{-1/2} \right]^{1/2} \\ \sigma &= [6(1+\theta)n^4 - 3(\theta-1)n^2 + 1][(1+\theta)D]^{-1} \\ z &= (2n)^3 D^{-1} \quad \text{при} \quad \theta > 4 \\ D &= 3(1+\theta)n^2 - 1\end{aligned}\quad (10)$$

В первом из этих случаев многочлен (7) имеет пару двойных комплексно сопряженных корней: $n \pm i\sqrt{1-5n^2}$, во втором – тройной корень n и простой $n' > n$ [2].

Если в общем случае в матрице, стоящей в левой части уравнения (1), левый верхний элемент умножить, а правый нижний элемент разделить на $J_2 J_{12}^{-1}$, то это уравнение будет иметь равносильный вид

$$\begin{vmatrix} (J_1' + J_{12})\lambda^2 + c_1' & J_{12}\lambda^2 \\ J_{12}\lambda^2 & J_{12}\lambda^2 + h_2'\lambda + c_2' \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} J_1' &= J_{12}^{-1}(J_{11}J_2 - J_{12}^2), & c_1' &= J_{12}^{-1}J_2c_1 \\ c_2' &= J_2^{-1}J_{12}c_2, & h_2' &= J_2^{-1}J_{12}h_2 \end{aligned} \quad (12)$$

Вид (11) имеет характеристическое уравнение для системы, в которой $\mu_1 = 0$, моменты инерции звеньев — J_1' и J_{12} . Будем далее использовать параметры, определяемые формулами (7), и $v = |1 + \mu_1\mu_2|$. Собственная частота I звена

$$\Omega' = \gamma_1\Omega, \quad \Omega' = \gamma_1\Omega, \quad \theta' = J_{12}J_1'^{-1} = (v\gamma_1)^2\theta \quad (13)$$

Если $\theta' \leq 4$ или $\theta' > 4$, то, подставляя эту величину вместо θ в (9) или (10) соответственно, можно найти безразмерную степень устойчивости новой системы n_1 , ее безразмерные параметры σ' и z' , затем $\sigma = \gamma_1^2\sigma'$, $z = \gamma_1z'$, $n = \gamma_1n_1$.

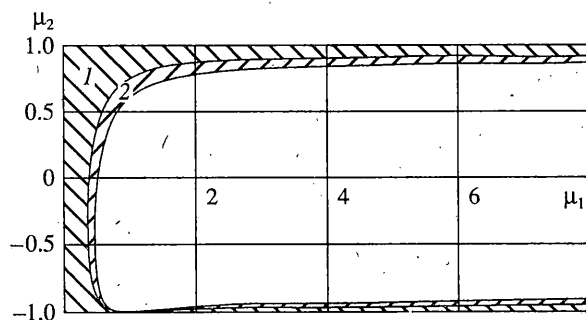
Введем еще параметры

$$\theta_1 = 4(v^2 - 4v_1)^{-1} \quad (14)$$

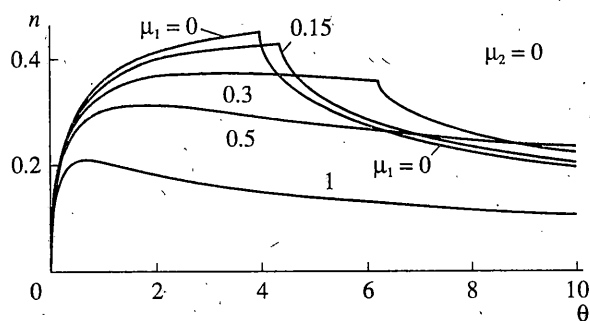
Если $v^2 \leq 4v_1$, то $\theta_1 = \infty$ и $\theta_2 = \sqrt{(v_1v_2)^{-1}}$. Тогда n_+ (максимум n по всем θ) достигается при $\theta = \min(\theta_1, \theta_2)$. Если $\theta_1 \leq \theta_2$, то $n_+ = [1/5(1 - 4v_1v^{-2})]^{1/2}$, а если $\theta_1 > \theta_2$, то $n_+ = \frac{1}{2}(\sqrt{v_2} - \sqrt{v_1})v^{-1}$ (при $v = 0$ $n_+ = 0$). Только во втором случае указанный максимум получается гладким. На фиг. 2 изображены области где $\theta_1 < \theta_2 - 1$ и $\theta_2 < \theta_1 < \infty - 2$. Границы второй из них описываются одним и тем же уравнением $(1 + \mu_1\mu_2)^2 - \xi\mu_1^2(1 - \mu_2^2) = 0$, но для внутренней границы $\xi = 4$, а для внешней $\xi = \frac{1}{2}(9 + \sqrt{21}) = 6.7913$. Если $\mu_1 \rightarrow \infty$, то предельные значения $|\mu_2|$ для этих границ (как верхней, так и нижней) равны соответственно $2/\sqrt{5} = 0.8944$ и $\frac{1}{10}[78 + 2\sqrt{21}]^{1/2} = 0.9336$.

При $\mu_2 = 0$ (точки A и B совпадают или $\phi_0 = \pm\pi/2$) и одном и том же $\theta \leq 4$ степень устойчивости с ростом μ_1 уменьшается, но при больших θ и достаточно малых μ_1 она может расти. При $\mu_2 > 0$ и достаточно малых θ и μ_1 с ростом последнего параметра степень устойчивости также повышается (фиг. 3, 4). Она может увеличиваться с ростом μ_2 при постоянных μ_1 и достаточно малых θ (фиг. 5, 6), достигая максимума при $\phi_0 = 0$. Ни при каких θ , μ_1 и μ_2 не может быть $n > 1/\sqrt{5}$.

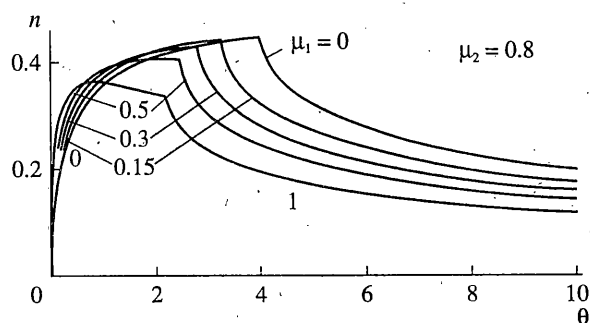
Аналогичным способом решается задача максимизации степени устойчивости системы по c_1 и h_1 при $c_2 = \text{const}$, $h_2 = 0$. Обозначим через $\Omega = \sqrt{c_2J_2^{-1}}$ собственную час-



Фиг. 2



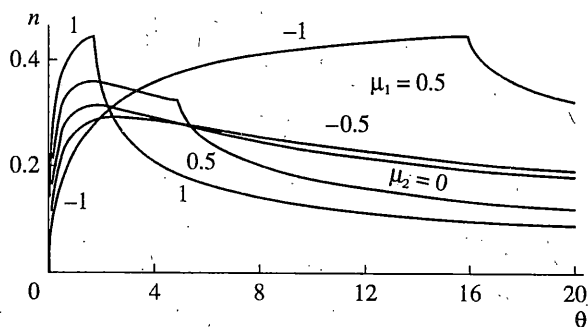
Фиг. 3



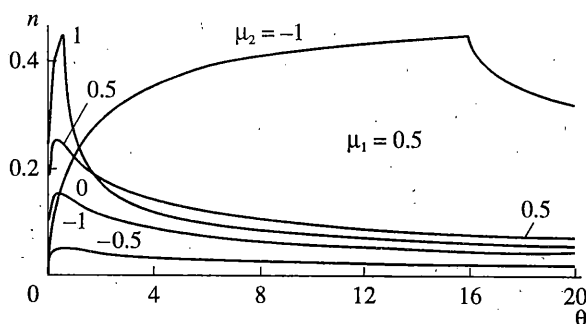
Фиг. 4

тоту II звена, если бы оно было присоединено к неподвижному основанию, введем θ , μ_1 , μ_2 , r по формулам (6) и (2), а $\sigma = c_1(J_1\Omega^2)^{-1}$, $z = h_1(J_1\Omega)^{-1}$.

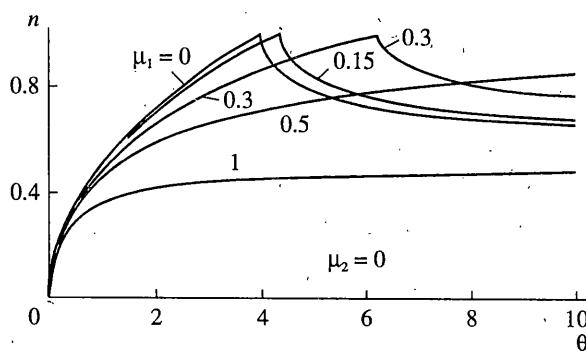
Уравнение (1) также может быть преобразовано к виду (11), где J'_1 определяется формулой (12), но $c'_1 = J_{12}^{-1}J_{11}c_2$, $c'_2 = J_{12}^{-1}J_{12}c_1$, $h'_2 = J_{11}^{-1}J_{12}h_1$.



Фиг. 5



Фиг. 6



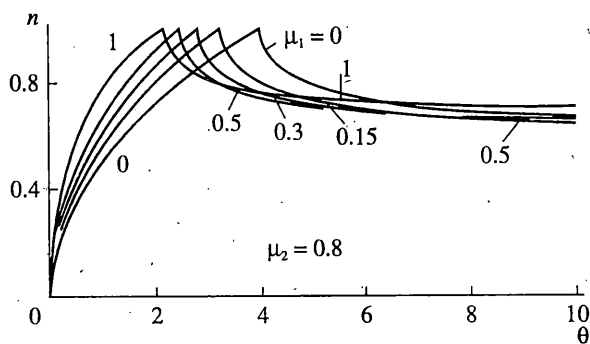
Фиг. 7

Значение θ' определяется формулой (13), но $\Omega' = \gamma_1 \gamma_2 \Omega$. Величины n_1, σ', z' находятся теми же способами, что и в предыдущей задаче, но $\sigma = (\gamma_1 \gamma_2^2)^2 \sigma', z = \gamma_1 \gamma_2^3 z', n = \gamma_1 \gamma_2 n_1$.

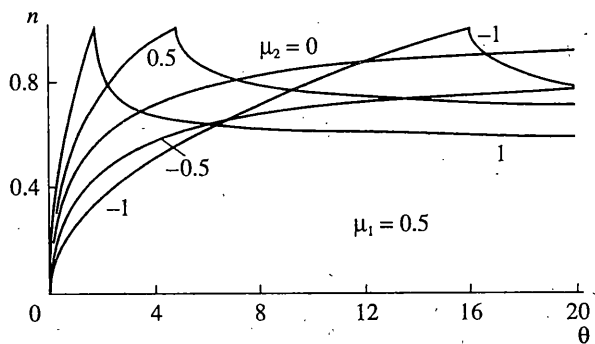
При $\theta' \leq 4$ имеем $n = \frac{1}{2} \sqrt{\theta'}$. При $\theta' \rightarrow \infty$ величина n имеет предел n_* ; если

$$v_1^{-1} v^2 \leq 4$$

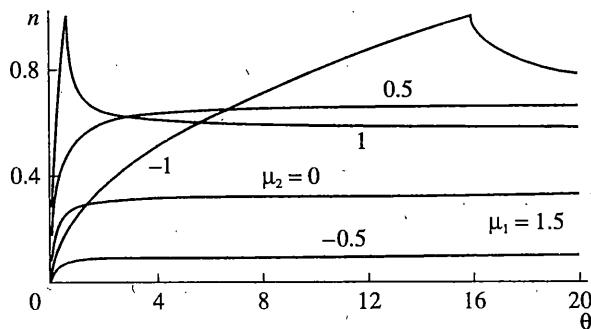
(15)



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

то $n_* = \frac{1}{2} v \sqrt{v_1^{-1}} \leq 1$. В этом случае n монотонно увеличивается с ростом θ . Если условие (15) не выполняется (это имеет место в обеих заштрихованных на фиг. 2 областях), то при $\theta = \theta_1$ (см. (14)) n достигает максимального значения, равного 1, и этот максимум не является гладким (фиг. 7–10).

Качественные закономерности влияния μ_1 и μ_2 на степень устойчивости те же, что и в предыдущей задаче, но по сравнению с ней при одних и тех же θ , μ_1 и μ_2 значение n получается больше, так как значения θ' совпадают, а $\gamma_2 > 1$.

Рассмотрим еще асимптотику n при фиксированных μ_2 , $\theta > 0$ и $\mu_1 \rightarrow \infty$. В этих условиях $\theta' \rightarrow \mu_2^2 (1 - \mu_2^2)^{-1}$.

Если $|\mu_2| \leq 2/\sqrt{5}$, то $n_1 \rightarrow \frac{1}{2} |\mu_2|$, и в первой задаче $n \sim |\mu_2| [2\sqrt{(1 - \mu_2^2)\theta} \mu_1]^{-1}$, а во второй $n \rightarrow \frac{1}{2} |\mu_2| \sqrt{(1 - \mu_2^2)^{-1}}$.

При больших значениях $|\mu_2|$ для первой задачи коэффициент пропорциональности при μ_1^{-1} , а для второй задачи пределы n_1 и n получаются меньше. При $\mu_2 = 0$ в первой задаче $n \sim (2\sqrt{\theta} \mu_1^2)^{-1}$, во второй — $n \sim (2\mu_1)^{-1}$. При μ_2 , близких к ± 1 , соответственно $n \sim (\sqrt{3\theta} |\mu_2| \mu_1)^{-1}$ и $n \rightarrow (\sqrt{3} |\mu_2|)^{-1}$.

Кроме двухзвенной системы, рассматривались и другие линейные упруговязкие системы с двумя колебательными степенями свободы, оптимизация параметров которых сводится к аналогичной задаче для двухмассовой системы [3–5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смольников Б.А. Проблемы механики и оптимизации роботов. М.: Наука, 1991. 232 с.
2. Нагаев Р.Ф., Степанов А.В. Об оптимизации коэффициента затухания свободных колебаний двухмассовой системы // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 24–28.
3. Ларин В.В. Выбор параметров системы виброзащиты приборов // Прикл. механика. 1966. Т. 2. № 6. С. 99–104.
4. Степанов А.В. Об одном способе повышения эффективности гасителей свободных колебаний // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 18–20.
5. Степанов А.В. Гашение свободных колебаний в подвижных упругих системах // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 799–802.

С.-Петербург

Поступила в редакцию 12.III.1996