

УДК 534.13

© 1998 г. М. М. ВЕТЮКОВ, Р. Ф. НАГАЕВ

### **АВТОКОЛЕБАНИЯ В ДВУХМАССОВОЙ СИСТЕМЕ С ОТНОСИТЕЛЬНЫМ СКОЛЬЖЕНИЕМ ТЕЛ**

Изучаются колебания в системе двух тел, взаимодействующих друг с другом посредством сил сухого некулонова трения. В известных работах, посвященных автоколебаниям механических систем с несколькими степенями свободы [1, 2], исследуются колебания тел, упруго связанных между собой. В данном случае, в отличие от рассмотренных ранее, тела не связаны упругими элементами. Показывается, что при этом возможна ситуация, когда одно из тел совершает немалые колебания, а другое, в первом приближении, покоится, т.е. возможен своеобразный эффект динамического гашения автоколебаний. Для нерезонансного случая с помощью метода усреднения строятся области притяжения различных колебательных режимов; в случае основного резонанса исследовано влияние малой вязкой диссипации на устойчивость названных колебаний.

1. Будем рассматривать колебания в системе (фиг. 1). Предполагаем, что нижнее тело достаточно протяженное, между телами действует сила сухого трения, нелинейно зависящая от относительной скорости скольжения, а между нижним телом и основанием трение отсутствует. Такая модель может применяться для описания различных механизмов с относительным проскальзыванием частей [3], когда нельзя ограничиться системой с одной степенью свободы. Уравнения движения имеют вид

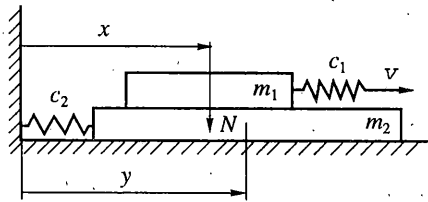
$$m_1 \ddot{x} + c_1(x - Vt) = -F, \quad m_2 \ddot{y} + c_2 y = F, \quad (\dots)' = d/dt \quad (1.1)$$

где  $V$  – скорость протягивания конца пружины верхнего тела, предполагаемая постоянной, а для силы трения  $F = f(v)N$  принимаем кубический закон изменения в зависимости от относительной скорости тел  $f = f^* \operatorname{sign} v - f_1 v + f_3 v^3$ ,  $v = x - y$  [1, 4]. Здесь значения  $f_{1,3}$  обычно выражают [4] через характерные величины функции трения (фиг. 2)  $f_1 = 3(f^* - f_*)/(2f^* v_*)$ ,  $f_3 = (f^* - f_*)/(2f^* v_*^3)$ . Введем в (1.1) безразмерные переменные и параметры

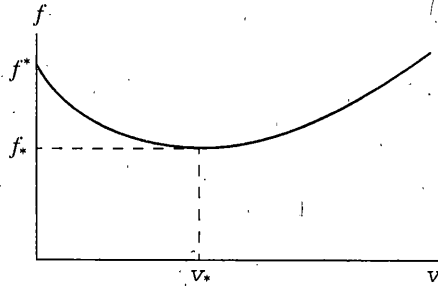
$$\tau = t \left( \frac{c_1 + c_2}{m_1 + m_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \xi = \frac{c_1 + c_2}{2N} n x, \quad \eta = \frac{c_1 + c_2}{2N} n y, \quad \kappa = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$$

$$n = \frac{2N}{v_*} [(m_1 + m_2)(c_1 + c_2)]^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma = \frac{V}{v_*}, \quad \varepsilon = n \frac{f^* - f_*}{2} \quad (1.2)$$

$$\gamma = \frac{2f^*}{f^* - f_*}, \quad v_i = \frac{c_i(m_1 + m_2)}{m_i(c_1 + c_2)} \quad (i = 1, 2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Уравнения (1.1) тогда примут вид

$$\xi'' + v_1^2(\xi - \sigma\tau) = -\varepsilon\Phi/(1 - \kappa), \quad \eta'' + v_2^2\eta = \varepsilon\Phi/(1 + \kappa), \quad (\dots)' = \frac{d}{d\tau} \quad (1.3)$$

В дальнейшем предполагаем, что величина  $f$  достаточно мала, поэтому  $\varepsilon$  будем считать малым параметром ( $\varepsilon > 0$ ). В (1.3)  $\varepsilon\Phi$  – безразмерная сила трения,  $\Phi(\xi' - \eta') = \gamma \text{sign}(\xi' - \eta') - 3(\xi' - \eta') + (\xi' - \eta')^3$ , где  $\gamma > 2$  (последнее вытекает из значения  $\gamma$ , в котором  $f^*, f_* > 0$ ).

Сначала рассмотрим предельный случай системы с одной степенью свободы. Уравнение колебаний верхней массы при неподвижной нижней можно получить, полагая в (1.2)  $m_2 = 0, c_2 = 0$ ; после введения относительной координаты  $\zeta = \xi - \sigma\tau$  имеем

$$\zeta'' + \zeta = -2\varepsilon\Phi(\zeta' + \sigma) \quad (1.4)$$

Эта задача применительно к автоколебаниям квазигармонического типа<sup>1</sup> достаточно хорошо изучена [1, 4] для случая  $\zeta' > 0$ , т.е. когда колебания происходят на одной ветви характеристики трения. В общем случае, полагая в (1.4)  $\zeta = a \cos \varphi, \zeta' = -a \sin \varphi$  и применяя метод усреднения, для амплитуды  $a$  получим в первом приближении

$$a' = \varepsilon \frac{3}{4} a [4(1 - \sigma^2) - a^2] + \varepsilon s, \quad s = \begin{cases} 0, & a < \sigma \\ -\frac{4\gamma}{\pi} \left(1 - \frac{\sigma^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}, & a > \sigma \end{cases} \quad (1.5)$$

Отсюда следует, что стационарные колебания возможны в обоих случаях лишь при  $\sigma < 1$ , т.е. при значениях скорости  $V$ , взятых на спадающем участке характеристики трения. Первому случаю ( $a < \sigma$ ) отвечает устойчивое решение

$$a_* = 2(1 - \sigma^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.6)$$

<sup>1</sup> Область существования автоколебаний релаксационного типа при  $\varepsilon \ll 1$  мала.

существующее при  $2/\sqrt{5} < \sigma < 1$  [1]. При  $a > \sigma$  для определения стационарного решения положим

$$a = a^* = (\sigma^2 + \delta^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \delta \geq 0 \quad (1.7)$$

Для “добавки”  $\delta$  тогда получается уравнение четвертой степени

$$(\delta^2 + \sigma^2)(4 - 5\sigma^2 - \delta^2) - (16\gamma/3\pi)\delta^2 = 0 \quad (1.8)$$

Это уравнение допускает единственное неотрицательное решение при  $\sigma < 2/\sqrt{5}$ , которое при  $\sigma = 2/\sqrt{5}$  непрерывно переходит в упомянутое ранее. Таким образом, квазистационарное уменьшение скорости  $V$  приводит к непрерывному переходу квазигармонических автоколебаний без изменения знака скорости проскальзывания в колебания с мгновенным изменением знака скорости внутри одного периода.

Поскольку  $\gamma > 2$ , значения  $\delta$ , согласно (1.8), невелики ( $\delta < 0.3$ ) и для них можно приближенно принять

$$\delta = \frac{3\pi}{16\gamma}\sigma^2(4 - 5\sigma^2) \quad (1.9)$$

Точные решения уравнения (1.8) незначительно превышают значения (1.9) (максимальная погрешность здесь около 20% при  $\sigma^2 \approx 0.2$  и  $\gamma = 2$ ). Из уравнения (1.5) для  $a > \sigma$  получим условие устойчивости колебаний с переменной знака скорости

$$\delta(\sigma^2 + \delta^2)(4 - 7\sigma^2 - 3\delta^2) < \frac{16\gamma}{3\pi}\sigma^2 \quad (1.10)$$

Можно показать, с учетом (1.8), что оно выполняется для всех  $\gamma > 2$ . При значениях  $\gamma \gg 1$  имеем  $a^* \approx \sigma$ . Подобный вывод получен в [1] при учете осложняющих факторов, в частности, динамики привода. Однако для  $\gamma = 2$  и при малых  $\sigma$  погрешность замены  $a^*$  на  $\sigma$  может превышать 30%.

2. Возвращаясь к системе с двумя степенями свободы, исследуем сначала нерезонансный случай, когда частоты  $\nu_1, \nu_2$  в уравнениях (1.3) взаимно несоизмеримы. Проведя в (1.3) замену переменных

$$\zeta = \frac{a}{\nu_1} \cos \varphi, \quad \zeta' = -a \sin \varphi, \quad \eta = \frac{b}{\nu_2} \cos \psi, \quad \eta' = -b \sin \psi$$

где, как и ранее,  $\zeta = \xi - \sigma t$ , и усредняя полученные уравнения в стандартной форме по быстрым фазам  $\varphi$  и  $\psi$  [5], в первом приближении получим

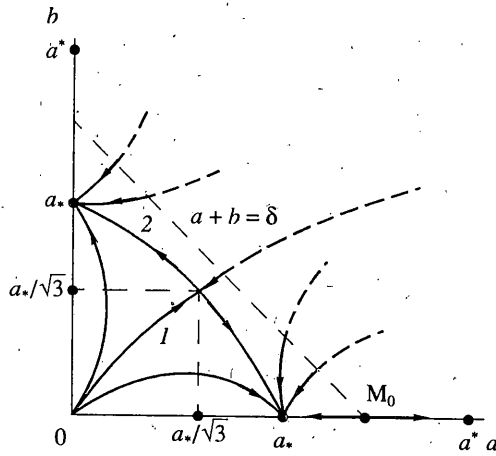
$$a' = \frac{3}{81 - \kappa} \frac{\varepsilon}{\kappa} [s_1 + (a_*^2 - a^2 - 2b^2)a] \quad b' = \frac{3}{81 + \kappa} \frac{\varepsilon}{\kappa} [-s_2 + (a_*^2 - 2a^2 - b^2)b] \quad (2.1)$$

Здесь  $a_*$  вычисляется согласно (1.6):

$$s_1 = \frac{8}{3} \gamma \langle \text{sign}(\sigma - a \sin \varphi + b \sin \psi) \sin \varphi \rangle, \quad s_2 = \frac{8}{3} \gamma \langle \text{sign}(\sigma - a \sin \varphi + b \sin \psi) \sin \psi \rangle$$

где знаком  $\langle \cdot \rangle$  обозначено усреднение по фазам  $\varphi$  и  $\psi$  на периоде  $2\pi$ . Далее рассмотрим сперва случай, когда  $a + b < \sigma$ . При этом, очевидно,  $s_{1,2} = 0$ . Заменой переменных в (2.1)  $u = a^2/a_*^2$ ,  $v = b^2/a_*^2$  приходим к уравнению

$$\frac{dv}{du} = \frac{v(1 - 2u - v)v}{(1 - u - 2v)u}, \quad v = \frac{m_1}{m_2} \quad (2.2)$$



Фиг. 3

Последнее приводится к уравнению Абеля второго рода, которое в элементарных функциях, по-видимому, не интегрируется [6]. Уравнение (2.2) имеет четыре особые точки: неустойчивый узел  $(0, 0)$ , седло  $(1/3, 1/3)$  и два устойчивых узла  $-(0, 1), (1, 0)$ . Вблизи начала координат решение (2.2) имеет вид  $v = Cu^v$ , где  $C = \text{const} + o(1)$  [7]. Сепаратриса, разделяющая области притяжения устойчивых узлов, проходит через начало координат и седловую точку и вблизи начала координат определяется равенством

$$v = 3^{v-1} u^v \quad (2.3)$$

Численное решение уравнения (2.2) показывает, что (2.3) хорошо описывает эту сепаратрису и при значениях  $u, v = 0(1)$ . Структура фазовой плоскости  $(a, b)$  при  $v < 1$  приведена на фиг. 3. Здесь 1 и 2 – сепаратрисы, проходящие через седловую точку с координатами  $a = b = a_*/\sqrt{3}$ , причем для сепаратрисы 1 в соответствии с (2.3) приближенно имеем

$$b = 3^{(v-1)/2} a_*^{1-v} a^v \quad (2.4)$$

Таким образом, в системе (2.1) существует два устойчивых положения равновесия  $(a_*, 0)$  и  $(0, a_*)$ , каждому из которых отвечают колебания одного из тел (фиг. 1) с безразмерной амплитудой  $a_*$ ; при этом второе либо, в первом приближении, покоится, либо движется равномерно (если это верхнее тело). Этот эффект обусловлен малой величиной трения между телами.

При  $a + b > \sigma$  квадратуры  $s_{1,2}$  выражаются через эллиптические интегралы и вид уравнений (2.1) существенно усложняется. Однако и здесь для  $\sigma < 2/\sqrt{5}$  имеются два аналогичных положения равновесия, для которых вместо  $a_*$  следует взять значение (1.7). Варьирование уравнений (2.1) вблизи этих точек приводит к двум условиям устойчивости, одно из которых совпадает с (1.10), а второе имеет вид

$$(2 - 3\sigma^2 - \delta^2)\delta < 4\gamma/3\pi$$

Рассматривая последнее условие совместно с уравнением (1.8), получим, что оно выполняется для  $\gamma > 2$ , при этом точки  $(a^*, 0)$  и  $(0, a^*)$  также будут устойчивыми узлами. Построить сепаратрису, разделяющую на плоскости  $(a, b)$  области притяжения этих точек, аналитически затруднительно (штриховая часть кривой на фиг. 3). Мож-

но утверждать, однако, что такая сепаратриса, за исключением точки  $(0, 0)$ , нигде не пересекает осей координат, так как на них помимо названных положений равновесия особых точек больше нет [8]. Если для усредненных уравнений (2.1) рассматривать начальную задачу, соответствующую движению системы из состояния покоя, то из (1.3) с точностью до величин порядка  $\varepsilon$  имеем условия  $\tau = 0$ ,  $a = \sigma$ ,  $b = 0$  (точка  $M_0$  на фиг. 3). Отсюда следует, что будут происходить лишь колебания верхнего тела, для которых стационарное значение амплитуды равно  $a_*$  при  $2/\sqrt{5} < \sigma < 1$ , или  $a^*$ , когда  $\sigma < 2/\sqrt{5}$ . Задавая, однако, другие начальные условия, например, придавая нижнему телу соответствующую начальную скорость, можно прийти к обратной ситуации — стационарным колебаниям нижнего тела при равномерном, в первом приближении, движении верхнего.

3. Рассмотрим далее случай основного резонанса, когда частоты  $\nu_1, \nu_2$  близки. При этом в уравнениях (1.3) можно положить  $\nu_1^2 = 1 + \mu(1 + \kappa)$ ,  $\nu_2^2 = 1 - \mu(1 - \kappa)$ , где параметр  $\mu$ , характеризующий близость парциальных частот

$$\mu = \frac{(m_1 c_1 - m_1 c_2)(m_1 + m_2)}{2m_1 m_2 (c_1 + c_2)}$$

здесь полагаем малым того же порядка, что и  $\varepsilon$ . Для последующего применения метода усреднения и анализа усредненных уравнений в (1.3) оказывается удобным сделать линейную замену переменных

$$p = \zeta - \eta, \quad q = (1 - \kappa)\zeta + (1 + \kappa)\eta \quad (3.1)$$

В результате приходим к уравнениям

$$p'' + p = \mu F_1, \quad q'' + q = \mu F_2$$

$$F_1 = -\Delta[\gamma \text{sign}(p' + \sigma) - 3(p' + \sigma) + (p' + \sigma)^3] - 2\kappa p - q \quad (3.2)$$

$$F_2 = -(1 - \kappa^2)p, \quad \Delta = 2\varepsilon/[\mu(1 - \kappa^2)]$$

Проведя в (3.2) замену переменных для резонансного случая  $p = a \cos \varphi$ ,  $p' = -a \sin \varphi$ ,  $q = b \cos(\varphi + \theta)$ ,  $q' = -b \sin(\varphi + \theta)$ , после усреднения по быстрой фазе  $\varphi$  в первом приближении получим уравнения для медленных амплитуд  $a$ ,  $b$  и "расстройки"  $\theta$ :

$$a' = \frac{\mu}{2} \left\{ \Delta \left[ s + 3a \left( 1 - \sigma^2 - \frac{a^2}{4} \right) \right] - b \sin \theta \right\} \quad (3.3)$$

$$b' = \frac{\mu}{2} (1 - \kappa^2) a \sin \theta, \quad \theta' = \frac{\mu}{2} \left[ (1 - \kappa^2) \frac{a}{b} \cos \theta - \frac{b}{a} \cos \theta - 2\kappa \right].$$

Здесь  $s$  имеет то же значение, что и в (1.5). Уравнения (3.3) имеют четыре стационарные точки, которым соответствуют периодические, в первом приближении, решения исходной системы. При  $2/\sqrt{5} < \sigma < 1$  это следующие точки

$$\begin{aligned} 1. \theta = 0, \quad a = a_*, \quad b = (1 - \kappa)a_*; \quad 2. \theta = 0, \quad a = a_*, \quad b = -(1 + \kappa)a_* \\ 3. \theta = \pi, \quad a = a_*, \quad b = -(1 + \kappa)a_*; \quad 4. \theta = \pi, \quad a = a_*, \quad b = -(1 - \kappa)a_* \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для  $0 < \sigma < 2/\sqrt{5}$  получим аналогичные четыре стационарных решения, для которых значения  $a_*$  в (3.4) следует, согласно (1.5), (1.7), заменить на  $a^*$ . С помощью критерия Рауса–Гурвица и с учетом условия (1.10) можно показать, что в обоих случаях все названные решения являются асимптотически устойчивыми (на доказательстве

этого подробно останавливаться не будем). Далее, разрешив уравнения (3.1) относительно  $\zeta$ ,  $\eta$ , найдем амплитуды стационарных колебаний по этим переменным: точкам 1 и 4 соответствуют значения амплитуд  $A_\zeta = a_c$ ,  $A_\eta = 0$ , точкам 2 и 3 значения  $A_\zeta = 0$ ,  $A_\eta = a_c$ . Здесь и далее

$$a_c = \begin{cases} a_*, & 2/\sqrt{5} < \sigma < 1 \\ a^*, & 0 < \sigma < 2/\sqrt{5} \end{cases}$$

Таким образом, в случае основного резонанса возможны лишь такие стационарные состояния системы, при которых колебания совершает только одно из тел. Для решения вопроса о том, какой из режимов колебаний возникает в системе, следует интегрировать уравнения (3.3) при соответствующих начальных условиях. Например, для рассмотренной выше (п. 2) начальной задачи о движении системы из состояния покоя, начальные условия для уравнений (3.3) будут

$$\tau = 0, \quad a_0 = \sigma, \quad b_0 = (1 - \kappa)\sigma, \quad \theta_0 = 0 \quad (3.5)$$

Численное решение (3.3) при этих условиях для различных значений параметров показало, что реализуются колебания верхнего тела, соответствующие первой стационарной точке (3.4). Последнее объясняется близостью начальных условий (3.5) к этой точке.

4. В заключение рассмотрим случай "более точной" настройки на резонанс, когда параметр  $\mu \ll \epsilon$ , т.е.  $\Delta \gg 1$ . При этом амплитуда  $a$  в уравнениях (3.3) становится быстрой некритической переменной, и, согласно первому уравнению (3.3), можно в двух последующих положить  $a = \dot{a}_c$ . В результате получим систему второго порядка

$$\beta' = (1 - \kappa^2) \sin \theta, \quad \theta' = \left( \frac{1 - \kappa^2}{\beta} - \beta \right) \cos \theta - 2\kappa \quad (4.1)$$

Здесь  $\beta = b/a_c$ , а штрих означает дифференцирование по "медленному" времени  $\tau/2\mu$ . Анализ системы (4.1) показывает, что она также имеет четыре особые точки, аналогичные (3.4) (первая точка будет  $\theta = 0$ ,  $\beta = 1 - \kappa$  и так далее), причем все они являются центрами. Чтобы судить о реальном характере движений вблизи этих точек, будем учитывать малую диссипацию в упругих элементах исходной системы (фиг. 1). Положим, что параллельно упругим элементам  $c_1$ ,  $c_2$  присоединены демпферы вязкого сопротивления с малыми коэффициентами вязкости  $\alpha^{(1)}$ ,  $\alpha^{(2)}$ . Тогда в правых частях уравнений (4.1) появятся слагаемые, пропорциональные  $\alpha^{(1)}$ ,  $\alpha^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} \beta' &= (1 - \kappa^2) \sin \theta - [\alpha_1 + \alpha_2 + \kappa(\alpha_2 - \alpha_1)]\beta + (1 - \kappa^2)(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \theta \\ \theta' &= \left( \frac{1 - \kappa^2}{\beta} - \beta \right) \cos \theta - 2\kappa - (\alpha_2 - \alpha_1) \left( \frac{1 - \kappa^2}{\beta} + \beta \right) \sin \theta \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь  $\alpha_{1,2}$  — безразмерные коэффициенты вязкости

$$\alpha_i = \frac{\alpha^{(i)}}{2\mu m_i} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{c_1 + c_2}} \quad (i = 1, 2)$$

Система (4.2) при малых  $\alpha_{1,2}$  имеет особые точки, близкие к соответствующим точкам (4.1). Первая такая точка с точностью до слагаемых высших порядков относительно  $\alpha_{1,2}$  будет

$$\theta = \frac{1}{1 + \kappa} [\alpha_1 + \alpha_2 + \kappa(\alpha_2 - \alpha_1)] - \alpha_2 + \alpha_1, \quad \beta = 1 - \kappa \quad (4.3)$$

Условие неустойчивости этого решения, полученное варьированием уравнений (4.2) вблизи него, приводится к простому виду

$$\alpha_1 > \frac{3 + \kappa}{1 + \kappa} \alpha_2 \quad (4.4)$$

Исследование остальных трех особых точек показывает, что условие (4.4) является также достаточным для асимптотической устойчивости второй и третьей особых точек и неустойчивости четвертой. Численное интегрирование уравнений (4.2) при начальных условиях, соответствующих (3.5) и при достаточно малых  $\alpha_{1,2}$ , удовлетворяющих условию (4.4) ( $\alpha_{1,2} \sim 0.05-0.15$ ), показало, что все решения сходятся ко второй или третьей точкам, т.е. система переходит в режим колебаний нижней массы. Таким образом, уменьшение частотной расстройки может первоначально устойчивое стационарное движение (см. (3.4)) сделать неустойчивым вследствие влияния ранее неучтенной малой диссипации в упругих элементах.

Работа выполнена в рамках программы "Динамика, прочность и надежность машин, приборов и конструкций".

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алифов А.А., Фролов К.В. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии. М.: Наука, 1985. 328 с.
2. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 359 с.
3. Крагельский И.В., Гитис Н.В. Фрикционные автоколебания. М.: Наука, 1987. 181 с.
4. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1967. 420 с.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
7. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 2. Ч. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1933. 287 с.
8. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 916 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию 24.VI.1996