

КВАТЕРНИОНЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ДИНАМИКЕ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА. Ч. 2

Получены уравнения динамики твердого тела в параметрах Кейли–Клейна осцилляторного вида, даны их приложения к случаям Лагранжа и Ковалевской. Рассмотрены преобразования растяжения и времени кватернионных уравнений движения твердого тела, полученных в [1]; установлены дифференциальные условия их приводимости для возмущенного обобщенного случая Лагранжа к форме уравнений движения возмущенных осцилляторов (условия накладываются на функции, которые фигурируют в рассматриваемых преобразованиях). Найдены преобразования, приводящие уравнения движения твердого тела в обобщенном случае Лагранжа по переменным, соответствующим углам прецессии и собственного вращения, к уравнениям плоского движения двух гармоничных осцилляторов, частоты которых – линейные комбинации двух интегралов моментов количества движения тела.

Установлена аналогия движения твердого тела с плоским движением системы двух несвободных материальных точек, вытекающая из смысла параметров Родрига–Гамильтона. На ее основе получены новые уравнения движения твердого тела в полярных координатах, даны их приложения к случаю движения твердого тела в однородном поле сил тяжести.

1. Уравнения движения в параметрах Кейли–Клейна. Введем комплексные переменные – параметры Кейли–Клейна $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, связанные с параметрами Родрига–Гамильтона s_j соотношениями [2]:

$$\begin{aligned} \alpha &= s_0 + is_3, & \beta &= -s_2 + is_1 \\ \gamma &= s_2 + is_1, & \delta &= s_0 - is_3, & i^2 &= -1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Из (1.1) и равенства $s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$ следует

$$\begin{aligned} \alpha &= \bar{\delta}, & \beta &= -\bar{\gamma}, & \delta &= \bar{\alpha}, & \gamma &= -\bar{\beta}, & \alpha\delta - \beta\gamma &= 1 \\ \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} &= 1, & \alpha\bar{\alpha} - s_0^2 + s_3^2, & \beta\bar{\beta} &= s_1^2 + s_2^2 \end{aligned}$$

где верхняя черта означает комплексно сопряженную величину.

Проекция p, q, r абсолютной угловой скорости тела связаны с параметрами Кейли–Клейна и их первыми производными по времени соотношениями [2]:

$$\begin{aligned} p + iq &= 2i(\beta\bar{\alpha} - \bar{\alpha}\beta), & p - iq &= 2i(\alpha\bar{\beta} - \bar{\beta}\alpha) \\ r &= 2i(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}) = -2i(\bar{\alpha}\alpha + \bar{\beta}\beta) \end{aligned}$$

Кинематические и динамические уравнения вращательного движения твердого тела произвольной конфигурации в переменных α , β имеют соответственно вид

$$2\alpha' = ir\alpha + i(p - iq)\beta, \quad 2\beta' = -ir\beta + i(p + iq)\alpha \quad (1.2)$$

$$2\alpha'' = ir\alpha' + i(p - iq)\beta' + ir'\alpha + i(p' - iq')\beta \quad (1.3)$$

$$2\beta'' = -ir\beta' + i(p + iq)\alpha' - ir'\beta + i(p' + iq')\alpha$$

Уравнения (1.3) получены дифференцированием по времени уравнений (1.2).

Подставляя в (1.3) выражения для α и β из (1.2), получим другую форму динамических уравнений:

$$2\alpha'' = \left(ir - \frac{1}{2}\omega^2\right)\alpha + (q + ip)\beta$$

$$2\beta'' = -\left(ir + \frac{1}{2}\omega^2\right)\beta - (q - ip)\alpha \quad (1.4)$$

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = 4(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta})$$

Подставляя выражения для β и α , вытекающие соответственно из первого и второго уравнений (1.2), в уравнения (1.3), получим диагональную форму уравнений движения тела:

$$\alpha'' - Q\alpha' + R\alpha = 0, \quad \beta'' - \bar{Q}\beta' + \bar{R}\beta = 0 \quad (1.5)$$

$$Q = (p' - iq')/(p - iq), \quad \bar{Q} = (p' + iq')/(p + iq)$$

$$R = \frac{1}{2}\left(irQ - ir' + \frac{1}{2}\omega^2\right), \quad \bar{R} = \frac{1}{2}\left(-ir\bar{Q} + ir' + \frac{1}{2}\omega^2\right) \quad (1.6)$$

Замечание. Уравнения движения тела в параметрах γ , δ получаются из уравнений в параметрах α , β с помощью замены переменных $\alpha = \bar{\delta}$, $\beta = -\bar{\gamma}$ и последующего выполнения операции сопряжения, поэтому в дальнейшем не приводятся. Так, уравнения движения тела в параметрах γ , δ , соответствующие уравнениям (1.5), имеют вид

$$\gamma'' - Q\gamma' + R\gamma = 0, \quad \delta'' - \bar{Q}\delta' + \bar{R}\delta = 0 \quad (1.7)$$

где Q и R по-прежнему определяются (1.6).

Уравнения движения в параметрах Кейли-Клейна (1.4), (1.5) могут быть использованы для исследования как кинематики, так и динамики твердого тела. При решении задач кинематики фигурирующие в уравнениях (1.4) и (1.5) величины p , q , r и Q , R — известные функции времени. При этом задача определения ориентаций твердого тела сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка из системы (1.5) относительно переменной α (или β) с комплексными, переменными в общем случае, коэффициентами Q , R .

Для движения тела с постоянными угловыми скоростями p , q , r уравнения (1.5) принимают вид уравнений движения гармонических осцилляторов

$$\alpha'' + (\omega^2/4)\alpha = 0, \quad \beta'' + (\omega^2/4)\beta = 0, \quad \omega = \text{const}$$

а в случае конического движения тела ($p = a \cos(bt)$, $q = a \sin(bt)$, $r = \text{const}$; a , $b = \text{const}$) — вид уравнений движения линейных осцилляторов

$$\alpha'' + ib\alpha' + (br/2 + \omega^2/4)\alpha = 0$$

$$\beta'' - ib\beta' + (br/2 + \omega^2/4)\beta = 0, \quad \omega^2 = a^2 + r^2 = \text{const}$$

При решении задач динамики уравнения (1.4) или (1.5) должны быть дополнены известными связями p , q , r с моментами M_k действующих на твердое тело внешних сил, вытекающими из динамических уравнений Эйлера. Для динамически симметричного твердого тела в уравнениях (1.5) следует положить

$$Q = (1/A)[(M_1 - iM_2)/(p - iq) + i(A - C)r]$$

$$\bar{Q} = (1/A)[(M_1 + iM_2)/(p + iq) - i(A - C)r]$$

$$r = M_3/C$$

Приведем другие формы уравнений движения динамически симметричного твердого тела в параметрах Кейли–Клейна, соответствующие уравнениям движения тела в параметрах Родрига–Гамильтона s_j и z_j , полученным в [1]. Уравнения движения тела в параметрах α , β , соответствующие уравнениям (1.10) [1], имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha'' - iar\alpha - i\frac{1}{2}r'\alpha + \frac{1}{4}(\omega^2 - 2ar^2)\alpha &= \frac{1}{2}A^{-1}(iM_1 + M_2)\beta \\ \beta'' + iar\beta + i\frac{1}{2}r'\beta + \frac{1}{4}(\omega^2 - 2ar^2)\beta &= \frac{1}{2}A^{-1}(iM_1 - M_2)\alpha \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$r = M_3/C$$

$$r = 2i(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}), \quad \omega^2 = 4(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}), \quad a = (A - C)/A$$

В случае Лагранжа уравнения (1.8) принимают вид

$$\begin{aligned} \alpha'' - iar\alpha + \frac{1}{4}[\omega^2 - 2ar^2 + (4Pl_3/A)(1 - \alpha\bar{\alpha})]\alpha &= 0 \\ \beta'' + iar\beta + \frac{1}{4}[\omega^2 - 2ar^2 - (4Pl_3/A)(1 - \beta\bar{\beta})]\beta &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$r = \text{const}, \quad \omega^2 = 4(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}), \quad a = (A - C)/A$$

С учетом интеграла энергии

$$A(p^2 + q^2) + Cr^2 + 2Pl_3\gamma_3 = 2h = \text{const}$$

система (1.9) распадается на независимые (по переменным α и β) уравнения

$$\begin{aligned} \alpha'' - iar\alpha + (1/(2A))[h^* + Pl_3(3 - 4\alpha\bar{\alpha})]\alpha &= 0 \\ \beta'' + iar\beta + (1/(2A))[h^* - Pl_3(3 - 4\beta\bar{\beta})]\beta &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$r = \text{const}, \quad h^* = h + (C - A)r^2/2 = \text{const}$$

В случае Ковалевской уравнения движения тела (1.8) принимают вид

$$\alpha'' - i\frac{1}{2}r\alpha + \frac{1}{4}[p^2 + q^2 - n(\gamma_1 - i\gamma_2)]\alpha = -\frac{1}{4}n\beta$$

$$\beta'' + i\frac{1}{2}r\beta + \frac{1}{4}[p^2 + q^2 - n(\gamma_1 + i\gamma_2)]\beta = -\frac{1}{4}n\alpha$$

$$r = 2i(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}), \quad p^2 + q^2 = (p + iq)(p - iq)$$

$$p + iq = 2i(\beta\bar{\alpha} - \bar{\alpha}\beta), \quad p - iq = 2i(\alpha\bar{\beta} - \bar{\beta}\alpha)$$

$$\gamma_1 + i\gamma_2 = 2\beta\bar{\alpha}, \quad \gamma_1 - i\gamma_2 = 2\bar{\beta}\alpha, \quad n = Pl_1/C$$

Параметры Кейли–Клейна $\alpha_z, \beta_z, \gamma_z, \delta_z$, соответствующие параметрам Родрига–Гамильтона z_j , определяются соотношениями, аналогичными (1.1). Уравнения движения тела в переменных α_z, β_z , соответствующие уравнениям (2.22) [1], имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_z'' + (L/(2A))^2 \alpha_z &= (1/(2A))[(iM_1 + M_2)\beta_z + iM_3\alpha_z] \\ \beta_z'' + (L/(2A))^2 \beta_z &= (1/(2A))[(iM_1 - M_2)\alpha_z - iM_3\beta_z] \\ (L/(2A))^2 &= 4(\alpha_z \bar{\alpha}_z + \beta_z \bar{\beta}_z) \end{aligned} \quad (1.11)$$

В случае Лагранжа уравнения (1.11) принимают вид

$$\begin{aligned} \alpha_z'' + (1/(2A))[h^{**} + Pl_3(3 - 4\alpha_z \bar{\alpha}_z)]\alpha_z &= 0 \\ \beta_z'' + (1/(2A))[h^{**} - Pl_3(3 - 4\beta_z \bar{\beta}_z)]\beta_z &= 0 \\ h^{**} = h + (C/A)(C - A)r^2/2 &= \text{const} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Эти уравнения, в отличие от (1.10), не содержат первых производных от параметров α, β . Видно, что движения тела как по переменным α, β (уравнения (1.10)), так и по переменным α_z, β_z (уравнения (1.12)) в случае Лагранжа разделяются. Такого разделения движений по этим переменным в случае Ковалевской не происходит.

2. Преобразования растяжения и времени. Для приведения уравнений движения к осцилляторной форме (к форме уравнений движений возмущенных осцилляторов, совершающих в случае невозмущенного движения гармонические колебания) в механике используются преобразования растяжения и времени. Рассмотрим эти преобразования в динамике симметричного твердого тела на примере уравнений движения тела (2.17) [1] в переменных z_j , полагая, что среди внешних сил, действующих на твердое тело, имеются потенциальные силы, силовая функция $U = -\Pi$ которых – произвольная дифференцируемая функция косинуса угла нутации. Момент внешних сил в этом случае имеет вид

$$\mathbf{M} + (dU/d\gamma_3)\mathbf{y}_3 \times \mathbf{x}_3, \quad U = U(\gamma_3), \quad \gamma_3 = \cos \vartheta$$

В этом пункте \mathbf{M} – момент внешних возмущающих сил, в состав которых не входят указанные потенциальные силы. В случае Лагранжа $U = -Pl_3\gamma_3$.

В рассматриваемом случае кватернионное уравнение движения тела (2.17) [1] принимает вид

$$\frac{d^2 \mathbf{z}}{dt^2} + \left(\frac{L}{2A}\right)^2 \mathbf{z} = -\frac{1}{2A} \frac{dU}{d\gamma_3} (\gamma_3 \mathbf{z} + \mathbf{i}_3 \circ \mathbf{z} \circ \mathbf{i}_3) + \frac{1}{2A} \mathbf{M}_x \circ \mathbf{z} \quad (2.1)$$

В скалярной записи имеем

$$\frac{d^2 z_i}{dt^2} + \left[\left(\frac{L}{2A}\right)^2 + \frac{1}{2A} \frac{dU}{d\gamma_3} (\gamma_3 - 1)\right] z_i = \Phi_i \quad (i = 0, 3) \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2 z_k}{dt^2} + \left[\left(\frac{L}{2A}\right)^2 + \frac{1}{2A} \frac{dU}{d\gamma_3} (\gamma_3 + 1)\right] z_k = \Phi_k \quad (k = 1, 2) \quad (2.3)$$

$$(L/(2A))^2 = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$$

$$\gamma_3 = \cos \vartheta = 2(z_0^2 + z_3^2) - 1 = 1 - 2(z_1^2 + z_2^2)$$

Здесь Φ_j ($j = \overline{0, 3}$) – компоненты кватерниона $(1/(2A))\mathbf{M}_x \circ \mathbf{z}$.

Проведем в уравнениях (2.2) и (2.3) замену переменных

$$z_i = \chi_1 u_i, \quad z_k = \chi_2 u_k \quad (i = 0, 3, k = 1, 2) \quad (2.4)$$

и времени

$$\frac{d}{dt} = v_k^{-1} \frac{d}{d\tau_k}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = v_k^{-2} \frac{d^2}{d\tau_k^2} - v_k^{-3} \frac{dv_k}{d\tau_k} \frac{d}{d\tau_k} \quad (k = 1, 2) \quad (2.5)$$

где χ_k и v_k – некоторые неизвестные функции переменных системы, такие, что

$$v_k = \chi_k^2 \quad (k = 1, 2) \quad (2.6)$$

В новых переменных уравнения (2.2) и (2.3) примут вид (2.7) и (2.8) соответственно:

$$\frac{d^2 u_i}{d\tau_i^2} + \chi_1^4 \left[\left(\frac{L}{2A} \right)^2 + \frac{1}{2A} \frac{dU}{d\gamma_3} (\gamma_3 - 1) + \frac{\chi_1}{\chi_1} \right] u_i = \chi_1^4 \Phi_i \quad (i = 0, 3) \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2 u_k}{d\tau_k^2} + \chi_2^4 \left[\left(\frac{L}{2A} \right)^2 + \frac{1}{2A} \frac{dU}{d\gamma_3} (\gamma_3 + 1) + \frac{\chi_2}{\chi_2} \right] u_k = \chi_2^4 \Phi_k \quad (k = 1, 2) \quad (2.8)$$

Отметим, что необходимость введения двух различных функций v_k в преобразованиях времени (2.5) и двух различных функций χ_k в преобразованиях растяжения (2.4) обусловлена тем, что обобщенные “частоты” подсистем (2.2) и (2.3) (коэффициенты при переменных z_i и z_k) различны. Отметим также, что равенства (2.6) есть следствия условий $v_k^{-1} dv_k/d\tau_k + 2\chi_k^{-1} d\chi_k/d\tau_k = 0$ ($k = 1, 2$), при выполнении которых уравнения движения тела в новых переменных u_i не содержат производных $du_i/d\tau_i$ и $du_k/d\tau_k$. При этом в силу (2.6) из четырех первоначально произвольных функций χ_k, v_k произвольными остаются лишь две из них: χ_k .

Задача приведения уравнений движения тела (2.1) к осцилляторному виду, как это следует из (2.7), (2.8), заключается в нахождении таких функции χ_k , которые для невозмущенного движения тела ($M_i = 0$) удовлетворяют дифференциальным условиям

$$\chi_k^4 \left[\left(\frac{L}{2A} \right)^2 + \frac{1}{2A} \frac{dU}{d\gamma_3} (\gamma_3 \mp 1) + \frac{\chi_k}{\chi_k} \right] = D_k = \text{const} \quad (k = 1, 2) \quad (2.9)$$

где знак минус соответствует $k = 1$, а плюс – $k = 2$.

Эти условия с учетом выражения для интеграла энергии в переменных z_j :

$$(L/(2A))^2 - U/(2A) = h_z = \text{const}$$

могут быть представлены в виде

$$\chi_k^4 \left(\frac{\chi_k}{\chi_k} + \frac{1}{2A} \left[U + \frac{dU}{d\gamma_3} (\gamma_3 \mp 1) \right] + h_z \right) = D_k$$

или в виде

$$\chi_k^{-1} \frac{d^2 \chi_k}{d\tau_k^2} - 2\chi_k^{-2} \left(\frac{d\chi_k}{d\tau_k} \right)^2 + \frac{\chi_k^4}{2A} \left[U + \frac{dU}{d\gamma_3} (\gamma_3 \mp 1) \right] + \chi_k^4 h_z = D_k$$

Пример функций χ_k , удовлетворяющих условиям (2.9), приводится в следующем пункте. Отметим, что с точки зрения приведения уравнений движения твердого тела к осцилляторному виду удобны не только уравнения движения тела в параметрах Ро-

дрига–Гамильтона, но и уравнения в параметрах Кейли–Клейна, приведенные в особенности уравнения (1.5), (1.7), имеющие симметричную структуру.

3. Аналогия с плоским движением системы двух материальных точек. Уравнение движения в полярных координатах. Уравнения движения твердого тела (1.10) [в параметрах Родрига–Гамильтона s_j или (2.4) [1] в параметрах z_j , как видно из э уравнений и соотношений (1.3) [1] и (2.2) [1], могут рассматриваться как уравне движения системы двух материальных точек N_1 и N_2 , имеющих единичные массы плоскости переменных x, y . Координаты точек N_1 и N_2 для уравнений (1.10) [1] оп деляются равенствами $x_1 = s_0, y_1 = s_3; x_2 = s_1, y_2 = s_2$, а для уравнений (2.4) [1] – рав ствами $x_1 = z_0, y_1 = z_3; x_2 = z_1, y_2 = z_2$.

Отметим, что такая интерпретация движения твердого тела справедлива не то ко для симметричного твердого тела, но и для тела произвольной конфигурации.

Введем полярные координаты ρ_i, φ_i точек N_i ($i = 1, 2$), соответствующие переме ным s_j , определяемые в соответствии с (1.3) [1] соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 = s_0 = \rho_1 \cos \varphi_1, \quad y_1 = s_3 = \rho_1 \sin \varphi_1, \quad \rho_1 = \cos(\vartheta/2), \quad \varphi_1 = (\psi + \varphi)/2 \\ x_1^2 + y_1^2 = s_0^2 + s_3^2 = \rho_1^2 = \cos^2(\vartheta/2) = (1 + \cos \vartheta)/2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} x_2 = s_1 = \rho_2 \cos \varphi_2, \quad y_2 = s_2 = \rho_2 \sin \varphi_2, \quad \rho_2 = \sin(\vartheta/2), \quad \varphi_2 = (\psi - \varphi)/2 \\ x_2^2 + y_2^2 = s_1^2 + s_2^2 = \rho_2^2 = \sin^2(\vartheta/2) = (1 - \cos \vartheta)/2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 1, \quad \rho_1^2 - \rho_2^2 = \cos \vartheta, \quad 2\rho_1\rho_2 = \sin \vartheta \quad (3.3)$$

В соответствии с первым соотношением (3.3) на систему точек N_1, N_2 наложена стационарная голономная связь, отражающая неизменность суммы квадратов рас стояний точек до начала системы координат x, y .

Углы Эйлера находятся через полярные координаты точек из формул

$$\psi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \cos(\vartheta/2) = \rho_1, \quad \sin(\vartheta/2) = \rho_2 \quad (3.4)$$

Введем наряду с полярными координатами точек переменные c_1 и c_2 , имеющие смысл моментов количеств движения точек N_1 и N_2 относительно начала системы ко ординат x, y :

$$c_1 = \rho_1^2 \dot{\gamma}_1 = s_0 s_3 - s_3 s_0, \quad c_2 = \rho_2^2 \dot{\varphi}_2 = s_1 s_2 - s_2 s_1 \quad (3.5)$$

Из соотношений (3.5) и (1.9) [1] следует, что переменные c_1 и c_2 связаны с проек цией угловой скорости тела r равенством $c_1 - c_2 = r/2 = H/(2C)$.

Из (3.4) и (3.5) следует, что угловые скорости прецессии и собственного вращения выражаются через переменные c_1, c_2 и ϑ следующим образом:

$$\dot{\psi} = 2[c_1/(1 + \cos \vartheta) + c_2/(1 - \cos \vartheta)], \quad \dot{\varphi} = 2[c_1/(1 + \cos \vartheta) - c_2/(1 - \cos \vartheta)]$$

Уравнения движения симметричного твердого тела (1.10) [1] в полярных коорди натах ρ_i, φ_i, c_i ($i = 1, 2$), определяемых формулами (3.1), (3.2), (3.5), принимают вид

$$\begin{aligned} 2c_1 = 2ar\rho_1\dot{\rho}_1 + (1/A)(M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi)\rho_1\rho_2 + (1/C)M_3\rho_1^2 \\ \dot{\varphi}_1 = c_1/\rho_1^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\rho_1 \ddot{\rho}_1 = \left(-\frac{1}{4}\omega^2 + \frac{1}{2}ar^2 + \dot{\varphi}_1^2 \right) \rho_1 - arc_1/\rho_1 - \frac{1}{2A}(M_1 \cos \varphi - M_2 \sin \varphi)\rho_2$$

$$2c_2 = -2arp_2\rho_2 + (1/A)(M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi)\rho_1\rho_2 - (1/C)M_3\rho_2^2$$

$$\varphi_2 = c_2/\rho_2^2 \quad (3.7)$$

$$\rho_2 \ddot{=} = \left(-\frac{1}{4}\omega^2 + \frac{1}{2}ar^2 + \varphi_2^2\right)\rho_2 + arc_2/\rho_2 + \frac{1}{2A}(M_1 \cos \varphi - M_2 \sin \varphi)\rho_1$$

$$r = 2(c_1 - c_2), \quad \varphi = (\varphi_1 - \varphi_2), \quad a = (A - C)/A$$

$$\omega^2/4 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1^2\varphi_1^2 + \rho_2^2\varphi_2^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + c_1^2/\rho_1^2 + c_2^2/\rho_2^2$$

Уравнения (3.6) описывают собой движение точки N_1 , а уравнения (3.7) — точки N_2 . В соответствии с (3.6) и (3.7) проекции сил F_1, F_2 , действующих на точки N_1, N_2 , на направления радиусов-векторов точек и перпендикулярные к ним направления имеют вид

$$F_{1\rho} = \left(-\frac{1}{4}\omega^2 + \frac{1}{2}ar^2\right)\rho_1 - arc_1/\rho_1 - \frac{1}{2A}(M_1 \cos \varphi - M_2 \sin \varphi)\rho_2$$

$$F_{1\varphi} = ar\rho_1 + \frac{1}{2A}(M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi)\rho_2 + (1/C)M_3\rho_1$$

$$F_{2\rho} = \left(-\frac{1}{4}\omega^2 + \frac{1}{2}ar^2\right)\rho_2 + arc_2/\rho_2 + \frac{1}{2A}(M_1 \cos \varphi - M_2 \sin \varphi)\rho_1$$

$$F_{2\varphi} = ar\rho_2 + \frac{1}{2A}(M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi)\rho_1 - (1/C)M_3\rho_2$$

Отметим, что вместо третьего уравнения подсистемы (3.7) (или (3.6)) может быть использовано уравнение $\rho_1\rho_1 + \rho_2\rho_2 = 0$, являющееся следствием первого из соотношений (3.3), а первое уравнение (3.7) может быть записано в виде: $2c_2 = 2c_1 - M_3/C$.

Кроме того, система уравнений (3.6), (3.7) может быть записана в другом виде, если вместо переменных ρ_1 и ρ_2 использовать переменные θ_1 и θ_2 , определяемые соотношениями

$$\theta_1 = \cos \vartheta = \rho_1^2 - \rho_2^2 = 2\rho_1^2 - 1 = 1 - 2\rho_2^2, \quad \theta_2 = \sin \vartheta = 2\rho_1\rho_2, \quad \theta_1^2 + \theta_2^2 = 1$$

Уравнения движения тела в этом случае принимают вид

$$2c_1 = a(c_1 - c_2)\theta_1 + \frac{1}{2A}(M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi)\theta_2 + \frac{1}{2C}M_3(1 + \theta_1)$$

$$\varphi_1 = 2c_1/(1 + \theta_1) \quad (3.8)$$

$$\theta_1 \ddot{=} = -[\theta_1^2 + 8(c_1^2 + c_2^2)]\theta_1/(1 - \theta_1^2) + 4a(c_1 - c_2)\theta_1^2 -$$

$$-4(c_1^2 - c_2^2)[a - (1 + \theta_1^2)/(1 - \theta_1^2)] - (1/A)(M_1 \cos \varphi - M_2 \sin \varphi)\theta_2$$

$$2c_2 = a(c_1 - c_2)\theta_1 + \frac{1}{2A}(M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi)\theta_2 - \frac{1}{2C}M_3(1 - \theta_1)$$

$$\varphi_2 = 2c_2/(1 - \theta_1)$$

$$\theta_2 \ddot{=} = -\theta_1^2/\theta_2 + [8(c_1^2 + c_2^2)\theta_1/(1 - \theta_1^2) - 4a(c_1 - c_2)^2\theta_1 +$$

$$+ 4(c_1^2 - c_2^2)(a - (1 + \theta_1^2)/(1 - \theta_1^2))]\theta_1/\theta_2 + (1/A)(M_1 \cos \varphi - M_2 \sin \varphi)\theta_1$$

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad a = (A - C)/A \quad (3.9)$$

Вместо третьего уравнения подсистемы (3.9) целесообразно использовать уравнение $\theta_2 = -(\theta_1/\theta_2)\theta_1$.

Видно, что уравнения (3.6), (3.7) обладают большей симметрией, чем уравнений (3.8), (3.9).

Полярные координаты ρ_i , φ_i материальных точек N_i ($i = 1, 2$), соответствующие переменным z_j , определяются в соответствии с (2.2) [1] ($\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$) соотношениями, аналогичными (3.1)–(3.3):

$$z_0 = \rho_1 \cos \varphi_1, \quad z_3 = \rho_1 \sin \varphi_1, \quad z_1 = \rho_2 \cos \varphi_2, \quad z_2 = \rho_2 \sin \varphi_2 \quad (3.10)$$

$$\rho_1 = \cos(\vartheta/2), \quad \varphi_1 = (\psi + \varphi - \varepsilon)/2$$

$$\rho_1^2 = z_0^2 + z_3^2 = (1 + \cos \vartheta)/2 \quad (3.11)$$

$$\rho_2 = \sin(\vartheta/2), \quad \varphi_2 = (\psi - \varphi + \varepsilon)/2$$

$$\rho_2^2 = z_1^2 + z_2^2 = (1 - \cos \vartheta)/2 \quad (3.12)$$

Соотношения (3.3) остаются прежними. Углы Эйлера находятся через полярные координаты точек из формул

$$\Psi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \Phi = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon, \quad \cos(\vartheta/2) = \rho_1, \quad \sin(\vartheta/2) = \rho_2$$

Переменные c_1 и c_2 , имеющие смысл моментов количеств движения точек N_i , в этом случае определяются соотношениями, аналогичными (3.5):

$$c_1 = \rho_1^2 \varphi_1 = z_0 z_3 - z_3 z_0, \quad c_2 = \rho_2^2 \varphi_2 = z_1 z_2 - z_2 z_1 \quad (3.13)$$

В случае 2.1 [1] уравнения движения твердого тела (2.9) [1] в полярных координатах ρ_i , φ_i , c_i ($i = 1, 2$), определяемых формулами (3.10)–(3.12), (3.13), принимают вид

$$2c_1 = -2(C/A)rc_1\rho_1 + (1/A)(M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi)\rho_1\rho_2$$

$$\varphi_1 = c_1/\rho_1^2 \quad (3.14)$$

$$\rho_1 \ddot{=} = \left(-\frac{1}{4}\Omega^2 + \varphi_1^2\right)\rho_1 + (C/A)rc_1/\rho_1 - \frac{1}{2A}(M_1 \cos \varphi - M_2 \sin \varphi)\rho_2$$

$$2c_2 = 2(C/A)rc_2\rho_2 + (1/A)(M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi)\rho_1\rho_2$$

$$\varphi_2 = c_2/\rho_2^2 \quad (3.15)$$

$$\rho_2 \ddot{=} = \left(-\frac{1}{4}\Omega^2 + \varphi_2^2\right)\rho_2 - (C/A)rc_2/\rho_2 + \frac{1}{2A}(M_1 \cos \varphi - M_2 \sin \varphi)\rho_1$$

$$r = M_3/C, \quad \varepsilon = r, \quad \varphi = (\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon) \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{4}\Omega^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1^2 \varphi_1^2 + \rho_2^2 \varphi_2^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + c_1^2/\rho_1^2 + c_2^2/\rho_2^2 \quad (3.17)$$

Для проекций сил F_1 , F_2 , действующих на точки N_1 и N_2 , имеем такие выражения:

$$F_{1\rho} = -\frac{1}{4}\Omega^2 \rho_1 + (C/A)rc_1/\rho_1 - (1/(2A))(M_1 \cos \varphi - M_2 \sin \varphi)\rho_2$$

$$F_{1\varphi} = -(C/A)rc_1 + (1/(2A))(M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi)\rho_2$$

$$F_{2\rho} = -\frac{1}{4}\Omega^2\rho_2 - (C/A)rc_2/\rho_2 + (1/(2A))(M_1\cos\varphi - M_2\sin\varphi)\rho_1$$

$$F_{2\varphi} = (C/A)r\rho_2 + (1/(2A))(M_1\sin\varphi + M_2\cos\varphi)\rho_1$$

В рассматриваемом случае 2.1 в силу (2.14) [1], (3.13) имеет место равенство

$$c_1 = c_2 \quad (3.18)$$

Поэтому на основании равенства (3.18) и равенств

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 1, \quad \rho_1\rho_1 + \rho_2\rho_2 = 0 \quad (3.19)$$

вместо подсистемы (3.15) в системе (3.14)–(3.16) могут быть взяты уравнения $\ddot{\varphi}_2 = c_1/\rho_2^2 = c_1/(1 - \rho_1^2)$, $\rho_2 = -(\rho_1/\rho_2)\rho_1$, а вместо соотношения (3.17) – соотношение $\Omega^2/4 = (\rho_1^2 + c_1^2/\rho_1^2)/(1 - \rho_1^2)$.

В случае 2.2 [1] уравнения движения твердого тела (2.22) [1] в полярных координатах $\rho_i, \varphi_i, c_i (i = 1, 2)$, определяемых соотношениями (3.10)–(3.12), (3.13), принимают вид

$$2c_1 = (1/A)[(M_1\sin\varphi + M_2\cos\varphi)\rho_2 + M_3\rho_1]\rho_1$$

$$\varphi_1 = c_1/\rho_1^2 \quad (3.20)$$

$$\rho_1 \ddot{\rho}_1 = \left[-\left(\frac{L}{2A}\right)^2 + \varphi_1^2 \right] \rho_1 - \frac{1}{2A}(M_1\cos\varphi - M_2\sin\varphi)\rho_2$$

$$2c_2 = (1/A)[(M_1\sin\varphi + M_2\cos\varphi)\rho_1 - M_3\rho_2]\rho_2$$

$$\varphi_2 = c_2/\rho_2^2 \quad (3.21)$$

$$\rho_2 \ddot{\rho}_2 = \left[-\left(\frac{L}{2A}\right)^2 + \varphi_2^2 \right] \rho_2 + \frac{1}{2A}(M_1\cos\varphi - M_2\sin\varphi)\rho_1$$

$$\varepsilon = 2[(A-C)/C](c_1 - c_2), \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon \quad (3.22)$$

$$(L/(2A))^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + c_1^2/\rho_1^2 + c_2^2/\rho_2^2 \quad (3.23)$$

Силы F_1, F_2 , действующие на материальные точки N_1 и N_2 , в случае 2.2 определяются соотношениями

$$F_{1\rho} = -\left(\frac{L}{2A}\right)^2 \rho_1 - \frac{1}{2A}(M_1\cos\varphi - M_2\sin\varphi)\rho_2,$$

$$F_{1\varphi} = \frac{1}{2A}[(M_1\sin\varphi + M_2\cos\varphi)\rho_2 + M_3\rho_1]$$

$$F_{2\rho} = -\left(\frac{L}{2A}\right)^2 \rho_2 + \frac{1}{2A}(M_1\cos\varphi - M_2\sin\varphi)\rho_1,$$

$$F_{2\varphi} = \frac{1}{2A}[(M_1\sin\varphi + M_2\cos\varphi)\rho_1 - M_3\rho_2]$$

Отметим, что как и в случае 2.1 вместо третьего уравнения подсистемы (3.21) может быть использовано второе уравнение (3.19).

В случае 2.2 переменные c_1 и c_2 связаны с проекциями $L_3 = H$, L_3^* кинетического момента тела на ось симметрии тела OY_3 и неподвижную ось OX_3 соотношениями

$$\begin{aligned} 2(c_1 - c_2) &= L_3/A = (C/A)r, & 2(c_1 + c_2) &= L_3^*/A \\ 4c_1 &= (L_3^* + L_3)/A, & 4c_2 &= (L_3^* - L_3)/A \end{aligned} \quad (3.24)$$

т.е. являются линейными комбинациями этих проекций.

В случае движения тела в однородном поле сил тяжести уравнения (3.20), (3.21) принимают вид

$$4c_1 = M_3/A, \quad \varphi_1 = c_1/\rho_1^2$$

$$\rho_1 \ddot{=} = \left[-\left(\frac{L}{2A}\right)^2 + \varphi_1^2 \right] \rho_1 - \frac{1}{4A} (PL_3 - \gamma_3 \Pi) \rho_1^{-1}$$

$$4c_2 = -M_3/A, \quad \varphi_2 = c_2/\rho_2^2$$

$$\rho_2 \ddot{=} = \left[-\left(\frac{L}{2A}\right)^2 + \varphi_2^2 \right] \rho_2 + \frac{1}{4A} (PL_3 - \gamma_3 \Pi) \rho_2^{-1}$$

$$M_3 = P(l_2 \gamma_1 - l_1 \gamma_2) = 2P(l_2 \sin \varphi - l_1 \cos \varphi) \rho_1 \rho_2$$

$$\Pi = P(l_1 \gamma_1 + l_2 \gamma_2 + l_3 \gamma_3) = P[2(l_1 \sin \varphi + l_2 \cos \varphi) \rho_1 \rho_2 + l_3 \gamma_3]$$

$$\gamma_3 = \cos \vartheta = \rho_1^2 - \rho_2^2 = 2\rho_1^2 - 1 = 1 - 2\rho_2^2$$

где L и φ по-прежнему определяются уравнениями (3.22), (3.23).

Видно, что в этом случае $c_1 = -c_2$. Точки N_1 и N_2 движутся под действием сил F_1 и F_2 , моменты которых относительно начала системы координат xu равны по модулю, но противоположны по направлению.

Отметим, что в случае, когда $M_3 = 0$, а M_1, M_2 произвольны, $c_1 = c_2$ и точки N_1 и N_2 движутся под действием сил F_1 и F_2 , моменты которых относительно начала системы координат xu равны по модулю и одинаково направлены. В случае Лагранжа $M_3 = 0$, $c_1 = c_2 = 0$ и точки N_1 и N_2 движутся в плоскости xu под действием центральных сил $F_{1\rho}$ и $F_{2\rho}$.

Введем новые переменные u_j ($j = 0, 3$), связанные с z_j соотношениями

$$\begin{aligned} u_0 &= \rho_1^{-1} z_0 = \cos \varphi_1, & u_3 &= \rho_1^{-1} z_3 = \sin \varphi_1, & u_0^2 + u_3^2 &= 1 \\ u_1 &= \rho_2^{-1} z_1 = \cos \varphi_2, & u_2 &= \rho_2^{-1} z_2 = \sin \varphi_2, & u_1^2 + u_2^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Уравнения для переменных u_j имеют вид

$$\begin{aligned} u_0 \ddot{=} + \varphi_1^2 u_0 &= -\varphi_1 u_3 = (\varphi_1 \ddot{=} / \varphi_1) u_0 \\ u_3 \ddot{=} + \varphi_1^2 u_3 &= \varphi_1 u_0 = (\varphi_1 \ddot{=} / \varphi_1) u_3 \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} u_1 \ddot{=} + \varphi_2^2 u_1 &= -\varphi_2 u_2 = (\varphi_2 \ddot{=} / \varphi_2) u_1 \\ u_2 \ddot{=} + \varphi_2^2 u_2 &= \varphi_2 u_1 = (\varphi_2 \ddot{=} / \varphi_2) u_2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\Phi_i = c_i/\rho_i^2, \quad \Phi_i = (c_i - 2c_i\rho_i/\rho_i)/\rho_i^2$$

$$\Phi_i/\Phi_i = c_i/c_i - 2c_i\rho_i/\rho_i \quad (i = 1, 2)$$

Здесь c_i определяются первыми уравнениями подсистем (3.20), (3.21), а ρ_i — третьими.

Переходя в уравнениях (3.26) и (3.27) от времени t к переменным τ_1 и τ_2 по формулам $dt = \rho_i^2 d\tau_i$, $d\Phi_i = c_i d\tau_i$ ($i = 1, 2$) получим

$$\frac{d^2 u_0}{d\tau_1^2} + c_1^2 u_0 = -\rho_1^2 c_1 u_3 = -\frac{dc_1}{d\tau_1} u_3 = \frac{1}{c_1} \frac{dc_1 du_0}{d\tau_1 d\tau_1} \quad (3.28)$$

$$\frac{d^2 u_3}{d\tau_1^2} + c_1^2 u_3 = \rho_1^2 c_1 u_0 = \frac{dc_1}{d\tau_1} u_0 = \frac{1}{c_1} \frac{dc_1 du_3}{d\tau_1 d\tau_1}$$

$$\frac{d^2 u_1}{d\tau_2^2} + c_2^2 u_1 = -\rho_2^2 c_2 u_2 = -\frac{dc_2}{d\tau_2} u_2 = \frac{1}{c_2} \frac{dc_2 du_1}{d\tau_2 d\tau_2} \quad (3.29)$$

$$\frac{d^2 u_2}{d\tau_2^2} + c_2^2 u_2 = \rho_2^2 c_2 u_1 = \frac{dc_2}{d\tau_2} u_1 = \frac{1}{c_2} \frac{dc_2 du_2}{d\tau_2 d\tau_2}$$

Можно убедиться, что уравнения (3.28) и (3.29) получаются из (2.7) и (2.8), если в них положить $\chi_i = \rho_i$, $\nu_i = \rho_i^2$ ($i = 1, 2$).

В случае Лагранжа, а также в более общем случае, рассмотренном в п. 2, $c_i = \text{const}$, $c_i = 0$, поэтому уравнения (3.28) и (3.29) принимают вид уравнений движения гармонических осцилляторов, частоты которых соответственно равны c_1 и c_2 .

Переменные u_j , определяемые соотношениями (3.25), непосредственно связаны с углами прецессии ψ и собственного вращения φ , поскольку $\psi = \Phi_1 + \Phi_2$, $\varphi = \Phi_1 - \Phi_2 + \varepsilon$; $\Phi_1 = (\psi + \varphi - \varepsilon)/2$, $\Phi_2 = (\psi - \varphi + \varepsilon)/2$. Поэтому можно сделать вывод о том, что в случае Лагранжа, а также в более общем случае движения динамически симметричного твердого тела в потенциальном силовом поле, силовая функция которого — произвольная дифференцируема функция косинуса угла нутации, уравнения движения тела по переменным, соответствующим углам прецессии и собственного вращения, приводятся к уравнениям плоского движения двух гармонических осцилляторов, частоты которых c_1 и c_2 — линейные комбинации двух интегралов моментов количества движения тела (в силу (3.24)). Вопрос о полной приводимости уравнений движения тела (включая движение по углу нутации) к уравнениям движения гармонических осцилляторов в рассмотренном случае остается открытым. Для решения этого вопроса могут быть использованы как уравнения движения тела, полученные в этом пункте, так и уравнения, приведенные в пунктах 1, 2 статьи.

В заключение этого пункта приведем еще одну форму уравнений движения динамически симметричного твердого тела: уравнения в переменных Φ_1 , Φ_2 , ϑ , c_1 , c_2 , ε , вытекающие из системы (3.20)–(3.23):

$$4c_1 = [(M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi) \sin \vartheta + M_3(1 + \cos \vartheta)]/A$$

$$2\Phi_1 = c_1/(1 + \cos \vartheta)$$

$$4c_2 = [(M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi) \sin \vartheta - M_3(1 - \cos \vartheta)]/A$$

$$(3.30)$$

$$2\Phi_2 = c_2/(1 - \cos \vartheta)$$

$$\vartheta'' = (\varphi_2^2 - \varphi_1^2) \sin \vartheta + (M_1 \cos \varphi - M_2 \sin \varphi) / A$$

$$\varepsilon' = 2[(A - C)/C](c_1 - c_2), \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon, \quad \psi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Эти уравнения проще уравнений (3.20)–(3.23), однако они обладают меньшей симметрией и наглядностью с геометрической точки зрения.

В случае движения твердого тела в однородном поле сил тяжести уравнения (3.30) принимают вид

$$4c_1 = M_3/A, \quad 2\varphi_1 = c_1/(1 + \cos \vartheta)$$

$$4c_2 = -M_3/A, \quad 2\varphi_2 = c_2/(1 - \cos \vartheta)$$

$$\vartheta'' = (\varphi_2^2 - \varphi_1^2) \sin \vartheta + (P/A)[-(l_1 \sin \varphi + l_2 \cos \varphi) \cos \vartheta + l_3 \sin \vartheta]$$

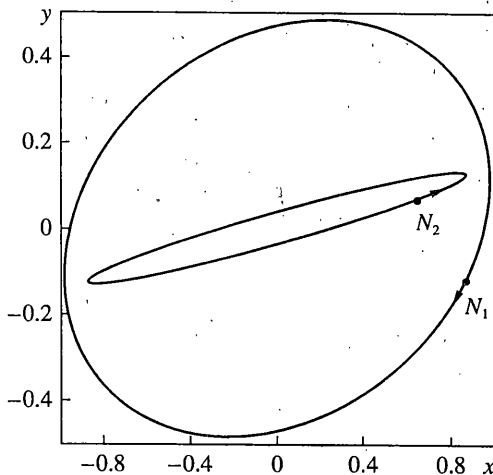
$$\varepsilon' = 2[(A - C)/C](c_1 - c_2)$$

$$M_3 = P(l_2 \sin \varphi - l_1 \cos \varphi) \sin \vartheta, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon, \quad \psi = \varphi_1 + \varphi_2$$

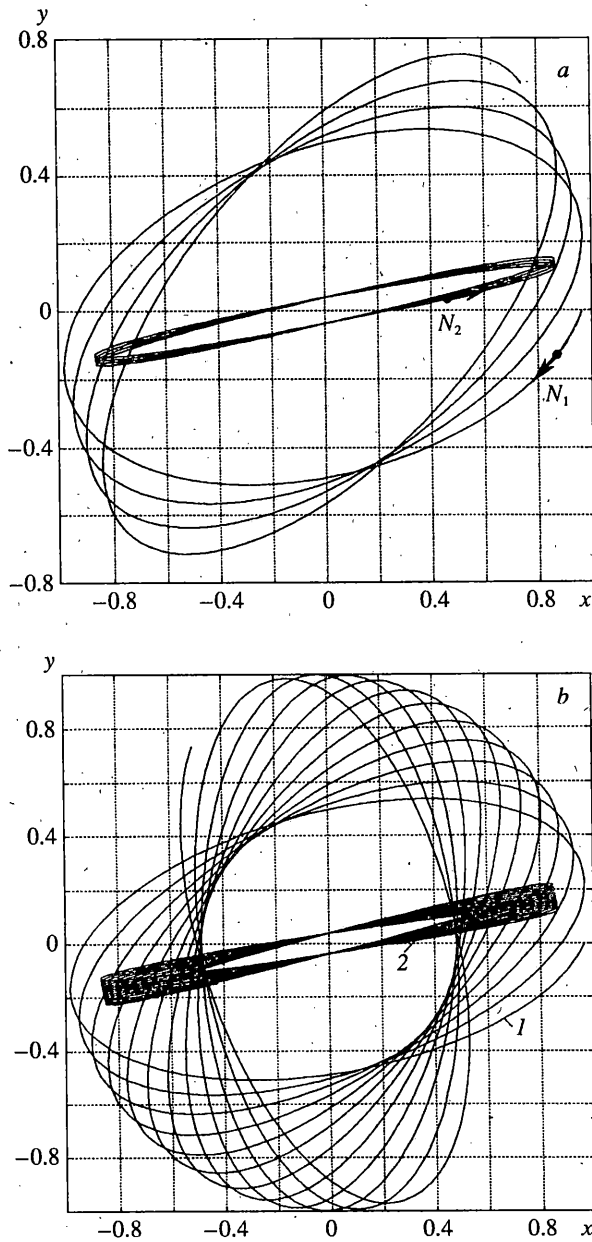
4. Геометрические интерпретации. Аналогия движения твердого тела с плоским движением системы двух несвободных материальных точек N_1 и N_2 и уравнения движения твердого тела в полярных координатах позволяют давать наглядные геометрические интерпретации движению твердого тела.

На фигурах 1–3 приведены траектории движения точек N_1 ($x_1 = z_0 = \rho_1 \cos \varphi_1$, $y_1 = z_3 = \rho_1 \sin \varphi_1$), N_2 ($x_2 = z_1 = \rho_2 \cos \varphi_2$, $y_2 = z_2 = \rho_2 \sin \varphi_2$) в координатной плоскости xy для следующих исходных данных: $A = B = 400 \text{ кгм}^2$, $C = 200 \text{ кгм}^2$, $\psi(0) = 0$, $\vartheta(0) = \pi/6 \text{ рад}$, $\varphi(0) = 0$; $p(0) = 0.866 \text{ рад/с}$, $q(0) = 0$, $r(0) = -1 \text{ рад/с}$ (стрелками показаны направления движения точек).

Для движения тела по инерции (фиг. 1) траектории – эллипсы, по которым точки N_1 и N_2 движутся в противоположных направлениях. Для начальных условий движения, при которых ось Ox_3 направлена вдоль вектора кинетического момента $L(0)$, угол нутации $\vartheta = \text{const}$ и траектории движения точек имеют вид концентрических окружностей.

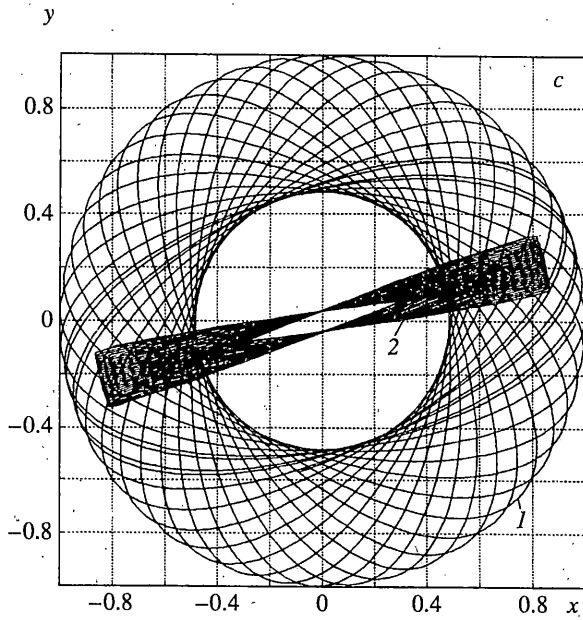


Фиг. 1



Фиг. 2

В случае Лагранжа (фигуры 2, а-с, малое смещение центра масс: $Pl_3 = -10 \text{ кгм}^2/\text{с}^2$, фиг. 2, а для отрезка времени движения тела $[0.50] \text{ с}$, фиг. 2, в $- [0; 2.5] \text{ мин}$, фиг. 2, с $- [0.5] \text{ мин}$) траектории движения точек N_1 и N_2 – эллиптические спирали разного вида. В случае Ковалевской (фигуры 3, а-с, малое смещение центра масс: $Pl_1 = 10 \text{ кгм}^2/\text{с}^2$, фиг. 3, а $- [0.50] \text{ с}$, фиг. 3, в $- [0; 2.5] \text{ мин}$, фиг. 3, с $- [0; 5] \text{ мин}$) траектории движения точек N_1 и N_2 – эллиптические спирали одинакового вида.

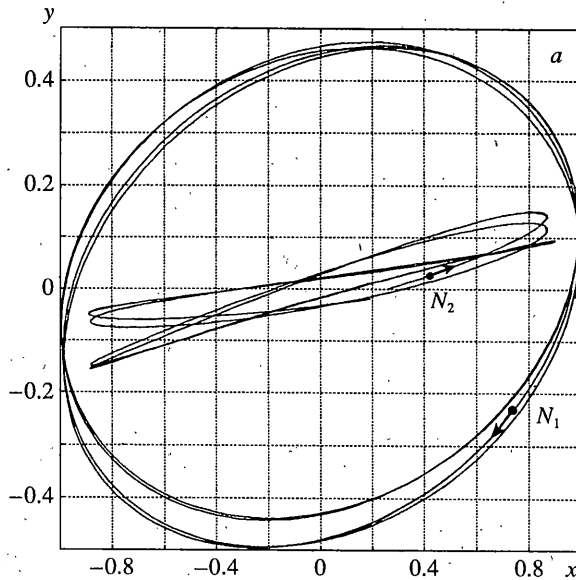


Фиг. 2. (Окончание)

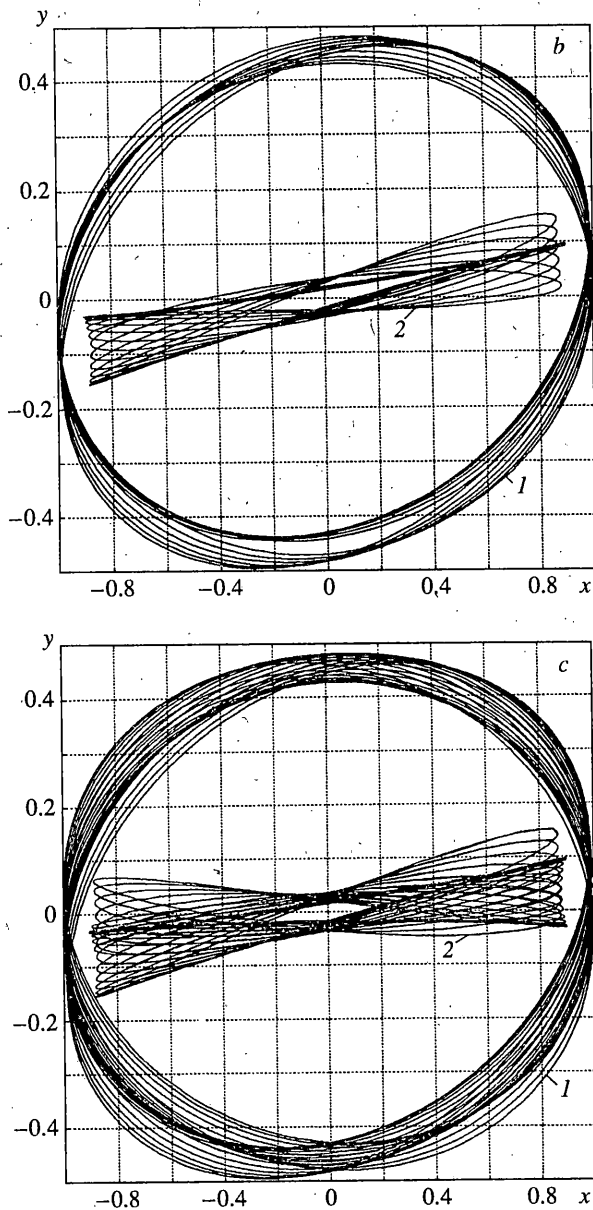
Движению твердого тела можно дать другую интерпретацию. Координаты точек N_1 и N_2 удовлетворяют уравнениям

$$z_0^2 + z_3^2 = \rho_1^2 = \cos^2(\vartheta/2), \quad z_1^2 + z_2^2 = \rho_2^2 = \sin^2(\vartheta/2) \quad (4.1)$$

Из этих уравнений следует, что в пространстве трех переменных $x, y, z = \rho$ точки $N_1^*(x_1, y_1, \rho_1 = \cos(\vartheta/2))$ и $N_2^*(x_2, y_2, \rho_2 = \sin(\vartheta/2))$ движутся по траекториям, лежащим



Фиг. 3



Фиг. 3. (Окончание)

на поверхности прямого кругового конуса с вершиной в точке 0. Уравнение этого конуса в соответствии с (4.1) имеет вид $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Направляющая кривая конуса – окружность единичного радиуса, плоскость которой перпендикулярна оси $z(\rho)$ и находится на расстоянии, равном единице, от начала координат.

Для положения тела, когда $\vartheta = 0$ (или когда $\vartheta = 2\pi$), точка N_2^* находится в начале координат, а N_1^* – на верхней (или на нижней) направляющей кривой конуса. Наобо-

рот, когда $\vartheta = \pi$ (или когда $\vartheta = 3\pi$), точка N_1^* находится в начале координат, а N_2^* – на верхней (или на нижней) направляющей кривой. Из уравнений (4.1) следует, что траектории точек N_1^* и N_2^* пересекаются (или совпадают) для положений тела, при которых $\vartheta = \pi/2, 5\pi/2$.

Для движения тела по инерции $\vartheta = \text{const}$ (если ось OX_3 направлена по вектору кинетического момента \mathbf{L}) и траектории движения точек N_1^* и N_2^* – окружности. В случае Лагранжа угол нутации ϑ – ограниченная функция времени $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$. Траектории движения точек в этом случае лежат на частях поверхности конуса, ограниченных для точки N_1^* плоскостями $\rho_1^{(1)} = \cos(\vartheta_1/2)$ и $\rho_1^{(2)} = \cos(\vartheta_2/2)$, а для точки N_2^* – плоскостями $\rho_2^{(1)} = \sin(\vartheta_1/2)$ и $\rho_2^{(2)} = \sin(\vartheta_2/2)$.

Траектории точек N_1^* и N_2^* являются проекциями траекторий точек N_1^* и N_2^* на плоскость x_3 .

Автор благодарит профессоров В.Н. Кошлякова и В.Ф. Журавлева, обративших внимание автора на задачи динамики твердого тела, за полезные обсуждения этих задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 93-01-17479, № 96-01-01251).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Челноков Ю.Н. Кватернионы и связанные с ними преобразования в динамике симметричного твердого тела. Ч. 1 // Изв. РАН МТГ. 1997. № 6. С. 3–16.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

Саратов

Поступила в редакцию 15.IX.1996